

二〇二〇年东营市初中学业水平考试数学试题

第 I 卷 (选择题 共 30 分)

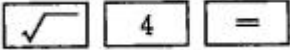
一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. -6 的倒数是()．

- A. 6 B. $\frac{1}{6}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. -6

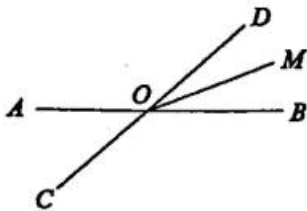
2. 下列运算正确的是()

- A. $(x^3)^2 = x^5$ B. $(x-y)^2 = x^2 + y^2$
C. $-x^2y^3 \cdot 2xy^2 = -2x^3y^5$ D. $-(3x+y) = -3x+y$

3. 利用科学计算器求值时，小明的按键顺序为 ，则计算器面板显示的结果为()

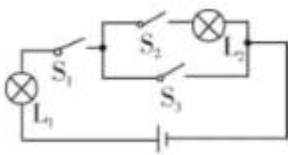
- A. -2 B. 2 C. ± 2 D. 4

4. 如图，直线 AB 、 CD 相交于点 O ，射线 OM 平分 $\angle BOD$ ，若 $\angle AOC = 42^\circ$ ，则 $\angle AOM$ 等于()



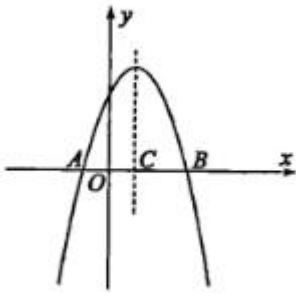
- A. 159° B. 161° C. 169° D. 138°

5. 如图，随机闭合开关 S_1 、 S_2 、 S_3 中的两个，则能让两盏灯泡同时发光的概率为()



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

6. 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于 A 、 B 两点，其对称轴与 x 轴交于点 C ，其中 A 、 C 两点的横坐标分别为 -1 和 1，下列说法错误的是()



A. $abc < 0$

B. $4a + c = 0$

C. $16a + 4b + c < 0$

D. 当 $x > 2$ 时, y 随 x 的增大而减小

7. 用一个半径为 3, 面积为 3π 的扇形铁皮, 制作一个无底的圆锥(不计损耗), 则圆锥的底面半径为()

A. π

B. 2π

C. 2

D. 1

8. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一段记载: “三百七十八里关, 初健步不为难, 次日脚痛减一半, 六朝才得到其关” 其大意是: 有人要去某关口, 路程 378 里, 第一天健步行走, 从第二天起, 由于脚痛, 每天走的路程都为前一天的一半, 一共走了六天才到达目的地. 则此人第三天走的路程为()

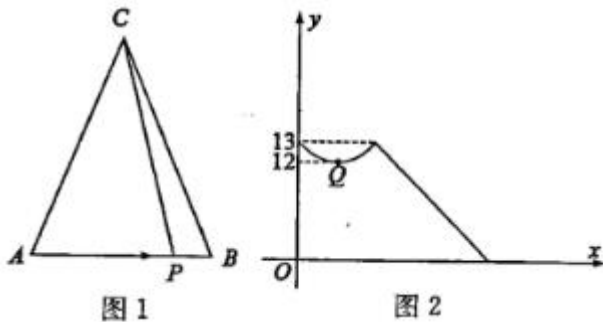
A. 96 里

B. 48 里

C. 24 里

D. 12 里

9. 如图 1, 点 P 从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发, 沿 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 匀速运动到点 C , 图 2 是点 P 运动时线段 CP 的长度 y 随时间 x 变化的关系图象, 其中点 Q 为曲线部分的最低点, 则 $\triangle ABC$ 的边 AB 的长度为()



A. 12

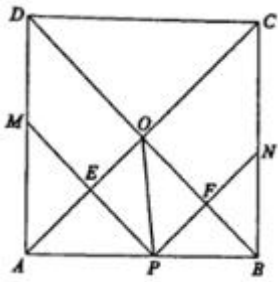
B. 8

C. 10

D. 13

10. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 P 是 AB 上一动点(不与 A, B 重合), 对角线 AC, BD 相交于点 O , 过点 P 分别作 AC, BD 的垂线, 分别交 AC, BD 于点 E, F , 交 AD, BC 于点 M, N . 下列结论:

① $\triangle APE \cong \triangle AME$; ② $PM + PN = AC$; ③ $PE^2 + PF^2 = PO^2$; ④ $\triangle POF \sim \triangle BNF$; ⑤ 点 O 在 M, N 两点的连线上. 其中正确的是()



A. ①②③④

B. ①②③⑤

C. ①②③④⑤

D. ③④⑤

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

二、填空题：本大题共 8 小题，其中 11-14 题每小题 3 分，15-18 题每小题 4 分，共 28 分只要求填写最后结果.

11.2020 年 6 月 23 日 9 时 43 分，“北斗三号”最后一颗全球组网卫星发射成功，它的授时精度小于 0.00000002 秒，则 0.00000002 用科学记数法表示为_____.

12.因式分解： $12a^2 - 3b^2 =$ _____.

13. 某校女子排球队队员的年龄分布如下表：

年龄	13	14	15
人数	4	7	4

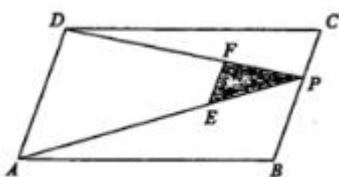
则该校女子排球队队员的平均年龄是_____岁.

14.已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$ 两点，则 k _____0(填“>”或“<”)

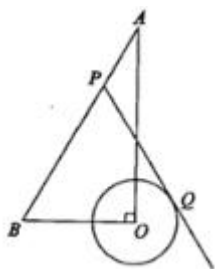
15.如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有实数根，那么 m 的取值范围是_____.

