

2022 年山东省枣庄市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的.

1. 实数  $-2023$  的绝对值是 ( )

A.  $2023$

B.  $-2023$

C.  $\frac{1}{2023}$

D.  $-\frac{1}{2023}$

2. 下列运算正确的是 ( )

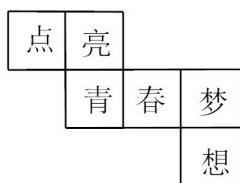
A.  $3a^2 - a^2 = 3$

B.  $a^3 \div a^2 = a$

C.  $(-3ab^2)^2 = -6a^2b^4$

D.  $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$

3. 某正方体的每个面上都有一个汉字，如图是它的一种展开图，那么在原正方体中，与“亮”字所在面相对的面上的汉字是 ( )



A. 青

B. 春

C. 梦

D. 想

4. 剪纸文化是中国最古老的民间艺术之一，下列剪纸图案中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ( )



5. 2022 年 5 月，神舟十三号搭载的 1.2 万粒作物种子顺利出舱. 其中 1.2 万用科学记数法表示为 ( )



A.  $12 \times 10^3$

B.  $1.2 \times 10^4$

C.  $0.12 \times 10^5$

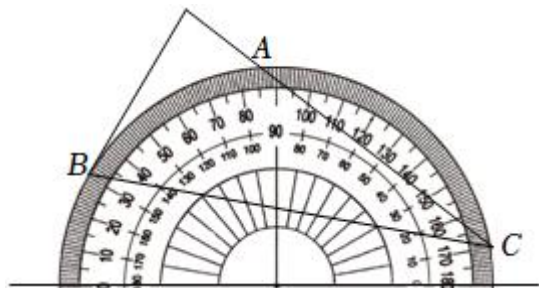
D.  $1.2 \times 10^6$

6. 在践行“安全在我心中，你我一起行动”主题手抄报评比活动中，共设置“交通安全、消防安全、饮食安全、防疫安全”四个主题内容，推荐两名学生参加评比，若他们每人从以上四个主题内容中随机选取

一个，则两人恰好选中同一主题的概率是（ ）

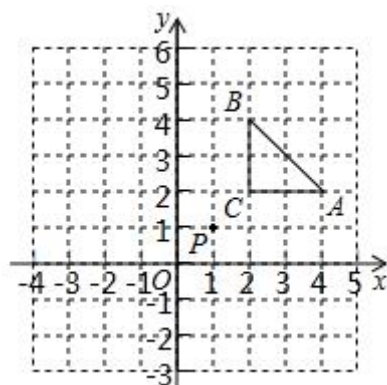
- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{3}$       C.  $\frac{2}{3}$       D.  $\frac{1}{4}$

7. 将量角器按如图所示的方式放置在三角形纸板上，使点  $C$  在半圆上. 点  $A, B$  的读数分别为  $86^\circ, 30^\circ$ ，则  $\angle ACB$  的度数是（ ）



- A.  $28^\circ$       B.  $30^\circ$       C.  $36^\circ$       D.  $56^\circ$

8. 如图，将  $\triangle ABC$  先向右平移 1 个单位，再绕点  $P$  按顺时针方向旋转  $90^\circ$ ，得到  $\triangle A'B'C'$ ，则点  $B$  的对应点  $B'$  的坐标是（ ）

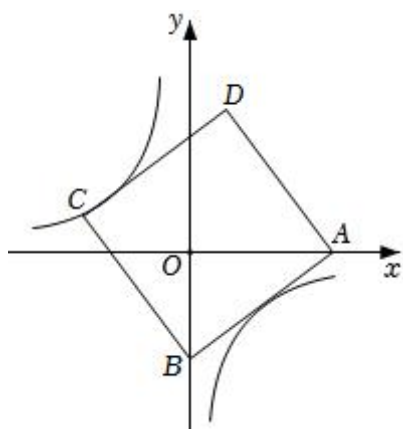


- A. (4, 0)      B. (2, -2)      C. (4, -1)      D. (2, -3)

9. 已知  $y_1$  和  $y_2$  均是以  $x$  为自变量的函数，当  $x=n$  时，函数值分别是  $N_1$  和  $N_2$ ，若存在实数  $n$ ，使得  $N_1+N_2=1$ ，则称函数  $y_1$  和  $y_2$  是“和谐函数”. 则下列函数  $y_1$  和  $y_2$  不是“和谐函数”的是（ ）

- A.  $y_1 = x^2+2x$  和  $y_2 = -x+1$       B.  $y_1 = \frac{1}{x}$  和  $y_2 = x+1$   
C.  $y_1 = -\frac{1}{x}$  和  $y_2 = -x-1$       D.  $y_1 = x^2+2x$  和  $y_2 = -x-1$

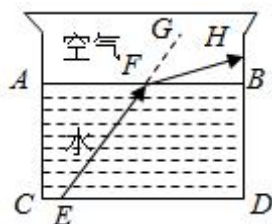
10. 如图，正方形  $ABCD$  的边长为 5，点  $A$  的坐标为 (4, 0)，点  $B$  在  $y$  轴上，若反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象过点  $C$ ，则  $k$  的值为（ ）



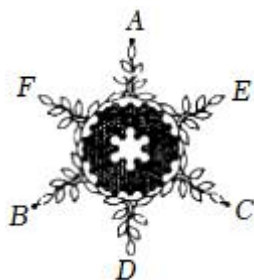
- A. 4                      B. -4                      C. -3                      D. 3

二、填空题：本大题共 6 小题，满分 18 分，只填写最后结果，每小题填对得 3 分.

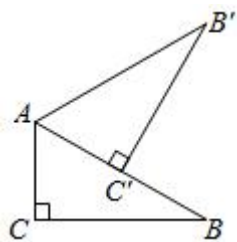
11. 光线在不同介质中传播速度不同，从一种介质射向另一种介质时会发生折射. 如图，水面  $AB$  与水杯下沿  $CD$  平行，光线  $EF$  从水中射向空气时发生折射，光线变成  $FH$ ，点  $G$  在射线  $EF$  上，已知  $\angle HFB = 20^\circ$ ， $\angle FED = 45^\circ$ ，则  $\angle GFH$  的度数为 \_\_\_\_\_.



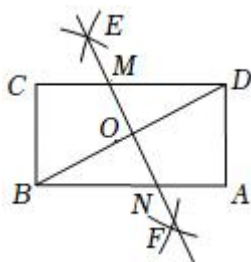
12. 北京冬奥会开幕式的巨型雪花状主火炬塔的设计，体现了环保低碳理念. 如图所示，它的主体形状呈正六边形. 若点  $A, F, B, D, C, E$  是正六边形的六个顶点，则  $\tan \angle ABE =$  \_\_\_\_\_.



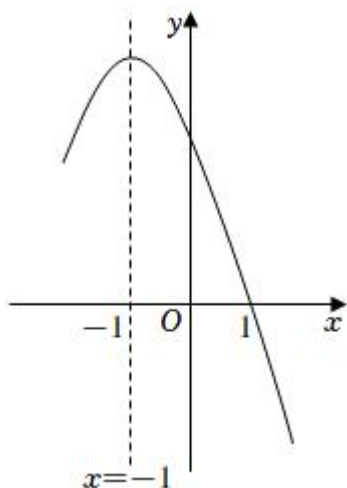
13. 《九章算术》是人类科学史上应用数学的“算经之首”，其书中卷八方程[七]中记载：“今有牛五、羊二，直金十两. 牛二、羊五，直金八两. 牛、羊各直金几何？”题目大意是：“5 头牛、2 只羊共值金 10 两. 2 头牛、5 只羊共值金 8 两，每头牛、每只羊各值金多少两？”根据题意，可求得 1 头牛和 1 只羊共值金 \_\_\_\_\_ 两.
14. 在活动课上，“雄鹰组”用含  $30^\circ$  角的直角三角尺设计风车. 如图， $\angle C = 90^\circ$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ， $AC = 2$ ，将直角三角尺绕点  $A$  逆时针旋转得到  $\triangle AB'C'$ ，使点  $C'$  落在  $AB$  边上，以此方法做下去……则  $B$  点通过一次旋转至  $B'$  所经过的路径长为 \_\_\_\_\_ . (结果保留  $\pi$ )



15. 如图，在矩形  $ABCD$  中，按以下步骤作图：①分别以点  $B$  和  $D$  为圆心，以大于  $\frac{1}{2}BD$  的长为半径作弧，两弧相交于点  $E$  和  $F$ ；②作直线  $EF$  分别与  $DC$ ,  $DB$ ,  $AB$  交于点  $M$ ,  $O$ ,  $N$ . 若  $DM=5$ ,  $CM=3$ , 则  $MN$  = \_\_\_\_\_.



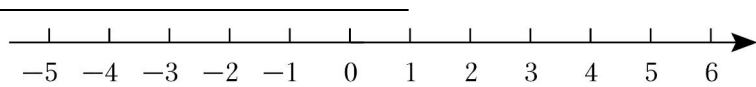
16. 小明在学习“二次函数”内容后，进行了反思总结. 如图，二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 图象的一部分与  $x$  轴的一个交点坐标为  $(1, 0)$ ，对称轴为直线  $x = -1$ ，结合图象他得出下列结论：①  $ab > 0$  且  $c > 0$ ；②  $a + b + c = 0$ ；③关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的两根分别为  $-3$  和  $1$ ；④若点  $(-4, y_1)$ ,  $(-2, y_2)$ ,  $(3, y_3)$  均在二次函数图象上，则  $y_1 < y_2 < y_3$ ；⑤  $3a + c < 0$ ，其中正确的结论有 \_\_\_\_\_. (填序号，多选、少选、错选都不得分)



三、解答题：本大共 8 小题，满分 72 分，解答时，写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (7 分) 在下面给出的三个不等式中，请你任选两个组成一个不等式组，解这个不等式组，并把解集表示在数轴上.