16.如图， P 为平行四边形 $ABCD$ 边 BC 上一点， E 、 F 分别为 PA 、 PD 上的点，且

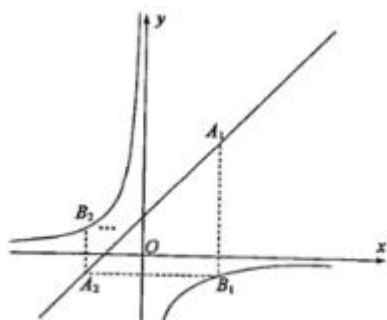
$PA = 3PE$, $PD = 3PF$, $\triangle PEF$, $\triangle PDC$, $\triangle PAB$ 的面积分别记为 S 、 S_1 , S_2 . 若 $S = 2$, 则 $S_1 + S_2 =$ _____.



17.如图, 在 $Rt\triangle AOB$ 中, $OB = 2\sqrt{3}$, $\angle A = 30^\circ$, O 的半径为1, 点 P 是 AB 边上的动点, 过点 P 作 $\odot O$ 的一条切线 PQ (其中点 Q 为切点), 则线段 PQ 长度的最小值为_____.



18.如图, 在平面直角坐标系中, 已知直线 $y = x + 1$ 和双曲线 $y = -\frac{1}{x}$, 在直线上取一点, 记为 A_1 , 过 A_1 作 x 轴的垂线交双曲线于点 B_1 , 过 B_1 作 y 轴的垂线交直线于点 A_2 , 过 A_2 作 x 轴的垂线交双曲线于点 B_2 , 过 B_2 作 y 轴的垂线交直线于点 A_3 , $\dots$, 依次进行下去, 记点 A_n 的横坐标为 a_n , 若 $a_1 = 2$, 则 $a_{2020} =$ _____.

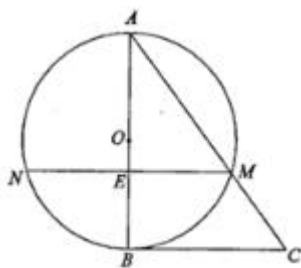


三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 62 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

19.(1)计算: $\sqrt{27} + (2\cos 60^\circ)^{2020} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |3 + 2\sqrt{3}|$;

(2)先化简, 再求值: $\left(x - \frac{2xy - y^2}{x}\right) \div \frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}$, 其中 $x = \sqrt{2} + 1, y = \sqrt{2}$.

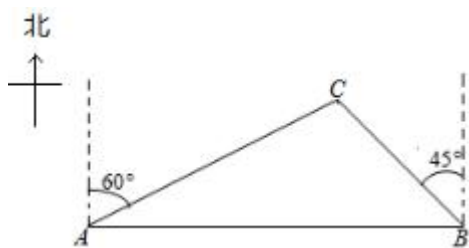
20.如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 M , 弦 $MN \parallel BC$ 交 AB 于点 E , 且 $ME = 3, AE = 4, AM = 5$.



(1)求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2)求 $\odot O$ 的直径 AB 的长度.

21.如图， C 处是一钻井平台，位于东营港口 A 的北偏东 60° 方向上，与港口 A 相距 $60\sqrt{2}$ 海里，一艘摩托车从 A 出发，自西向东航行至 B 时，改变航向以每小时50海里的速度沿 BC 方向行进，此时 C 位于 B 的北偏西 45° 方向，则从 B 到达 C 需要多少小时？



22.东营市某中学对2020年4月份线上教学学生的作业情况进行了一次抽样调查，根据收集的数据绘制了下面不完整的统计图表.

作业情况	频数	频率
非常好		0.22
较好	68	
一般		
不好	40	



请根据图表中提供的信息，解答下列问题：

- (1)本次抽样共调查了多少名学生？
- (2)将统计表中所缺的数据填在表中横线上；
- (3)若该中学有1800名学生，估计该校学生作业情况“非常好”和“较好”的学生一共约多少名？
- (4)某学习小组4名学生的作业本中，有2本“非常好”（记为 A_1 、 A_2 ），1本“较好”（记为 B ），1本“一般”（记为 C ），这些作业本封面无姓名，而且形状、大小、颜色等外表特征完全相同，从中抽取一本，不放

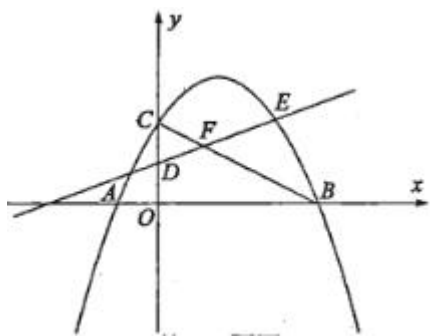
回，从余下的3本中再抽取一本，请用“列表法”或“画树状图”的方法求出两次抽到的作业本都是“非常好”的概率.

23.2020年初，新冠肺炎疫情爆发，市场上防疫口罩热销，某医药公司每月生产甲、乙两种型号的防疫口罩共20万只，且所有口罩当月全部售出，其中成本、售价如下表：

型号 价格(元/只) 项目	甲	乙
成本	12	4
售价	18	6

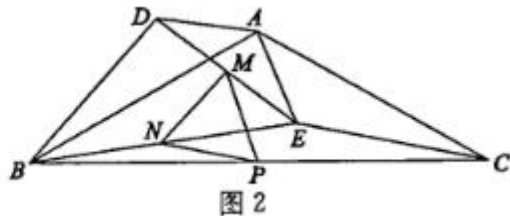
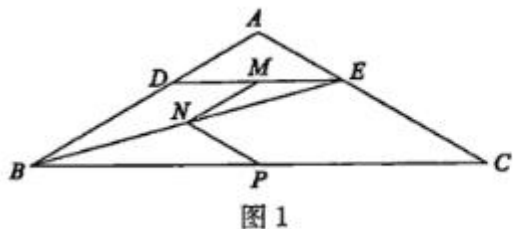
- (1)若该公司三月份的销售收入为300万元，求生产甲、乙两种型号的防疫口罩分别是多少万只？
 (2)如果公司四月份投入成本不超过216万元，应怎样安排甲、乙两种型号防疫口罩的产量，可使该月公司所获利润最大？并求出最大利润.

24.如图，抛物线 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ 的图象经过点 $C(0, 2)$ ，交 x 轴于点 A, B (点 A 在点 B 左侧)，连接 BC ，直线 $y = kx + 1 (k > 0)$ 与 y 轴交于点 D ，与 BC 上方的抛物线交于点 E ，与 BC 交于点 F .



- (1)求抛物线的解析式及点 A, B 的坐标；
 (2) $\frac{EF}{DF}$ 是否存在最大值？若存在，请求出其最大值及此时点 E 的坐标；若不存在，请说明理由.

25.如图1，在等腰三角形 ABC 中， $\angle A = 120^\circ$ ， $AB = AC$ ，点 D, E 分别在边 AB, AC 上， $AD = AE$ ，连接 BE ，点 M, N, P 分别为 DE, BE, BC 的中点.



(1)观察猜想

图 1 中，线段 NM 、 NP 的数量关系是____， $\angle MNP$ 的大小为____；

(2)探究证明

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针方向旋转到如图 2 所示的位置，连接 MP 、 BD 、 CE ，判断 $\triangle MNP$ 的形状，并说明理由；

(3)拓展延伸

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 在平面内自由旋转，若 $AD = 1$ ， $AB = 3$ ，请求出 $\triangle MNP$ 面积的最大值.

二〇二〇年东营市初中学业水平考试数学试题

第 I 卷 (选择题 共 30 分)

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. -6 的倒数是().

- A. 6 B. $\frac{1}{6}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. -6

【答案】 C

【解析】

【分析】

两数之积等于 1 的数被叫做倒数.

【详解】解： $-6 \times (-\frac{1}{6}) = 1$

故选 C.

2. 下列运算正确的是()

- A. $(x^3)^2 = x^5$ B. $(x-y)^2 = x^2 + y^2$
C. $-x^2y^3 \cdot 2xy^2 = -2x^3y^5$ D. $-(3x+y) = -3x+y$

【答案】 C

【解析】

【分析】

根据幂的乘方，完全平方，同底数幂的乘法法则逐一判断即可.

【详解】A: $(x^3)^2 = x^6$ ，故此选项错误

B: $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ ，故此选项错误

C: $-x^2y^3 \cdot 2xy^2 = -2x^3y^5$ ，故此选项正确

D: $-(3x+y) = -3x - y$ ，故此选项错误

答案故选 C

【点睛】 本题主要考查了幂的乘方，整式的乘法和完全平方的运算，熟记运算法则是解题的关键.

3. 利用科学计算器求值时，小明的按键顺序为   ，则计算器面板显示的结果为()

A. -2

B. 2

C. ± 2

D. 4

【答案】B

【解析】

【分析】

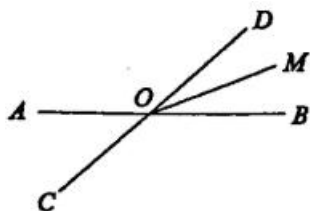
根据算术平方根的求解方法进行计算即可得解.

【详解】4 的算术平方根 $\sqrt{4} = 2$,

故选: B.

【点睛】本题主要考查了算术平方根的求解方法, 考生需要将其与平方根进行对比掌握.

4.如图, 直线 AB 、 CD 相交于点 O , 射线 OM 平分 $\angle BOD$, 若 $\angle AOC = 42^\circ$, 则 $\angle AOM$ 等于()



A. 159°

B. 161

C. 169

D. 138°

【答案】A

【解析】

【分析】

先求出 $\angle AOD = 180^\circ - \angle AOC$, 再求出 $\angle BOD = 180^\circ - \angle AOD$, 最后根据角平分线平分角即可求解.

【详解】解: 由题意可知: $\angle AOD = 180^\circ - \angle AOC = 180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$,

$\therefore \angle BOD = 180^\circ - \angle AOD = 42^\circ$,

又 OM 是 $\angle BOD$ 的角平分线,

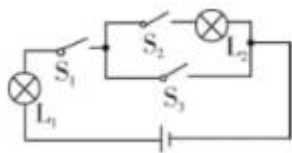
$\therefore \angle DOM = \frac{1}{2} \angle BOD = 21^\circ$,

$\therefore \angle AOM = \angle DOM + \angle AOD = 21^\circ + 138^\circ = 159^\circ$.

故选: A.

【点睛】本题考查了角平分线的性质及平角的定义, 熟练掌握角平分线的性质和平角的定义是解决此类题的关键.

5.如图, 随机闭合开关 S_1 , S_2 , S_3 中的两个, 则能让两盏灯泡同时发光的概率为()



- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

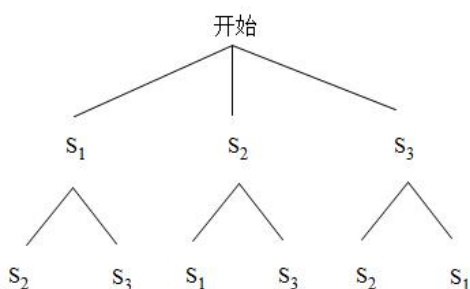
【答案】C

【解析】

【分析】

画出树状图，找出所有等可能的结果，计算即可.

【详解】根据题意画出树状图如下：

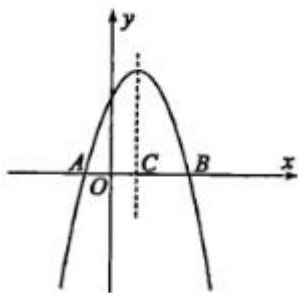


共有 6 种等可能的结果，能让两盏灯泡同时发光的有 2 种情况，

$\therefore P_{\text{(两盏灯泡同时发光)}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ，故选 C.

【点睛】本题考查了列表法与树状图法，正确的画出树状图是解决此题的关键.