①  $2x - 1 < 7$ ; ②  $5x - 2 > 3(x + 1)$ ; ③  $\frac{4}{3}x + 3 \geq 1 - \frac{2}{3}x$ .



18. (7 分) 先化简, 再求值:  $(\frac{x}{x-2} - 1) \div \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ , 其中  $x = -4$ .

19. (8 分) 每年的 6 月 6 日为“全国爱眼日”. 某初中学校为了解本校学生视力健康状况, 组织数学兴趣小组按下列步骤来开展统计活动.

一、确定调查对象

(1) 有以下三种调查方案:

方案一: 从七年级抽取 140 名学生, 进行视力状况调查;

方案二: 从七年级、八年级中各随机抽取 140 名生, 进行视力状况调查;

方案三: 从全校 1600 名学生中随机抽取 600 名学生, 进行视力状况调查.

其中最具有代表性和广泛性的抽样调查方案是 \_\_\_\_\_;

二、收集整理数据

按照国家视力健康标准, 学生视力状况分为  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  四个类别. 数学兴趣小组随机抽取本校部分学生进行调查, 绘制成如图一幅不完整的统计图.

抽取的学生视力状况统计表

| 类别   | $A$           | $B$    | $C$                           | $D$           |
|------|---------------|--------|-------------------------------|---------------|
| 视力   | 视力 $\geq 5.0$ | 4.9    | $4.6 \leq \text{视力} \leq 4.8$ | 视力 $\leq 4.5$ |
| 健康状况 | 视力正常          | 轻度视力不良 | 中度视力不良                        | 重度视力不良        |
| 人数   | 160           | $m$    | $n$                           | 56            |

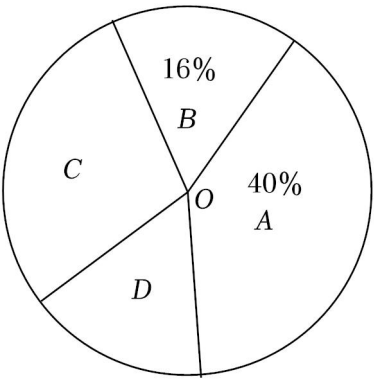
三、分析数据, 解决问题

(2) 调查视力数据的中位数所在类别为 \_\_\_\_\_ 类;

(3) 该校共有学生 1600 人, 请估算该校学生中, 中度视力不良和重度视力不良的总人数;

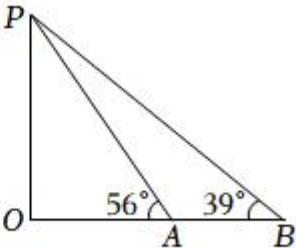
(4) 为更好保护视力, 结合上述统计数据分析, 请你提出一条合理化的建议.

抽取的学生视力状况统计图



20. (8 分) 为传承运河文明，弘扬民族精神，枣庄市政府重建了台儿庄古城. 某校“综合与实践”小组开展了测量台儿庄古城城门楼（如图①）高度的实践活动，请你帮他们完成下面的实践报告.

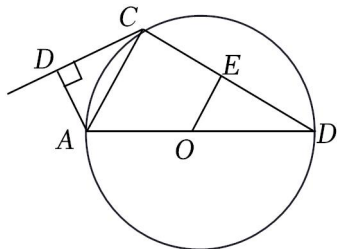
测量台儿庄古城城门楼高度的实践报告

|             |                                                                                                                                                                                                                 |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 活 动 课<br>题  | 测量台儿庄古城城门楼高度                                                                                                                                                                                                    |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 活 动 目<br>的  | 运用三角函数知识解决实际问题的                                                                                                                                                                                                 |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 活 动 工<br>具  | 测角仪、皮尺等测量工具                                                                                                                                                                                                     |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 方 案 示<br>意图 | <div><p>图①</p></div> <div><p>图②</p></div> | 测量步骤 | <p>如图②</p> <p>(1) 利用测角仪站在 <math>B</math> 处测得城门楼最高点 <math>P</math> 的仰角为 <math>39^\circ</math>；</p> <p>(2) 前进了 10 米到达 <math>A</math> 处（选择测点 <math>A, B</math> 与 <math>O</math> 在同一水平线上, <math>A, B</math> 两点之间的距离可直接测得, 测角仪高度忽略不计), 在 <math>A</math> 处测得 <math>P</math> 点的仰角为 <math>56^\circ</math>.</p> |
| 参 考 数       | $\sin 39^\circ \approx 0.6, \cos 39^\circ \approx 0.8, \tan 39^\circ \approx 0.8, \sin 56^\circ \approx 0.8, \cos 56^\circ \approx 0.6, \tan 56^\circ \approx 1.5.$                                             |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |

|                                                    |  |
|----------------------------------------------------|--|
| 据                                                  |  |
| 计 算 城<br>门 楼 $PO$<br>的 高 度<br>( 结 果<br>保 留 整<br>数) |  |

21. (8分) 如图, 在半径为  $10\text{cm}$  的  $\odot O$  中,  $AB$  是  $\odot O$  的直径,  $CD$  是过  $\odot O$  上一点  $C$  的直线, 且  $AD \perp DC$  于点  $D$ ,  $AC$  平分  $\angle BAD$ , 点  $E$  是  $BC$  的中点,  $OE = 6\text{cm}$ .

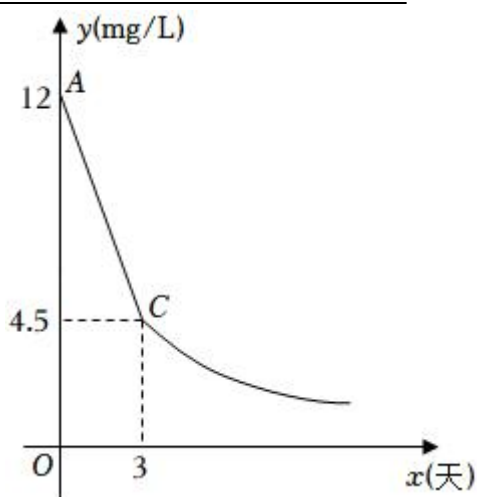
- (1) 求证:  $CD$  是  $\odot O$  的切线;
- (2) 求  $AD$  的长.



22. (10分) 为加强生态文明建设, 某市环保局对一企业排污情况进行检测, 结果显示: 所排污水中硫化物的浓度超标, 即硫化物的浓度超过最高允许的  $1.0\text{mg/L}$ . 环保局要求该企业立即整改, 在 15 天内 (含 15 天) 排污达标. 整改过程中, 所排污水中硫化物的浓度  $y$  ( $\text{mg/L}$ ) 与时间  $x$  (天) 的变化规律如图所示, 其中线段  $AC$  表示前 3 天的变化规律, 第 3 天时硫化物的浓度降为  $4.5\text{mg/L}$ . 从第 3 天起, 所排污水中硫化物的浓度  $y$  与时间  $x$  满足下面表格中的关系:

|                                 |     |     |      |     |       |
|---------------------------------|-----|-----|------|-----|-------|
| 时间 $x$ (天)                      | 3   | 5   | 6    | 9   | ..... |
| 硫化物的浓度<br>$y$ ( $\text{mg/L}$ ) | 4.5 | 2.7 | 2.25 | 1.5 | ..... |

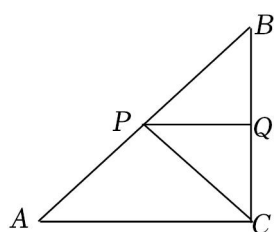
- (1) 在整改过程中, 当  $0 \leq x < 3$  时, 硫化物的浓度  $y$  与时间  $x$  的函数表达式;
- (2) 在整改过程中, 当  $x \geq 3$  时, 硫化物的浓度  $y$  与时间  $x$  的函数表达式;
- (3) 该企业所排污水中硫化物的浓度能否在 15 天以内不超过最高允许的  $1.0\text{mg/L}$ ? 为什么?



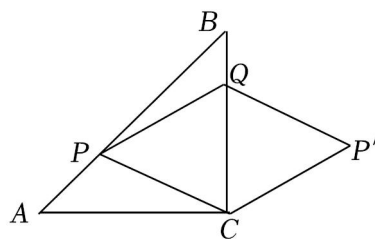
23. (12 分) 已知  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 4\text{cm}$ , 点  $P$  从点  $A$  出发, 沿  $AB$  方向以每秒  $\sqrt{2}\text{cm}$  的速度向终点  $B$  运动, 同时动点  $Q$  从点  $B$  出发沿  $BC$  方向以每秒  $1\text{cm}$  的速度向终点  $C$  运动, 设运动的时间为  $t$  秒.

(1) 如图①, 若  $PQ \perp BC$ , 求  $t$  的值;

(2) 如图②, 将  $\triangle PQC$  沿  $BC$  翻折至  $\triangle P'QC$ , 当  $t$  为何值时, 四边形  $QPCP'$  为菱形?



图①



图②

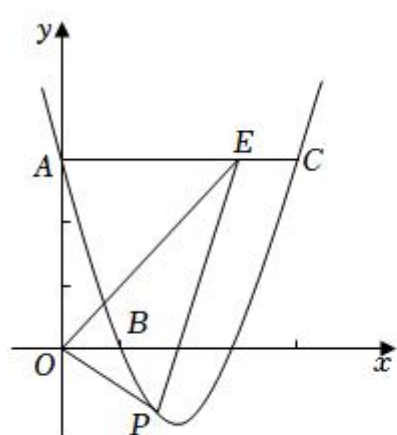
24. (12 分) 如图①, 已知抛物线  $L: y = x^2 + bx + c$  的图象经过点  $A(0, 3)$ ,  $B(1, 0)$ , 过点  $A$  作  $AC \parallel x$  轴交抛物线于点  $C$ ,  $\angle AOB$  的平分线交线段  $AC$  于点  $E$ , 点  $P$  是抛物线上的一个动点.

(1) 求抛物线的关系式;

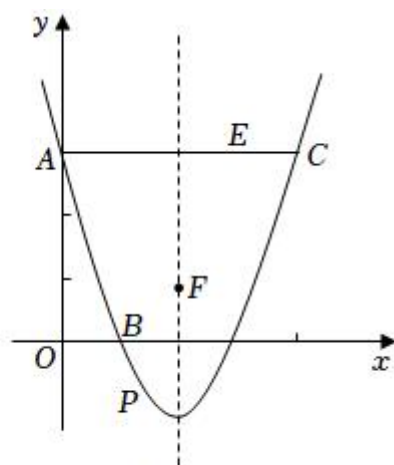
(2) 若动点  $P$  在直线  $OE$  下方的抛物线上, 连结  $PE$ 、 $PO$ , 当  $\triangle OPE$  面积最大时, 求出  $P$  点坐标;

(3) 将抛物线  $L$  向上平移  $h$  个单位长度, 使平移后所得抛物线的顶点落在  $\triangle OAE$  内 (包括  $\triangle OAE$  的边界), 求  $h$  的取值范围;

(4) 如图②,  $F$  是抛物线的对称轴  $l$  上的一点, 在抛物线上是否存在点  $P$ , 使  $\triangle POF$  成为以点  $P$  为直角顶点的等腰直角三角形? 若存在, 直接写出所有符合条件的点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



图①



图②

一、选择题：本大题共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的.

1. 实数  $-2023$  的绝对值是 ( )

- A. 2023                      B.  $-2023$                       C.  $\frac{1}{2023}$                       D.  $-\frac{1}{2023}$

【分析】利用绝对值的意义求解.

【解答】解：因为负数的绝对值等于它的相反数；

所以， $-2023$  的绝对值等于 2023.

故选：A.

【点评】本题考查绝对值的含义. 即：正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是它的相反数.

2. 下列运算正确的是 ( )

- A.  $3a^2 - a^2 = 3$                       B.  $a^3 \div a^2 = a$   
C.  $(-3ab^2)^2 = -6a^2b^4$                       D.  $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$

【分析】根据合并同类项法则，积的乘方、幂的乘方法则及单项式除法法则、完全平方公式逐项判断.

【解答】解：A、 $3a^2 - a^2 = 2a^2$ ，故 A 错误，不符合题意；

B、 $a^3 \div a^2 = a$ ，故 B 正确，符合题意；

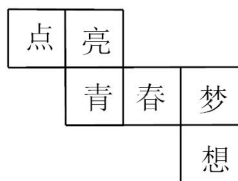
C、 $(-3a^3b)^2 = 9a^6b^2$ ，故 C 错误，不符合题意；

D、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ，故 D 不正确，不符合题意；

故选：B.

【点评】本题考查整式的运算，解题的关键是掌握整式相关运算的法则.

3. 某正方体的每个面上都有一个汉字，如图是它的一种展开图，那么在原正方体中，与“亮”字所在面相对的面上的汉字是 ( )



- A. 青                      B. 春                      C. 梦                      D. 想

【分析】根据正方体的表面展开图找相对面的方法，“Z”字两端是对面，判断即可.

【解答】解：在原正方体中，与“亮”字所在面相对的面上的汉字是：想，

故选：D.

【点评】本题考查了正方体相对两个面上的文字，熟练掌握根据正方体的表面展开图找相对面的方法是解题的关键.

4. 剪纸文化是中国最古老的民间艺术之一，下列剪纸图案中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【分析】根据中心对称图形与轴对称图形的概念进行判断即可.

【解答】解：A. 不是中心对称图形，是轴对称图形，故此选项不合题意；

B. 不是中心对称图形，是轴对称图形，故此选项不合题意；

C. 是中心对称图形，不是轴对称图形，故此选项不合题意；

D. 既是轴对称图形又是中心对称图形，故此选项符合题意；

故选：D.

【点评】本题考查的是中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与自身重合.

5. 2022 年 5 月，神舟十三号搭载的 1.2 万粒作物种子顺利出舱. 其中 1.2 万用科学记数法表示为（ ）



- A.  $12 \times 10^3$       B.  $1.2 \times 10^4$       C.  $0.12 \times 10^5$       D.  $1.2 \times 10^6$

【分析】科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数. 确定  $n$  的值时，要看把原数变成  $a$  时，小数点移动了多少位， $n$  的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值  $\geq 10$  时， $n$  是正整数，当原数绝对值  $< 1$  时， $n$  是负整数.

【解答】解：1.2 万 = 12000 =  $1.2 \times 10^4$ .

故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数，表示时关键要正确确定  $a$  的值以及  $n$  的值.

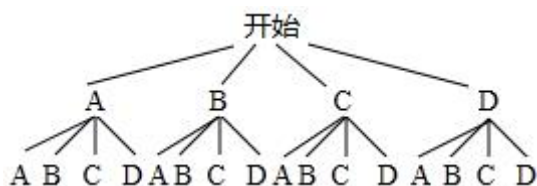
6. 在践行“安全在我心中，你我一起行动”主题手抄报评比活动中，共设置“交通安全、消防安全、饮食

安全、防疫安全”四个主题内容，推荐两名学生参加评比，若他们每人从以上四个主题内容中随机选取一个，则两人恰好选中同一主题的概率是（ ）

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{1}{4}$

**【分析】**画树状图，共有 16 种等可能的结果，两人恰好选中同一主题的结果有 4 种，再由概率公式求解即可.

**【解答】**解：画树状图如图：



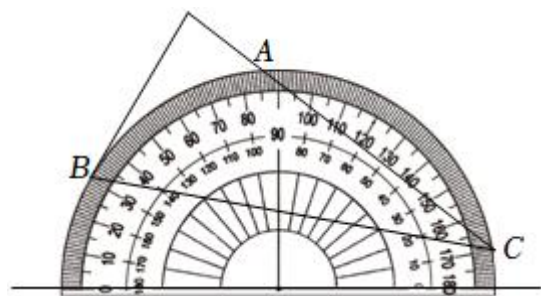
共有 16 种等可能的结果，两人恰好选中同一主题的结果有 4 种，

则两人恰好选中同一主题的概率为  $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ .

故选：D.

**【点评】**本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件. 用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比.

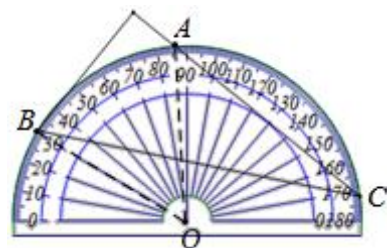
7. 将量角器按如图所示的方式放置在三角形纸板上，使点 C 在半圆上. 点 A, B 的读数分别为  $86^\circ$ ,  $30^\circ$ ，则  $\angle ACB$  的度数是（ ）



- A.  $28^\circ$                       B.  $30^\circ$                       C.  $36^\circ$                       D.  $56^\circ$

**【分析】**连接 OA, OB, 利用圆周角定理求解即可.

**【解答】**解：题意，连接 OA, OB.



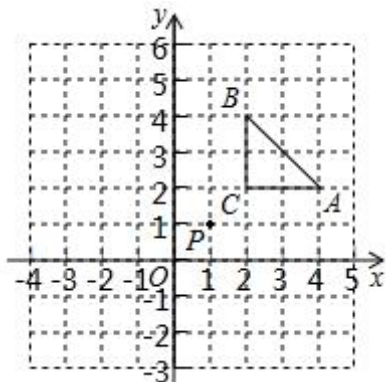
由题意， $\angle AOB = 86^\circ - 30^\circ = 56^\circ$ ，

$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 28^\circ$ ，

故选: A.

【点评】 本题考查圆周角定理, 解题的关键是理解题意, 掌握圆周角定理解决问题.

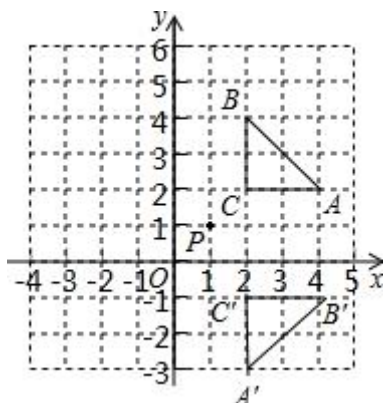
8. 如图, 将  $\triangle ABC$  先向右平移 1 个单位, 再绕点  $P$  按顺时针方向旋转  $90^\circ$ , 得到  $\triangle A'B'C'$ , 则点  $B$  的对应点  $B'$  的坐标是 ( )



- A. (4, 0)      B. (2, -2)      C. (4, -1)      D. (2, -3)

【分析】 作出旋转后的图形即可得出结论.

【解答】 解: 作出旋转后的图形如下:



$\therefore B$  点的坐标为 (4, -1),

故选: C.

【点评】 本题主要考查图形的平移和旋转, 熟练掌握图形的平移和旋转是解题的关键.