6.如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 的图象与 x 轴交于 A, B 两点，其对称轴与 x 轴交于点 C ，其中 A, C 两点的横坐标分别为 -1 和 1 ，下列说法错误的是()



- A. $abc < 0$ B. $4a + c = 0$
C. $16a + 4b + c < 0$ D. 当 $x > 2$ 时， y 随 x 的增大而减小

【答案】B

【解析】

【分析】

根据开口方向、对称轴、与 y 轴交点即可分别判断 a 、 b 、 c 符号，进而判断A选项；由 A, C 两点的横坐标分别为 -1 和 1 ，可得两个方程，判断B选项；由当 $x=4$ 时 $y=16a+4b+c<0$ 判断C选项；由二次函数对称轴及增减性判断D选项.

【详解】 $\because$ 开口向下，与 y 轴交点在正半轴

$$\therefore a < 0, c > 0$$

$\because A, C$ 两点的横坐标分别为 -1 和 1 ,

$$\therefore a - b + c = 0, -\frac{b}{2a} = 1$$

$$\therefore b = -2a > 0, a - (-2a) + c = 0$$

$$\therefore 3a + c = 0, abc < 0, \text{ 故 A 选项正确, B 选项错误}$$

$\because A, C$ 两点的横坐标分别为 -1 和 1 ,

$$\therefore B \text{ 点横坐标为 } 3$$

$$\therefore \text{当 } x = 4 \text{ 时 } y = 16a + 4b + c < 0, \text{ 故 C 选项正确}$$

$\because$ 当 $x > 1$ 时， y 随 x 的增大而减小

$$\therefore \text{当 } x > 2 \text{ 时, } y \text{ 随 } x \text{ 的增大而减小, 故 D 选项正确}$$

故选: B.

【点睛】本题考查二次函数的图像和性质，重点考查二次函数系数符号与图象的关系，熟记二次函数图象性质是解题的关键.

7. 用一个半径为3, 面积为 3π 的扇形铁皮, 制作一个无底的圆锥(不计损耗), 则圆锥的底面半径为()

A. π

B. 2π

C. 2

D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】

根据圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长和扇形面积公式得到 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r \cdot 3 = 3\pi$ ，然后解方程即可.

【详解】解：根据题意得 $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot r \cdot 3 = 3\pi$,

解得 $r=1$.

故选: D.

【点睛】 本题考查了圆锥的计算: 圆锥的侧面展开图为一扇形, 这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长.

8. 中国古代数学著作《算法统宗》中有这样一段记载: “三百七十八里关, 初健步不为难, 次日脚痛减一半, 六朝才得到其关” 其大意是: 有人要去某关口, 路程 378 里, 第一天健步行走, 从第二天起, 由于脚痛, 每天走的路程都为前一天的一半, 一共走了六天才到达目的地. 则此人第三天走的路程为()

- A. 96 里 B. 48 里 C. 24 里 D. 12 里

【答案】 B

【解析】

【分析】

根据题意可设第一天所走的路程为 x , 用含 x 的式子分别把这六天的路程表示出来, 相加等于总路程 378, 解此方程即可.

【详解】 解: 设第一天的路程为 x 里

$$\therefore x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{x}{16} + \frac{x}{32} = 378$$

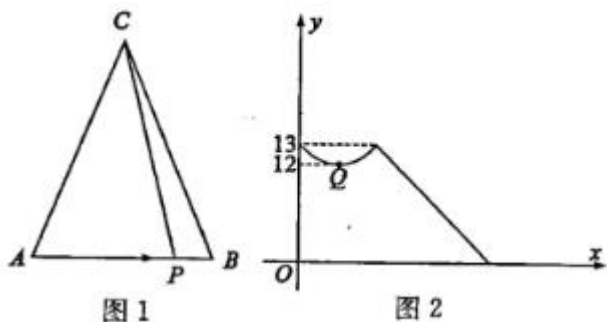
解得 $x=192$

$$\therefore \text{第三天的路程为 } \frac{x}{4} = \frac{192}{4} = 48$$

故答案选 B

【点睛】 本题主要考查了一元一次方程的应用, 通过每日路程之和等于总路程建立一元一次方程是解题的关键.

9. 如图 1, 点 P 从 $\triangle ABC$ 的顶点 A 出发, 沿 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 匀速运动到点 C , 图 2 是点 P 运动时线段 CP 的长度 y 随时间 x 变化的关系图象, 其中点 Q 为曲线部分的最低点, 则 $\triangle ABC$ 的边 AB 的长度为()



- A. 12 B. 8 C. 10 D. 13

【答案】C

【解析】

【分析】

根据图象可知点P沿 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 匀速运动到点C,此时AC最长,CP在AB边上先变小后变大,从而可求出AB上的高,从图象可以看出点P运动到点B时 $CP=CB=13$,可知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形,进而得出结论.

【详解】由图象可知:点P在A上时, $CP=AC=13$,

点P在AB上运动时,在图象上有最低点,即AB边上的高,为12,

点P与点B重合时,CP即BC最长,为13,

所以, $\triangle ABC$ 是等腰三角形,

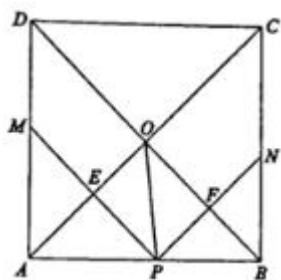
$$\therefore AB \text{ 的长} = 2 \times \sqrt{13^2 - 12^2} = 2 \times 5 = 10$$

故选:C

【点睛】本题考查动点问题的函数图象,解题的关键是注意结合图象求出BC与AC的长度.