9. 已知  $y_1$  和  $y_2$  均是以  $x$  为自变量的函数, 当  $x=n$  时, 函数值分别是  $N_1$  和  $N_2$ , 若存在实数  $n$ , 使得  $N_1+N_2=1$ , 则称函数  $y_1$  和  $y_2$  是“和谐函数”. 则下列函数  $y_1$  和  $y_2$  不是“和谐函数”的是 ( )

- A.  $y_1 = x^2+2x$  和  $y_2 = -x+1$       B.  $y_1 = \frac{1}{x}$  和  $y_2 = x+1$   
C.  $y_1 = -\frac{1}{x}$  和  $y_2 = -x-1$       D.  $y_1 = x^2+2x$  和  $y_2 = -x-1$

【分析】 根据题意, 令  $y_1+y_2=0$ , 若方程有解, 则称函数  $y_1$  和  $y_2$  是“和谐函数”, 若无解, 则称函数  $y_1$  和  $y_2$  不是“和谐函数”

【解答】 解: A、令  $y_1+y_2=1$ ,

---

$$\text{则 } x^2+2x-x+1=1,$$

$$\text{整理得: } x^2+x=0,$$

$$\text{解得: } x_1=0, \quad x_2=-1,$$

$\therefore$  函数  $y_1$  和  $y_2$  是“和谐函数”，故  $A$  不符合题意；

$$B、\text{令 } y_1+y_2=1,$$

$$\text{则 } \frac{1}{x}+x+1=1,$$

$$\text{整理得: } x^2+1=0,$$

此方程无解，

$\therefore$  函数  $y_1$  和  $y_2$  不是“和谐函数”，故  $B$  符合题意；

$$C、\text{令 } y_1+y_2=1,$$

$$\text{则 } -\frac{1}{x}-x-1=1,$$

$$\text{整理得: } x^2+2x+1=0,$$

$$\text{解得: } x_1=-1, \quad x_2=-1,$$

$\therefore$  函数  $y_1$  和  $y_2$  是“和谐函数”，故  $C$  不符合题意；

$$D、\text{令 } y_1+y_2=1,$$

$$\text{则 } x^2+2x-x-1=1,$$

$$\text{整理得: } x^2+x-2=0,$$

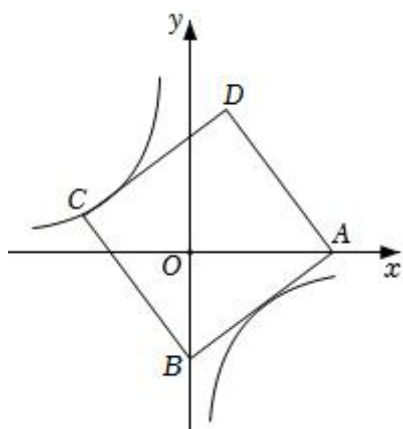
$$\text{解得: } x_1=1, \quad x_2=-2,$$

$\therefore$  函数  $y_1$  和  $y_2$  是“和谐函数”，故  $D$  不符合题意；

故选：  $B$  .

**【点评】** 本题考查了解一元二次方程 - 公式法，根据题意令  $y_1+y_2=1$ ，然后进行计算是解题的关键.

10. 如图，正方形  $ABCD$  的边长为 5，点  $A$  的坐标为  $(4, 0)$ ，点  $B$  在  $y$  轴上，若反比例函数  $y=\frac{k}{x}$  ( $k \neq 0$ ) 的图象过点  $C$ ，则  $k$  的值为 (     )



- A. 4                      B. -4                      C. -3                      D. 3

【分析】过点  $C$  作  $CE \perp y$  轴于  $E$ ，根据正方形的性质可得  $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，再根据同角的余角相等求出  $\angle OAB = \angle CBE$ ，然后利用“角角边”证明  $\triangle ABO$  和  $\triangle BCE$  全等，根据全等三角形对应边相等可得  $OA = BE = 4$ ， $CE = OB = 3$ ，再求出  $OE$ ，然后写出点  $C$  的坐标，再把点  $C$  的坐标代入反比例函数解析式计算即可求出  $k$  的值。

【解答】解：如图，过点  $C$  作  $CE \perp y$  轴于  $E$ ，在正方形  $ABCD$  中， $AB = BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle ABO + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle ABO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = \angle CBE,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 的坐标为 } (4, 0),$$

$$\therefore OA = 4,$$

$$\therefore AB = 5,$$

$$\therefore OB = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3,$$

在  $\triangle ABO$  和  $\triangle BCE$  中，

$$\begin{cases} \angle OAB = \angle CBE \\ \angle AOB = \angle BEC, \\ AB = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABO \cong \triangle BCE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OA = BE = 4, \quad CE = OB = 3,$$

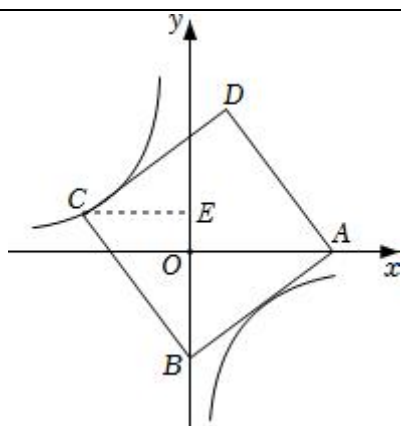
$$\therefore OE = BE - OB = 4 - 3 = 1,$$

$$\therefore \text{点 } C \text{ 的坐标为 } (-3, 1),$$

$$\therefore \text{反比例函数 } y = \frac{k}{x} \text{ (} k \neq 0 \text{) 的图象过点 } C,$$

$$\therefore k = xy = -3 \times 1 = -3,$$

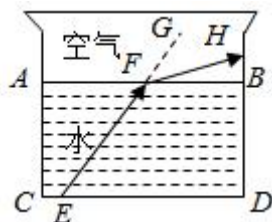
故选：C.



【点评】此题考查的是反比例函数图象上点的坐标特点，涉及到正方形的性质，全等三角形的判定与性质，反比例函数图象上的点的坐标特征，作辅助线构造出全等三角形并求出点  $D$  的坐标是解题的关键。

二、填空题：本大题共 6 小题，满分 18 分，只填写最后结果，每小题填对得 3 分。

11. 光线在不同介质中传播速度不同，从一种介质射向另一种介质时会发生折射．如图，水面  $AB$  与水杯下沿  $CD$  平行，光线  $EF$  从水中射向空气时发生折射，光线变成  $FH$ ，点  $G$  在射线  $EF$  上，已知  $\angle HFB = 20^\circ$ ， $\angle FED = 45^\circ$ ，则  $\angle GFH$  的度数为  $25^\circ$ ．



【分析】根据平行线的性质知  $\angle GFB = \angle FED = 45^\circ$ ，结合图形求得  $\angle GFH$  的度数．

【解答】解：  $\because AB \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle GFB = \angle FED = 45^\circ .$$

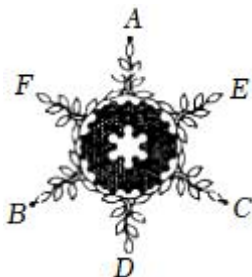
$$\because \angle HFB = 20^\circ ,$$

$$\therefore \angle GFH = \angle GFB - \angle HFB = 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ .$$

故答案为：  $25^\circ$  ．

【点评】本题考查的是平行线的性质，用到的知识点为：两直线平行，同位角相等．

12. 北京冬奥会开幕式的巨型雪花状主火炬塔的设计，体现了环保低碳理念．如图所示，它的主体形状呈正六边形．若点  $A, F, B, D, C, E$  是正六边形的六个顶点，则  $\tan \angle ABE = \underline{\frac{\sqrt{3}}{3}}$  ．



【分析】由正六边形的性质得  $AB=BC=AC$ ,  $BE$  垂直平分  $AC$ , 再由等边三角形的在得  $\angle ABC=60^\circ$ , 则  $\angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$ , 即可得出结论.

【解答】解: 连接  $BC$ 、 $AC$ ,

$\therefore$  点  $A$ ,  $F$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $C$ ,  $E$  是正六边形的六个顶点,

$\therefore AB=BC=AC$ ,  $BE$  垂直平分  $AC$ ,

$\therefore \triangle ABC$  是等边三角形,

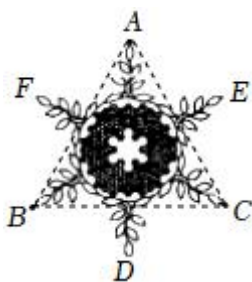
$\therefore \angle ABC=60^\circ$ ,

$\therefore BE \perp AC$ ,

$\therefore \angle ABE=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ$ ,

$\therefore \tan \angle ABE=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,

故答案为:  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ .



【点评】本题考查了正六边形的性质、等边三角形的判定与性质以及特殊角的锐角三角函数, 熟练掌握正六边形的性质和等边三角形的性质是解题的关键.

13. 《九章算术》是人类科学史上应用数学的“算经之首”, 其书中卷八方程[七]中记载: “今有牛五、羊二, 直金十两. 牛二、羊五, 直金八两. 牛、羊各直金几何?” 题目大意是: “5 头牛、2 只羊共值金 10 两. 2 头牛、5 只羊共值金 8 两, 每头牛、每只羊各值金多少两?” 根据题意, 可求得 1 头牛和 1 只羊共值金  $\frac{18}{7}$  两.

【分析】设每头牛  $x$  两, 每只羊  $y$  两, 根据 5 头牛、2 只羊共值金 10 两. 2 头牛、5 只羊共值金 8 两, 列二元一次方程组, 两方程相加可得  $7x+7y=18$ , 进一步求解即可.

【解答】解: 设每头牛  $x$  两, 每只羊  $y$  两,

根据题意, 可得 
$$\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases},$$

$\therefore 7x+7y=18$ ,

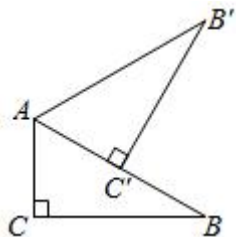
$\therefore x+y=\frac{18}{7}$ ,

∴ 1 头牛和 1 只羊共值金  $\frac{18}{7}$  两,

故答案为:  $\frac{18}{7}$ .

【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用, 根据题意建立二元一次方程组是解题的关键.

14. 在活动课上, “雄鹰组” 用含  $30^\circ$  角的直角三角尺设计风车. 如图,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $AC = 2$ , 将直角三角尺绕点  $A$  逆时针旋转得到  $\triangle AB'C'$ , 使点  $C'$  落在  $AB$  边上, 以此方法做下去……则  $B$  点通过一次旋转至  $B'$  所经过的路径长为  $\frac{4\pi}{3}$ . (结果保留  $\pi$ )



【分析】 由含  $30^\circ$  度直角三角形的性质求出  $AB$ , 根据弧长公式即可求出结论.

【解答】 解:  $\because \angle C = 90^\circ$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ ,  $AC = 2$ ,

$\therefore AB = 2AC = 4$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ ,

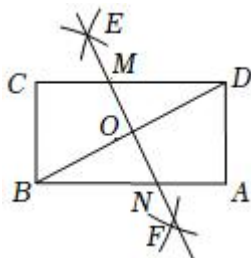
由旋转的性质得,  $\angle BAB' = \angle BAC = 60^\circ$ ,

$\therefore B$  点通过一次旋转至  $B'$  所经过的路径长为  $\frac{60\pi \cdot 4}{180} = \frac{4\pi}{3}$ ,

故答案为:  $\frac{4\pi}{3}$ .

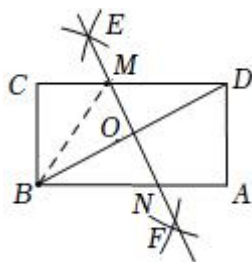
【点评】 本题主要考查了旋转的性质, 弧长公式, 含  $30^\circ$  度直角三角形的性质, 熟记弧长公式是解决问题的关键.

15. 如图, 在矩形  $ABCD$  中, 按以下步骤作图: ①分别以点  $B$  和  $D$  为圆心, 以大于  $\frac{1}{2}BD$  的长为半径作弧, 两弧相交于点  $E$  和  $F$ ; ②作直线  $EF$  分别与  $DC$ ,  $DB$ ,  $AB$  交于点  $M$ ,  $O$ ,  $N$ . 若  $DM = 5$ ,  $CM = 3$ , 则  $MN = 2\sqrt{5}$ .



【分析】 如图, 连接  $BM$ . 利用勾股定理求出  $BC$ ,  $BD$ ,  $OM$ , 再证明  $OM = ON$ , 可得结论.

【解答】 解: 如图, 连接  $BM$ .



由作图可知  $MN$  垂直平分线段  $BD$ ,

$$\therefore BM = DM = 5,$$

$\therefore$  四边形  $ABCD$  是矩形,

$$\therefore \angle C = 90^\circ, \quad CD \parallel AB,$$

$$\therefore BC = \sqrt{BM^2 - CM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore BD = \sqrt{CB^2 + CD^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5},$$

$$\therefore OB = OD = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore \angle MOD = 90^\circ,$$

$$\therefore OM = \sqrt{DM^2 - OD^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore CD \parallel AB,$$

$$\therefore \angle MDO = \angle NBO,$$

在  $\triangle MDO$  和  $\triangle NBO$  中,

$$\begin{cases} \angle MDO = \angle NBO \\ OD = BO \\ \angle MOD = \angle NOB \end{cases},$$

$$\therefore \triangle MDO \cong \triangle NBO \quad (ASA),$$

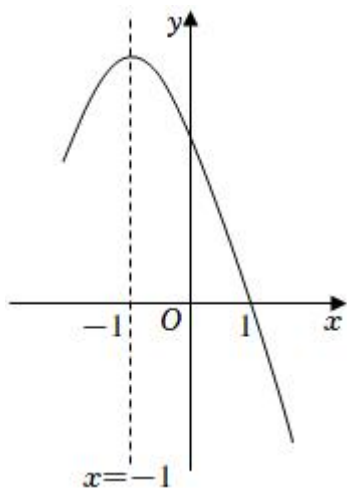
$$\therefore OM = ON = \sqrt{5},$$

$$\therefore MN = 2\sqrt{5}.$$

故答案为:  $2\sqrt{5}$ .

**【点评】** 本题考查了作图 - 基本作图、线段垂直平分线的性质、勾股定理、矩形的性质, 解决本题的关键是掌握线段垂直平分线的性质.

16. 小明在学习“二次函数”内容后, 进行了反思总结. 如图, 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 图象的一部分与  $x$  轴的一个交点坐标为  $(1, 0)$ , 对称轴为直线  $x = -1$ , 结合图象他得出下列结论: ①  $ab > 0$  且  $c > 0$ ; ②  $a + b + c = 0$ ; ③ 关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的两根分别为  $-3$  和  $1$ ; ④ 若点  $(-4, y_1)$ ,  $(-2, y_2)$ ,  $(3, y_3)$  均在二次函数图象上, 则  $y_1 < y_2 < y_3$ ; ⑤  $3a + c < 0$ , 其中正确的结论有 ①②③. (填序号, 多选、少选、错选都不得分)



【分析】由抛物线的对称轴的位置以及与  $y$  轴的交点可判断①；由抛物线过点  $(1, 0)$ ，即可判断②；由抛物线的对称性可判断③；根据各点与抛物线对称轴的距离大小可判断④；对称轴可得  $b = 2a$ ，由抛物线过点  $(1, 0)$  可判断⑤.

【解答】解：∵ 抛物线对称轴在  $y$  轴的左侧，

$$\therefore ab > 0,$$

∵ 抛物线与  $y$  轴交点在  $x$  轴上方，

$$\therefore c > 0, \text{ ①正确；}$$

∵ 抛物线经过  $(1, 0)$ ，

$$\therefore a + b + c = 0, \text{ ②正确.}$$

∵ 抛物线与  $x$  轴的一个交点坐标为  $(1, 0)$ ，对称轴为直线  $x = -1$ ，

∴ 另一个交点为  $(-3, 0)$ ，

∴ 关于  $x$  的一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 的两根分别为  $-3$  和  $1$ ，③正确；

∵  $-1 - (-2) < -1 - (-4) < 3 - (-1)$ ，抛物线开口向下，

∴  $y_2 > y_1 > y_3$ ，④错误.

∵ 抛物线与  $x$  轴的一个交点坐标为  $(1, 0)$ ，

$$\therefore a + b + c = 0,$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -1,$$

$$\therefore b = 2a,$$

$$\therefore 3a + c = 0, \text{ ⑤错误.}$$

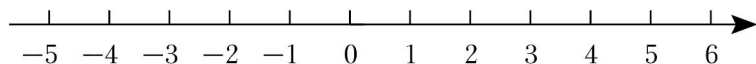
故答案为：①②③.

【点评】本题考查二次函数图象与系数的关系，解题关键是掌握二次函数的性质，掌握二次函数与方程及不等式的关系.

三、解答题：本大共 8 小题，满分 72 分，解答时，写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (7 分) 在下面给出的三个不等式中，请你任选两个组成一个不等式组，解这个不等式组，并把解集表示在数轴上.

①  $2x - 1 < 7$ ; ②  $5x - 2 > 3(x + 1)$ ; ③  $\frac{4}{3}x + 3 \geq 1 - \frac{2}{3}x$ .



【分析】选出两个不等式，组成不等式组，并解不等式组即可.

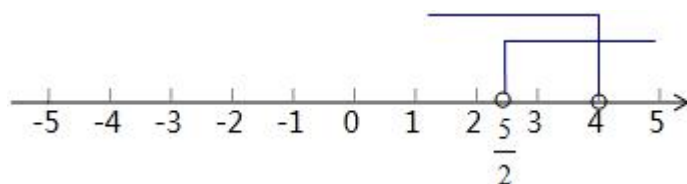
【解答】解： 
$$\begin{cases} 2x - 1 < 7 & \text{①} \\ 5x - 2 > 3(x + 1) & \text{②} \end{cases}$$

解不等式①得：  $x < 4$ ,

解不等式②得：  $x > \frac{5}{2}$ ,

∴ 不等式组的解集  $\frac{5}{2} < x < 4$ .

把解集表示在数轴上如下：



【点评】本题考查一元一次不等式组的解法，能熟练地解不等式组是解题关键.

18. (7 分) 先化简，再求值：  $(\frac{x}{x-2} - 1) \div \frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4}$ ，其中  $x = -4$ .

【分析】根据分式的加减运算以及乘除运算法则进行化简，然后将  $x$  的值代入原式即可求出答案.

【解答】解：原式  $= \frac{x - (x - 2)}{x - 2} \cdot \frac{(x - 2)^2}{(x + 2)(x - 2)}$   
 $= \frac{2}{x - 2} \cdot \frac{x - 2}{x + 2}$   
 $= \frac{2}{x + 2},$

当  $x = -4$  时，

原式  $= \frac{2}{-4 + 2}$

$= -1.$

【点评】本题考查分式的化简求值，解题的关键是熟练运用分式的加减运算以及乘除运算，本题属于基础题型.

19. (8分) 每年的6月6日为“全国爱眼日”. 某初中学校为了解本校学生视力健康状况, 组织数学兴趣小组按下列步骤来开展统计活动.

一、确定调查对象

- (1) 有以下三种调查方案:
- 方案一: 从七年级抽取 140 名学生, 进行视力状况调查;
- 方案二: 从七年级、八年级中各随机抽取 140 名生, 进行视力状况调查;
- 方案三: 从全校 1600 名学生中随机抽取 600 名学生, 进行视力状况调查.
- 其中最具有代表性和广泛性的抽样调查方案是 方案三;

二、收集整理数据

按照国家视力健康标准, 学生视力状况分为  $A, B, C, D$  四个类别. 数学兴趣小组随机抽取本校部分学生进行调查, 绘制成如图一幅不完整的统计图.