10.如图,在正方形ABCD中,点P是AB上一动点(不与A、B重合),对角线AC、BD相交于点O,过点P分别作AC、BD的垂线,分别交AC、BD于点E、F,交AD、BC于点M、N.下列结论:

① $\triangle APE \cong \triangle AME$; ② $PM + PN = AC$; ③ $PE^2 + PF^2 = PO^2$; ④ $\triangle POF \sim \triangle BNF$; ⑤点O在M、N两点的连线上.其中正确的是()



A. ①②③④

B. ①②③⑤

C. ①②③④⑤

D. ③④⑤

【答案】B

【解析】

【分析】

①根据题意及正方形的性质,即可判断 $\triangle APE \cong \triangle AME$;

②根据 $\triangle APE \cong \triangle AME$ 及正方形的性质,得 $ME=EP=AE = \frac{1}{2} MP$,同理可证 $PF=NF = \frac{1}{2} NP$,根据题意可

证四边形 OEPF 为矩形, 则 $OE=PF$, 则 $OE+AE=PF+PE=NF+ME=AO$, $AO=\frac{1}{2}AC$, 故证明 $PM+PN=AC$;

③根据四边形 PEOF 为矩形的性质, 在直角三角形 OPF 中, 使用勾股定理, 即可判断;

④ $\triangle BNF$ 是等腰直角三角形, 而 P 点是动点, 无法保证 $\triangle POF$ 是等腰直角三角形, 故④可判断;

⑤连接 MO、NO, 证明 $OP=OM=ON$, 根据直角三角形斜边中线等于斜边一半, 即可证明.

【详解】 $\because$ 四边形 ABCD 正方形, AC、BD 为对角线,

$$\therefore \angle MAE = \angle EAP = 45^\circ,$$

根据题意 $MP \perp AC$, 故 $\angle AEP = \angle AEM = 90^\circ$, $\therefore \angle AME = \angle APE = 45^\circ$,

在三角形 APE 与 $\triangle AME$ 中,

$$\begin{cases} \angle AEP = \angle AEM \\ AE = AE \\ \angle EAP = \angle EAM \end{cases}$$

$$\therefore APE \cong AME \text{ ASA},$$

故①正确;

$$\therefore AE = ME = EP = \frac{1}{2} MP,$$

同理, 可证 $\triangle PBF \cong \triangle NBF$, $PF = FN = \frac{1}{2} NP$,

$\because$ 正方形 ABCD 中, $AC \perp BD$,

又 $\because PM \perp AC$, $PN \perp BD$,

$$\therefore \angle PEO = \angle EOF = \angle PFO = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 PEOF 为矩形,

$$\therefore PF = OE,$$

$$\therefore OE + AE = PF + PE = NF + ME = AO,$$

$$\text{又} \because ME = PE = \frac{1}{2} MP,$$

$$FP = FN = \frac{1}{2} NP, \quad OA = \frac{1}{2} AC,$$

$$\therefore PM + PN = AC,$$

故②正确;

$\because$ 四边形 PEOF 为矩形,

$$\therefore PE = OF,$$

在直角三角形 OPF 中, $OF^2 + PF^2 = PO^2$,

$$\therefore PE^2 + PF^2 = PO^2,$$

故③正确;

$\because \triangle BNF$ 是等腰直角三角形, 而 P 点是动点, 无法保证 $\triangle POF$ 是等腰直角三角形,

故④错误;

连接 MO 、 NO ,

在 $\triangle OEM$ 和 $\triangle OEP$ 中,

$$\begin{cases} OE = OE \\ \angle OEM = \angle OEP \\ EM = EP \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OEM \cong \triangle OEP, OM = OP,$$

同理可证 $\triangle OFP \cong \triangle OFN$, $OP = ON$,

$$\text{又} \because \angle MPN = 90^\circ,$$

$$OM = OP = ON, OP = \frac{1}{2}MN,$$

根据直角三角形斜边中线等于斜边一半, $OP = \frac{1}{2}MN$,

$$\therefore MO + NO = MN, \text{点 } O \text{ 在 } M、N \text{ 两点的连线上.}$$

故⑤正确.

故选择 B.

【点睛】 本题主要考查几何综合问题, 掌握正方形、矩形的判定和性质, 全等三角形的判定和性质, 勾股定理是解答本题的关键.

第 II 卷 (非选择题共 90 分)

二、填空题: 本大题共 8 小题, 其中 11-14 题每小题 3 分, 15-18 题每小题 4 分, 共 28 分只要求填写最后结果.

11. 2020 年 6 月 23 日 9 时 43 分, “北斗三号”最后一颗全球组网卫星发射成功, 它的授时精度小于 0.00000002 秒, 则 0.00000002 用科学记数法表示为_____.

【答案】 2×10^{-8}

【解析】

【分析】

根据科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定, 进而求解.

【详解】因为 $0.00000002 = 2 \times 10^{-8}$,

故答案为: 2×10^{-8} .

【点睛】本题考查了用科学记数法表示较小的数,一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq |a| < 10$, 正确确定 a 与 n 的值是解题的关键.

12.因式分解: $12a^2 - 3b^2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $3(2a+b)(2a-b)$

【解析】

【分析】

先提公因式, 再按照平方差公式分解即可.

【详解】解: $12a^2 - 3b^2 = 3(4a^2 - b^2) = 3(2a+b)(2a-b)$.

故答案为: $3(2a+b)(2a-b)$.

【点睛】本题考查的是提公因式与公式法分解因式, 掌握以上知识是解题的关键.

13. 某校女子排球队队员的年龄分布如下表:

年龄	13	14	15
人数	4	7	4

则该校女子排球队队员的平均年龄是 岁.

【答案】 14.

【解析】

【详解】平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数, 因此,

该校女子排球队队员的平均年龄是 $\frac{13 \times 4 + 14 \times 7 + 15 \times 4}{4 + 7 + 4} = \frac{210}{15} = 14$ (岁).

故答案为: 14.

14.已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$ 两点, 则 k 0 (填“>”或“<”)

【答案】 $<$.

【解析】

【分析】

根据 $A(1, -1)$, $B(-1, 3)$, 利用横坐标和纵坐标的增减性判断出 k 的符号.

【详解】 $\because$ A 点横坐标为 1 , B 点横坐标为 -1 ,

根据 $-1 < 1$, $3 > -1$,

可知, 随着横坐标的增大, 纵坐标减小了,

$\therefore k < 0$.

故答案为 $<$.

15. 如果关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有实数根, 那么 m 的取值范围是_____.