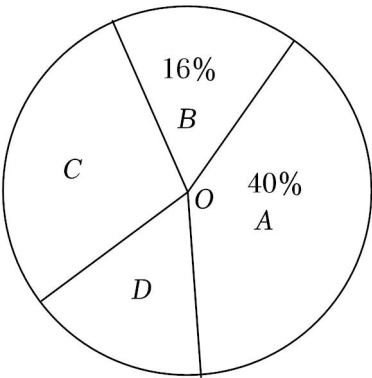
抽取的学生视力状况统计表

| 类别   | $A$           | $B$    | $C$                           | $D$           |
|------|---------------|--------|-------------------------------|---------------|
| 视力   | 视力 $\geq 5.0$ | 4.9    | $4.6 \leq \text{视力} \leq 4.8$ | 视力 $\leq 4.5$ |
| 健康状况 | 视力正常          | 轻度视力不良 | 中度视力不良                        | 重度视力不良        |
| 人数   | 160           | $m$    | $n$                           | 56            |

三、分析数据, 解决问题

- (2) 调查视力数据的中位数所在类别为  $B$  类;
- (3) 该校共有学生 1600 人, 请估算该校学生中, 中度视力不良和重度视力不良的总人数;
- (4) 为更好保护视力, 结合上述统计数据分析, 请你提出一条合理化的建议.

抽取的学生视力状况统计图



**【分析】** (1) 根据抽样的代表性、普遍性和可操作性可知, 方案三符合题意;

- (2) 根据中位数的定义解答即可；
- (3) 利用样本估计总体即可；
- (4) 根据数据提出一条建议即可.

**【解答】**解：(1) 根据抽样的代表性、普遍性和可操作性可得，方案三：从全校 1600 名学生中随机抽取 600 名学生，进行视力状况调查，作为样本进行调查分析，是最符合题意的.

故答案为：方案三；

- (2) 由题意可得，调查视力数据的中位数所在类别为  $B$  类；

故答案为： $B$ ；

- (3) 调查的总人数为： $160 \div 40\% = 400$ （人），

由题意可知， $m = 400 \times 16\% = 64$ （人），

$$n = 400 - 64 - 56 = 120 \text{（人）},$$

$$1600 \times \frac{55+120}{400} = 704 \text{（人）},$$

所以该校学生中，中度视力不良和重度视力不良的总人数约为 704 人；

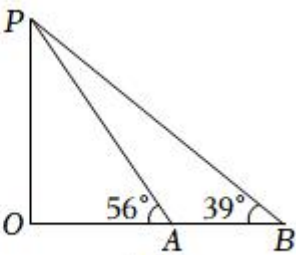
- (4) 该校学生近视程度为中度及以上占 44%，说明该校学生近视程度较为严重，建议学校加强电子产品进校园及使用的管控（答案不唯一）.

**【点评】** 本题考查扇形统计图、统计表、中位数以及用样本估计总体等知识，关键是从扇形统计图和统计表中找出相应的数据.

20. (8 分) 为传承运河文明，弘扬民族精神，枣庄市政府重建了台儿庄古城. 某校“综合与实践”小组开展了测量台儿庄古城城门楼（如图①）高度的实践活动，请你帮他们完成下面的实践报告.

测量台儿庄古城城门楼高度的实践报告

|            |                |
|------------|----------------|
| 活 动 课<br>题 | 测量台儿庄古城城门楼高度   |
| 活 动 目<br>的 | 运用三角函数知识解决实际问题 |
| 活 动 工<br>具 | 测角仪、皮尺等测量工具    |

|                         |                                                                                                                                                                                         |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 方案示意图                   |   <p>图①</p> <p>图②</p> | 测量步骤 | <p>如图②</p> <p>(1) 利用测角仪站在 <math>B</math> 处测得城门楼最高点 <math>P</math> 的仰角为 <math>39^\circ</math>；</p> <p>(2) 前进了 10 米到达 <math>A</math> 处 (选择测点 <math>A, B</math> 与 <math>O</math> 在同一水平线上, <math>A, B</math> 两点之间的距离可直接测得, 测角仪高度忽略不计), 在 <math>A</math> 处测得 <math>P</math> 点的仰角为 <math>56^\circ</math> .</p> |
| 参考数据                    | $\sin 39^\circ \approx 0.6, \cos 39^\circ \approx 0.8, \tan 39^\circ \approx 0.8, \sin 56^\circ \approx 0.8, \cos 56^\circ \approx 0.6, \tan 56^\circ \approx 1.5.$                     |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| 计算城门楼 $PO$ 的高度 (结果保留整数) |                                                                                                                                                                                         |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

**【分析】** 设  $OA = x$  米, 则  $OB = (x+10)$  米, 由锐角三角函数定义得  $OP \approx 1.5x$  (米),  $OP \approx 0.8(x+10)$  (米), 则  $1.5x = 0.8(x+10)$ , 解得  $x = \frac{80}{7}$ , 即可解决问题.

**【解答】** 解: 设  $OA = x$  米, 则  $OB = (x+10)$  米,

在  $\text{Rt}\triangle AOP$  中,  $\tan \angle OAP = \frac{OP}{OA} = \tan 56^\circ \approx 1.5$ ,

$\therefore OP \approx 1.5OA = 1.5x$  (米),

在  $\text{Rt}\triangle BOP$  中,  $\tan \angle OBP = \frac{OP}{OB} = \tan 39^\circ \approx 0.8$ ,

$\therefore OP \approx 0.8OB = 0.8(x+10)$  (米),

$\therefore 1.5x = 0.8(x+10)$ ,

解得:  $x = \frac{80}{7}$ ,

$$\therefore OP \approx 1.5x = 1.5 \times \frac{80}{7} \approx 17 \text{ (米)},$$

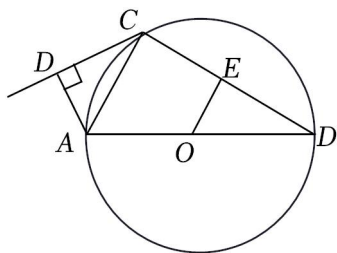
答：台儿庄古城城门楼的高度约为 17 米.

**【点评】** 本题考查了解直角三角形的应用—仰角俯角问题，熟练掌握锐角三角函数定义是解题的关键.

21. (8 分) 如图，在半径为  $10\text{cm}$  的  $\odot O$  中， $AB$  是  $\odot O$  的直径， $CD$  是过  $\odot O$  上一点  $C$  的直线，且  $AD \perp DC$  于点  $D$ ， $AC$  平分  $\angle BAD$ ，点  $E$  是  $BC$  的中点， $OE = 6\text{cm}$ .

(1) 求证： $CD$  是  $\odot O$  的切线；

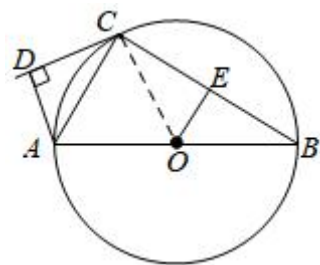
(2) 求  $AD$  的长.



**【分析】** (1) 连接  $OC$ ，由  $AC$  平分  $\angle BAD$ ， $OA = OC$ ，可得  $\angle DAC = \angle OCA$ ， $AD \parallel OC$ ，根据  $AD \perp DC$ ，即可证明  $CD$  是  $\odot O$  的切线；

(2) 由  $OE$  是  $\triangle ABC$  的中位线，得  $AC = 12$ ，再证明  $\triangle DAC \sim \triangle CAB$ ，根据相似三角形的性质即可得到结论.

**【解答】** (1) 证明：连接  $OC$ ，如图：



$\because AC$  平分  $\angle BAD$ ,

$\therefore \angle DAC = \angle CAO$ ,

$\because OA = OC$ ,

$\therefore \angle CAO = \angle OCA$ ,

$\therefore \angle DAC = \angle OCA$ ,

$\therefore AD \parallel OC$ ,

$\because AD \perp DC$ ,

$\therefore CO \perp DC$ ,

$\because OC$  是  $\odot O$  的半径,

$\therefore CD$  是  $\odot O$  的切线;

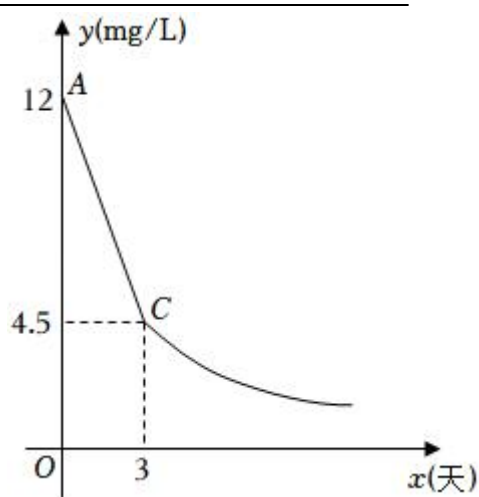
(2) 解:  $\because E$  是  $BC$  的中点, 且  $OA = OB$ ,  
 $\therefore OE$  是  $\triangle ABC$  的中位线,  $AC = 2OE$ ,  
 $\therefore OE = 6\text{cm}$ ,  
 $\therefore AC = 12\text{cm}$ ,  
 $\therefore AB$  是  $\odot O$  的直径,  
 $\therefore \angle ACB = 90^\circ = \angle ADC$ ,  
又  $\angle DAC = \angle CAB$ ,  
 $\therefore \triangle DAC \sim \triangle CAB$ ,  
 $\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ , 即  $\frac{AD}{12} = \frac{12}{20}$ ,  
 $\therefore AD = \frac{36}{5}$ .

**【点评】** 本题考查圆的切线及圆中的计算, 涉及圆周角定理、相似三角形的判定及性质等知识, 解题的关键是熟练应用圆的相关性质, 转化圆中的角和线段.

22. (10 分) 为加强生态文明建设, 某市环保局对一企业排污情况进行检测, 结果显示: 所排污水中硫化物的浓度超标, 即硫化物的浓度超过最高允许的  $1.0\text{mg/L}$ . 环保局要求该企业立即整改, 在 15 天内 (含 15 天) 排污达标. 整改过程中, 所排污水中硫化物的浓度  $y$  ( $\text{mg/L}$ ) 与时间  $x$  (天) 的变化规律如图所示, 其中线段  $AC$  表示前 3 天的变化规律, 第 3 天时硫化物的浓度降为  $4.5\text{mg/L}$ . 从第 3 天起, 所排污水中硫化物的浓度  $y$  与时间  $x$  满足下面表格中的关系:

|                                 |     |     |      |     |       |
|---------------------------------|-----|-----|------|-----|-------|
| 时间 $x$ (天)                      | 3   | 5   | 6    | 9   | ..... |
| 硫化物的浓度<br>$y$ ( $\text{mg/L}$ ) | 4.5 | 2.7 | 2.25 | 1.5 | ..... |

- (1) 在整改过程中, 当  $0 \leq x < 3$  时, 硫化物的浓度  $y$  与时间  $x$  的函数表达式;
- (2) 在整改过程中, 当  $x \geq 3$  时, 硫化物的浓度  $y$  与时间  $x$  的函数表达式;
- (3) 该企业所排污水中硫化物的浓度能否在 15 天以内不超过最高允许的  $1.0\text{mg/L}$ ? 为什么?



- 【分析】(1) 设  $AC$  的函数关系式为:  $y = kx + b$ , 将  $A$  和  $C$  代入, 从而求得  $k, b$ , 进而求得的结果;  
 (2) 可推出  $x \cdot y = 13.5$  为定值, 所以当  $x \geq 3$  时,  $y$  是  $x$  的反比例函数, 进而求得结果;  
 (3) 将  $x = 15$  代入反比例函数关系式, 从而求得  $y$  的值, 进而根据反比例函数图象性质, 从而得出结论.

【解答】解: (1) 设线段  $AC$  的函数表达式为:  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} b = 12 \\ 3k + b = 4.5 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = 12 \\ k = -2.5 \end{cases},$$

$\therefore$  线段  $AC$  的函数表达式为:  $y = -2.5x + 12$  ( $0 \leq x < 3$ );

$$(2) \because 3 \times 4.5 = 5 \times 2.7 = \dots = 13.5,$$

$\therefore y$  是  $x$  的反比例函数,

$$\therefore y = \frac{13.5}{x} \quad (x \geq 3);$$

$$(3) \text{ 当 } x = 15 \text{ 时, } y = \frac{13.5}{15} = 0.9,$$

$$\because 13.5 > 0,$$

$\therefore y$  随  $x$  的增大而减小,

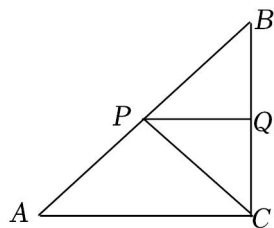
$\therefore$  该企业所排污水中硫化物的浓度可以在 15 天以内不超过最高允许的  $1.0 \text{ mg/L}$ .

【点评】本题考查了求一次函数关系式, 反比例函数及其图象的性质等知识, 解决问题的关键是熟练掌握反比例函数及其图象性质.

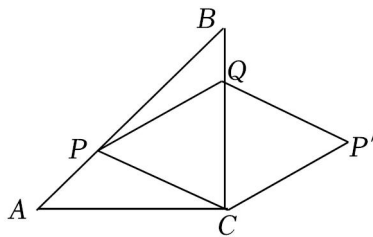
23. (12 分) 已知  $\triangle ABC$  中,  $\angle ACB = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 4 \text{ cm}$ , 点  $P$  从点  $A$  出发, 沿  $AB$  方向以每秒  $\sqrt{2} \text{ cm}$  的速度向终点  $B$  运动, 同时动点  $Q$  从点  $B$  出发沿  $BC$  方向以每秒  $1 \text{ cm}$  的速度向终点  $C$  运动, 设运动的时间为  $t$  秒.

(1) 如图①, 若  $PQ \perp BC$ , 求  $t$  的值;

(2) 如图②, 将  $\triangle PQC$  沿  $BC$  翻折至  $\triangle P'QC$ , 当  $t$  为何值时, 四边形  $QPCP'$  为菱形?



图①



图②

**【分析】** (1) 根据勾股定理求出  $AB$ ，根据相似三角形的性质列出比例式，计算即可。

(2) 作  $PD \perp BC$  于  $D$ ， $PE \perp AC$  于  $E$ ， $AP = \sqrt{2}t \text{ cm}$ ， $BQ = t \text{ cm}$  ( $0 \leq t < 4$ )，由  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形，可得  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ ，则可判断  $\triangle APE$  和  $\triangle PBD$  为等腰直角三角形，得出  $PE = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AP = t \text{ cm}$ ， $BD = PD$ ，则  $CE = AC - AE = (4 - t) \text{ cm}$ ，由矩形和菱形性质及勾股定理，即可求得答案。

**【解答】** 解：(1) 如图①， $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4 \text{ cm}$ ，

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2} \text{ (cm)},$$

由题意得， $AP = \sqrt{2}t \text{ cm}$ ， $BQ = t \text{ cm}$ ，

则  $BP = (4\sqrt{2} - \sqrt{2}t) \text{ cm}$ ，

$\because PQ \perp BC$ ，

$\therefore \angle PQB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle PQB = \angle ACB$ ，

$\therefore PQ \parallel AC$ ，

$$\therefore \frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC},$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{2}t}{4\sqrt{2}} = \frac{t}{4},$$

解得： $t = 2$ ，

$\therefore$  当  $t = 2$  时， $PQ \perp BC$ 。

(2) 作  $PD \perp BC$  于  $D$ ， $PE \perp AC$  于  $E$ ，如图②，

$$AP = \sqrt{2}t \text{ cm}, BQ = t \text{ cm} \quad (0 \leq t < 4),$$

$\because \angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC = 4 \text{ cm}$ ，

$\therefore \triangle ABC$  为等腰直角三角形，

$\therefore \angle A = \angle B = 45^\circ$ ，

$\therefore \triangle APE$  和  $\triangle PBD$  为等腰直角三角形，

$$\therefore PE = AE = \frac{\sqrt{2}}{2}AP = t \text{ cm}, \quad BD = PD,$$

$$\therefore CE = AC - AE = (4 - t) \text{ cm},$$

$\therefore$  四边形  $PECD$  为矩形,

$$\therefore PD = EC = (4 - t) \text{ cm},$$

$$\therefore BD = (4 - t) \text{ cm},$$

$$\therefore QD = BD - BQ = (4 - 2t) \text{ cm},$$

$$\text{在 Rt}\triangle PCE \text{ 中, } PC^2 = PE^2 + CE^2 = t^2 + (4 - t)^2,$$

$$\text{在 Rt}\triangle PDQ \text{ 中, } PQ^2 = PD^2 + DQ^2 = (4 - t)^2 + (4 - 2t)^2,$$

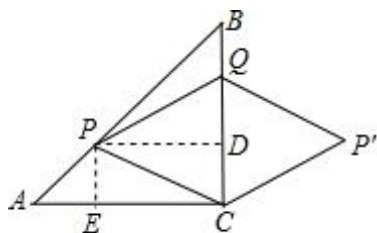
$\therefore$  四边形  $QPCP'$  为菱形,

$$\therefore PQ = PC,$$

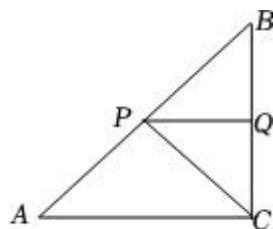
$$\therefore t^2 + (4 - t)^2 = (4 - t)^2 + (4 - 2t)^2,$$

$$\therefore t_1 = \frac{4}{3}, \quad t_2 = 4 \text{ (舍去)}.$$

$\therefore$  当  $t$  的值为  $\frac{4}{3}$  时, 四边形  $QPCP'$  为菱形.



图②



图①

**【点评】** 此题是相似形综合题, 主要考查的是菱形的性质、等腰直角三角形的性质, 线段垂直平分线的性质, 用方程的思想解决问题是解本题的关键.

24. (12 分) 如图①, 已知抛物线  $L: y = x^2 + bx + c$  的图象经过点  $A(0, 3)$ ,  $B(1, 0)$ , 过点  $A$  作  $AC \parallel x$  轴交抛物线于点  $C$ ,  $\angle AOB$  的平分线交线段  $AC$  于点  $E$ , 点  $P$  是抛物线上的一个动点.