【答案】 $m \leq 9$

【解析】

【分析】

由一元二次方程根与系数的关键可得: $\Delta \geq 0$, 从而列不等式可得答案.

【详解】 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + m = 0$ 有实数根,

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac \geq 0$,

$\because a = 1, b = -6, c = m$,

$\therefore (-6)^2 - 4 \times 1 \times m \geq 0$,

$\therefore 4m \leq 36$,

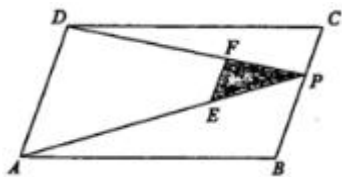
$\therefore m \leq 9$.

故答案为: $m \leq 9$.

【点睛】 本题考查的是一元二次方程根的判别式, 掌握一元二次方程根的判别式是解题的关键.

16. 如图, P 为平行四边形 $ABCD$ 边 BC 上一点, E 、 F 分别为 PA 、 PD 上的点, 且

$PA = 3PE$, $PD = 3PF$, $\triangle PEF$, $\triangle PDC$, $\triangle PAB$ 的面积分别记为 S 、 S_1 , S_2 . 若 $S = 2$, 则 $S_1 + S_2 =$ _____.



【答案】18

【解析】

【分析】

证明 $\triangle PEF \sim \triangle PAD$ ，再结合 $\triangle PEF$ 的面积为2可求出 $\triangle PAD$ 的面积，进而求出平行四边形 $ABCD$ 的面积，再用平行四边形 $ABCD$ 的面积减去 $\triangle PAD$ 的面积即可求解。

【详解】解： $\because PA = 3PE, PD = 3PF$,

$$\therefore \frac{PE}{PA} = \frac{PF}{PD} = \frac{1}{3}, \text{ 且 } \angle EPF = \angle APD,$$

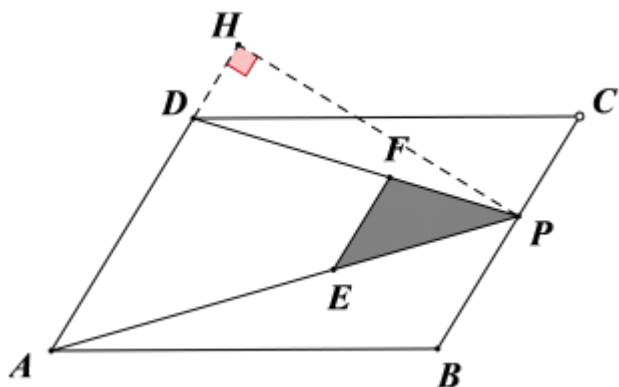
$$\therefore \triangle PEF \sim \triangle PAD,$$

根据相似三角形面积比等于相似比的平方，且 $\triangle PEF$ 的面积为2可知，

$$\frac{S_{\triangle PDA}}{S_{\triangle PFE}} = \left(\frac{PD}{PF}\right)^2 = 3^2 = 9,$$

$$\therefore S_{\triangle PDA} = 2 \times 9 = 18,$$

过 P 点作平行四边形 $ABCD$ 的底 AD 上的高 PH ,



$$\therefore S_{\triangle PDA} = \frac{1}{2} AD \times PH = 18,$$

$$\therefore AD \times PH = 36,$$

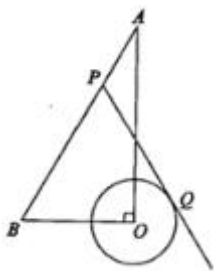
即平行四边形 $ABCD$ 的面积为36，

$$\therefore S_1 + S_2 = S_{\text{平行四边形}ABCD} - S_{\triangle PAD} = 36 - 18 = 18.$$

故答案为：18.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质，相似三角形的判定及性质等，熟练掌握其性质是解决本题的关键。

17.如图，在 $Rt\triangle AOB$ 中， $OB = 2\sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$ ， O 的半径为1，点 P 是 AB 边上的动点，过点 P 作 $\odot O$ 的一条切线 PQ （其中点 Q 为切点），则线段 PQ 长度的最小值为_____.



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】

【分析】

如图：连接 OP 、 OQ ，根据 $PQ^2 = OP^2 - OQ^2$ ，可得当 $OP \perp AB$ 时， PQ 最短；在 $Rt\triangle AOB$ 中运用含 30° 的直角三角形的性质和勾股定理求得 AB 、 AQ 的长，然后再运用等面积法求得 OP 的长，最后运用勾股定理解答即可。

【详解】解：如图：连接 OP 、 OQ ，

$\therefore PQ$ 是 $\odot O$ 的一条切线

$\therefore PQ \perp OQ$

$\therefore PQ^2 = OP^2 - OQ^2$

$\therefore$ 当 $OP \perp AB$ 时， PQ 最短

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $OB = 2\sqrt{3}$ ， $\angle A = 30^\circ$

$\therefore AB = 2OB = 4\sqrt{3}$ ， $AO = \cos \angle A \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3}$

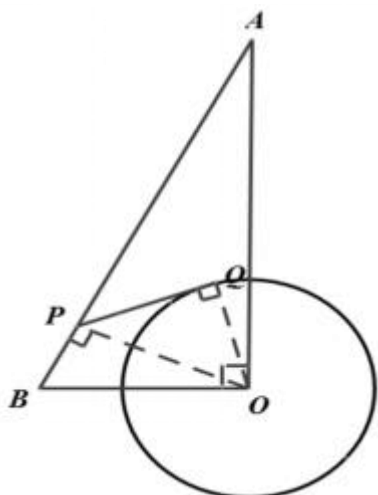
$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot OB = \frac{1}{2} PO \cdot AB$

$\therefore \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = \frac{1}{2} PO \cdot 4\sqrt{3}$ ，即 $OP = 3$

在 $Rt\triangle OPQ$ 中， $OP = 3$ ， $OQ = 1$

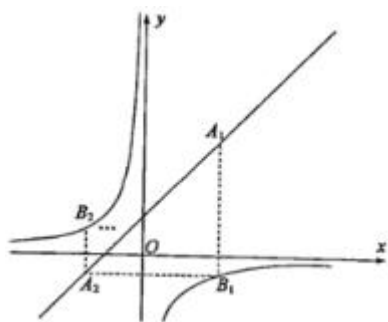
$\therefore PQ = \sqrt{OP^2 - OQ^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 。

故答案为 $2\sqrt{2}$ 。



【点睛】 本题考查了切线的性质、含 30° 直角三角形的性质、勾股定理等知识点，此正确作出辅助线、根据勾股定理确定当 $PO \perp AB$ 时、线段 PQ 最短是解答本题的关键.