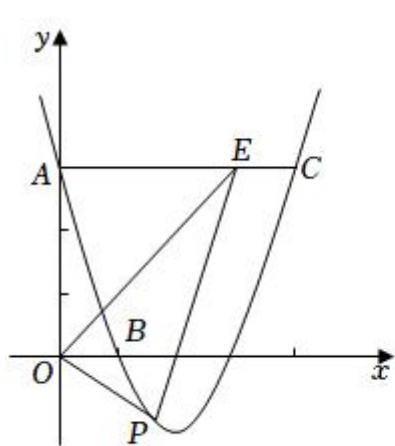
(1) 求抛物线的关系式;

(2) 若动点  $P$  在直线  $OE$  下方的抛物线上, 连结  $PE$ 、 $PO$ , 当  $\triangle OPE$  面积最大时, 求出  $P$  点坐标;

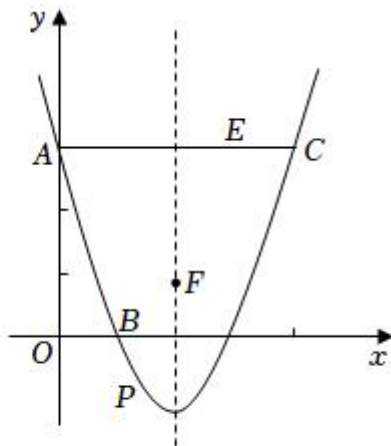
(3) 将抛物线  $L$  向上平移  $h$  个单位长度, 使平移后所得抛物线的顶点落在  $\triangle OAE$  内 (包括  $\triangle OAE$  的边界), 求  $h$  的取值范围;

(4) 如图②,  $F$  是抛物线的对称轴  $l$  上的一点, 在抛物线上是否存在点  $P$ , 使  $\triangle POF$  成为以点  $P$  为直角

顶点的等腰直角三角形? 若存在, 直接写出所有符合条件的点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.



15



**【分析】** (1) 利用待定系数法可得抛物线的解析式;

(2) 过  $P$  作  $PG \parallel y$  轴, 交  $OE$  于点  $G$ , 设  $P(m, m^2 - 4m + 3)$ , 根据  $OE$  的解析式表示点  $G$  的坐标, 表示  $PG$  的长, 根据面积和可得  $\triangle OPE$  的面积, 利用二次函数的最值可得其最大值;

(3) 求出原抛物线的对称轴和顶点坐标以及对称轴与  $OE$  的交点坐标、与  $AE$  的交点坐标, 用含  $h$  的代数式表示平移后的抛物线的顶点坐标, 列出不等式组求出  $h$  的取值范围;

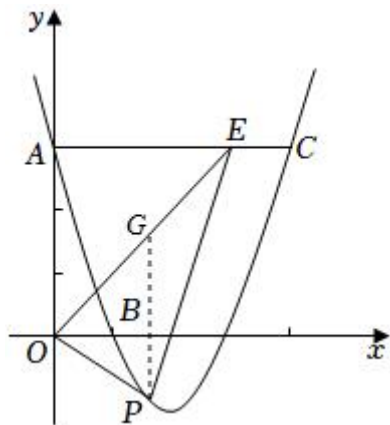
(4) 存在四种情况: 作辅助线, 构建全等三角形, 证明  $\triangle OMP \cong \triangle PNF$ , 根据  $OM = PM$ , 列方程可得点  $P$  的坐标; 同理可得其他图形中点  $P$  的坐标.

**【解答】**解: (1)  $\because$  抛物线  $L: y=x^2+bx+c$  的图象经过点  $A(0, 3)$ ,  $B(1, 0)$ ,

$$\therefore \begin{cases} 1+b+c=0 \\ c=3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} b=-4 \\ c=3 \end{cases},$$

∴ 抛物线的解析式为:  $y = x^2 - 4x + 3$ ;

(2) 如图, 过  $P$  作  $PG \parallel y$  轴, 交  $OE$  于点  $G$ ,



设  $P(m, m^2 - 4m + 3)$ ,

---

$\therefore OE$  平分  $\angle AOB$ ,  $\angle AOB = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle AOE = 45^\circ$ ,

$\therefore \triangle AOE$  是等腰直角三角形,

$\therefore AE = OA = 3$ ,

$\therefore E(3, 3)$ ,

$\therefore$  直线  $OE$  的解析式为:  $y = x$ ,

$\therefore G(m, m)$ ,

$\therefore PG = m - (m^2 - 4m + 3) = -m^2 + 5m - 3$ ,

$\therefore S_{\triangle OPE} = S_{\triangle OPG} + S_{\triangle EPG}$

$$= \frac{1}{2} PG \cdot AE$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times (-m^2 + 5m - 3)$$

$$= -\frac{3}{2} (m^2 - 5m + 3)$$

$$= -\frac{3}{2} \left(m - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{39}{8},$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < 0,$$

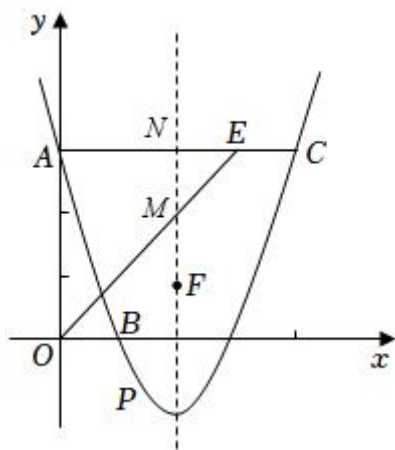
$\therefore$  当  $m = \frac{5}{2}$  时,  $\triangle OPE$  面积最大,

此时,  $P$  点坐标为  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ ;

(3) 由  $y = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ , 得抛物线  $L$  的对称轴为直线  $x = 2$ , 顶点为  $(2, -1)$ ,

抛物线  $L$  向上平移  $h$  个单位长度后顶点为  $F(2, -1 + h)$ .

设直线  $x = 2$  交  $OE$  于点  $M$ , 交  $AE$  于点  $N$ , 则  $E(2, 3)$ ,



$\therefore$  直线  $OE$  的解析式为:  $y = x$ ,

$$\therefore M(2, 2),$$

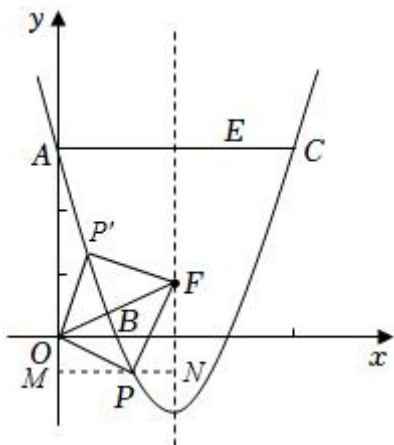
$\therefore$  点  $F$  在  $\triangle OAE$  内 (包括  $\triangle OAE$  的边界),

$$\therefore 2 \leq -1+h \leq 3,$$

解得  $3 \leq h \leq 4$ ;

(4) 设  $P(m, m^2 - 4m + 3)$ , 分四种情况:

① 当  $P$  在对称轴的左边, 且在  $x$  轴下方时, 如图, 过  $P$  作  $MN \perp y$  轴, 交  $y$  轴于  $M$ , 交  $l$  于  $N$ ,



$$\therefore \angle OMP = \angle PNF = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle OPF$  是等腰直角三角形,

$$\therefore OP = PF, \angle OPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPM + \angle NPF = \angle PFN + \angle NPF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OPM = \angle PFN,$$

$$\therefore \triangle OMP \cong \triangle PNF \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OM = PN,$$

$$\therefore P(m, m^2 - 4m + 3),$$

$$\text{则 } -m^2 + 4m - 3 = 2 - m,$$

$$\text{解得: } m = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ (舍) 或 } \frac{5-\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } \left( \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right);$$

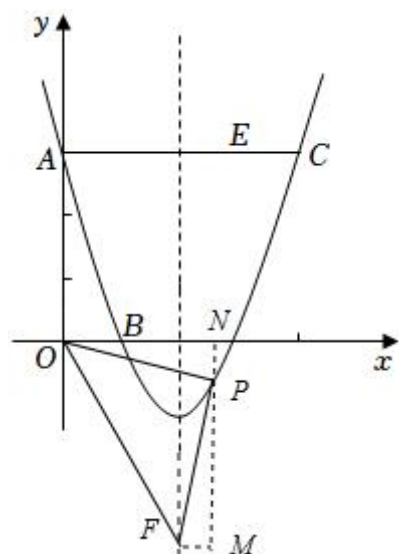
② 当  $P$  在对称轴的左边, 且在  $x$  轴上方时,

$$\text{同理得: } 2 - m = m^2 - 4m + 3,$$

$$\text{解得: } m_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \text{ (舍) 或 } m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2},$$

$$\therefore P \text{ 的坐标为 } \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2} \right);$$

③当  $P$  在对称轴的右边，且在  $x$  轴下方时，



如图，过  $P$  作  $MN \perp x$  轴于  $N$ ，过  $F$  作  $FM \perp MN$  于  $M$ ，

同理得  $\triangle ONP \cong \triangle PMF$ ，

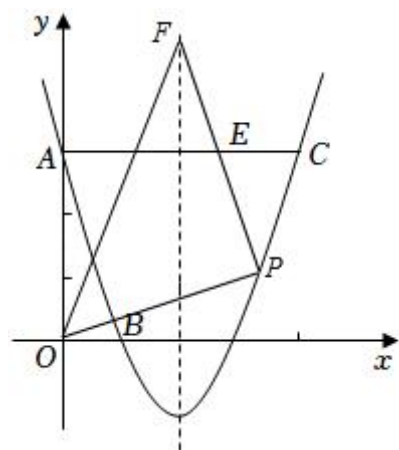
$\therefore PN = FM$ ，

则  $-m^2 + 4m - 3 = m - 2$ ，

解得：  $m = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$  或  $m_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$  (舍)；

$P$  的坐标为  $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ ；

④当  $P$  在对称轴的右边，且在  $x$  轴上方时，如图，



同理得  $m^2 - 4m + 3 = m - 2$ ，

解得：  $m = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$  或  $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$  (舍)，

$P$  的坐标为：  $(\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$ ；

综上所述，点  $P$  的坐标是：  $(\frac{5-\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$  或  $(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2})$  或  $(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$  或  $(\frac{5+\sqrt{5}}{2},$

---

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2}).$$

【点评】本题属于二次函数综合题，主要考查了二次函数的综合应用，二次函数的图象与性质及图形的平移，全等三角形的判定与性质以及解一元二次方程的方法，运用分类讨论思想和方程的思想解决问题的关键.

---

---