18.如图，在平面直角坐标系中，已知直线 $y = x + 1$ 和双曲线 $y = -\frac{1}{x}$ ，在直线上取一点，记为 A_1 ，过 A_1 作 x 轴的垂线交双曲线于点 B_1 ，过 B_1 作 y 轴的垂线交直线于点 A_2 ，过 A_2 作 x 轴的垂线交双曲线于点 B_2 ，过 B_2 作 y 轴的垂线交直线于点 A_3 ，……，依次进行下去，记点 A_n 的横坐标为 a_n ，若 $a_1 = 2$ ，则 $a_{2020} =$ _____.



【答案】 2

【解析】

【分析】

根据反比例函数与一次函数图象上点的坐标特征分别求出 A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 、 A_3 、 B_3 ……，从而得到每 3 次变化为一个循环组依次循环，用 2020 除以 3，根据商的情况确定出 a_{2020} 即可

【详解】 解：当 $a_1 = 2$ 时， B_1 的横坐标与 A_1 的横坐标相等为 2， $A_1(2, 3)$ ， $B_1(2, -\frac{1}{2})$ ；

A_2 的纵坐标和 B_1 的纵坐标相同为 $-\frac{1}{2}$ ，代入 $y = x + 1$ ，得 $x = -\frac{3}{2}$ ，可得 $A_2(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ ；

B_2 的横坐标和 A_2 的横坐标相同为 $-\frac{3}{2}$ ，代入 $y = -\frac{1}{x}$ 得， $y = \frac{2}{3}$ ，得 $B_2(-\frac{3}{2}, \frac{2}{3})$ ；

A_3 的纵坐标和 B_2 的纵坐标相同为 $\frac{2}{3}$ ，代入 $y = x + 1$ ，得 $x = -\frac{1}{3}$ ，故 $A_3(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

B_3 的横坐标和 A_3 的横坐标相同为 $-\frac{1}{3}$, 代入 $y = -\frac{1}{x}$ 得, $y=3$, 得 $B_3(-\frac{1}{3}, 3)$

A_4 的纵坐标和 B_3 的纵坐标相同为 3, 代入 $y=x+1$, 得 $x=2$, 所以 $A_4(2, 3)$

...

由上可知, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, 3$ 个为一组依次循环,

$$\because 2020 \div 3 = 673 \dots 1,$$

$$\therefore a_{2020} = a_1 = 2,$$

故答案为: 2.

【点睛】 本题考查了一次函数图象上点的坐标特征, 反比例函数图象上点的坐标特征, 依次求出各点的坐标, 观察出每 3 次变化为一个循环组依次循环是解题的关键, 也是本题的难点.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 62 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

$$19.(1) \text{ 计算: } \sqrt{27} + (2\cos 60^\circ)^{2020} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |3 + 2\sqrt{3}|;$$

$$(2) \text{ 先化简, 再求值: } \left(x - \frac{2xy - y^2}{x}\right) \div \frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}, \text{ 其中 } x = \sqrt{2} + 1, y = \sqrt{2}.$$

$$\text{【答案】 (1) } \sqrt{3} - 6; (2) x - y, 1.$$

【解析】

【分析】

(1) 根据算术平方根、特殊角三角函数值、负整数指数幂的意义以及绝对值的意义进行计算即可;

(2) 先将括号内的进行通分, 再按同分母分式减法计算, 将除法转化为乘法, 把分子分母因式分解后进行约分得到最简结果, 再把 x, y 的值代入即可.

$$\text{【详解】 (1) } \sqrt{27} + (2\cos 60^\circ)^{2020} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - |3 + 2\sqrt{3}|$$

$$= 3\sqrt{3} + 1 - 4 - 3 - 2\sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3} - 6;$$

$$(2) \left(x - \frac{2xy - y^2}{x}\right) \div \frac{x^2 - y^2}{x^2 + xy}$$

$$= \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x} \cdot \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$$

$$= \frac{(x-y)^2}{x} \cdot \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= x - y.$$

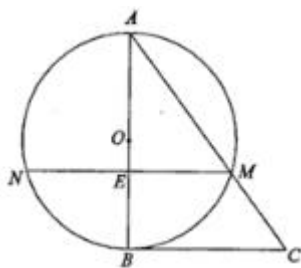
当 $x = \sqrt{2} + 1, y = \sqrt{2}$ 时,

$$\text{原式} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 1.$$

【点睛】 本题考查了实数的混合运算，分式的化简求值以及二次根式的加减法，解答此题的关键是熟练掌握运算法则.

20.如图，在 $\triangle ABC$ 中，以 AB 为直径的 $\odot O$ 交 AC 于点 M ，弦 $MN \parallel BC$ 交 AB 于点 E ，且

$$ME = 3, AE = 4, AM = 5.$$



(1)求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2)求 $\odot O$ 的直径 AB 的长度.

【答案】 (1)见解析; (2) $\odot O$ 的直径 AB 的长度为 $\frac{25}{4}$

【解析】

【分析】

(1)先用勾股定理的逆定理证明 $\triangle AEM$ 为直角三角形, 且 $\angle AEM = 90^\circ$, 再根据 $MN \parallel BC$ 即可证明 $\angle ABC = 90^\circ$ 进而求解;

(2)连接 BM , 由 AB 是直径得到 $\angle AMB = 90^\circ$, 再分别在 $\text{Rt}\triangle AMB$ 和 $\text{Rt}\triangle AEM$ 中使用 $\angle A$ 的余弦即可求解.

【详解】 解: (1) $\because ME = 3, AE = 4, AM = 5,$

$$\therefore AE^2 + ME^2 = AM^2,$$

$$\therefore \angle AEM = 90^\circ,$$

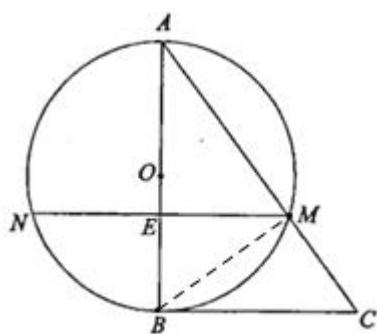
$$\because MN \parallel BC,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle AEM = 90^\circ,$$

$$\because AB \text{ 为 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore BC \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线}.$$

(2)如图，连接 BM ，



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle AMB = 90^\circ$,

又 $\because \angle AEM = 90^\circ$,

$$\therefore \cos \angle BAM = \frac{AM}{AB} = \frac{AE}{AM},$$

$$\text{即 } \frac{5}{AB} = \frac{4}{5},$$

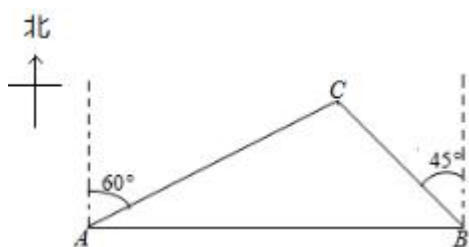
$$\therefore AB = \frac{25}{4},$$

$\therefore \odot O$ 的直径 AB 的长度为 $\frac{25}{4}$.

故答案为: $\frac{25}{4}$.

【点睛】 本题考查了圆中切线的证明，圆周角定理，直角三角形中锐角的三角函数的求法，熟练掌握切线的性质和判定及锐角三角函数的定义是解决此类题的关键.

21.如图， C 处是一钻井平台，位于东营港口 A 的北偏东 60° 方向上，与港口 A 相距 $60\sqrt{2}$ 海里，一艘摩托车从 A 出发，自西向东航行至 B 时，改变航向以每小时 50 海里的速度沿 BC 方向行进，此时 C 位于 B 的北偏西 45° 方向，则从 B 到达 C 需要多少小时？



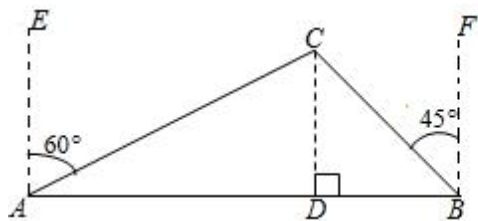
【答案】 从 B 到达 C 需要 1.2 小时.

【解析】

【分析】

过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，在 $Rt\triangle ACD$ 与 $Rt\triangle CDB$ 中，利用锐角三角函数的定义求出 CD 与 BC 的长，进而求解.

【详解】解：如图，过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，



由题意得： $AE \parallel CD$ ， $BF \parallel CD$ ，

$$\therefore \angle ACD = \angle CAE = 60^\circ, \quad \angle BCD = \angle CBF = 45^\circ,$$

在 $Rt\triangle ACD$ 中， $AC = 60\sqrt{2}$ (海里),

$$\therefore CD = \frac{1}{2} AC = 30\sqrt{2} \text{ (海里)},$$

在 $Rt\triangle CDB$ 中， $CD = 30\sqrt{2}$ (海里),

$$\therefore BC = \sqrt{2} CD = 60,$$

$$\therefore \frac{60}{50} = 1.2 \text{ (小时)},$$

$\therefore$ 从 B 到达 C 需要 1.2 小时.

【点睛】 本题考查解直角三角形的应用，平行线的性质，巧作辅助线构造直角三角形是解题的关键.

22. 东营市某中学对 2020 年 4 月份线上教学学生的作业情况进行了一次抽样调查，根据收集的数据绘制了下面不完整的统计图表.

作业情况	频数	频率
非常好		0.22
较好	68	
一般		
不好	40	



请根据图表中提供的信息，解答下列问题：

(1)本次抽样共调查了多少名学生？

(2)将统计表中所缺的数据填在表中横线上；

(3)若该中学有1800名学生，估计该校学生作业情况“非常好”和“较好”的学生一共约多少名？

(4)某学习小组4名学生的作业本中，有2本“非常好”（记为 A_1 、 A_2 ），1本“较好”（记为 B ），1本“一般”（记为 C ），这些作业本封面无姓名，而且形状、大小、颜色等外表特征完全相同，从中抽取一本，不放回，从余下的3本中再抽取一本，请用“列表法”或“画树状图”的方法求出两次抽到的作业本都是“非常好”的概率。

【答案】 (1) 200；(2)见解析；(3)约1008名；(4) $\frac{1}{6}$ 。

【解析】

【分析】

(1)用 72° 除 360° 得到“不好”的学生人数的占比，然后再用 40 除以该百分比即可得到总共调查的学生人数；

(2)先算出“非常好”的人数，然后再用总分数减去“非常好”、“较好”、“不好”的人数即得到“一般”的人数，最后分别用求出其人数除总人数得到其频率；

(3)先算出“非常好”和“较好”的学生的频率，再乘以 1800 即可求解；

(4)采用列表法将所有可能的情况列出，然后再用概率公式求解即可。

【详解】 解：(1)由图形可知： 72° 占 360° 的百分比为 $\frac{72}{360} = 20\%$ ，

故调查的总的学生人数为 $40 \div 20\% = 200$ (名)，

故答案为：200(名)。

(2)“非常好”的学生人数为： $0.22 \times 200 = 44$ (人)，

总人数减去“非常好”、“较好”、“不好”的人数即得到“一般”的人数，

故一般的人数为 $200 - 44 - 68 - 40 = 48$ ，其频率为 $48 \div 200 = 0.24$ ，

同样可算出“较好”、“不好”的频率为 0.34 和 0.2，补充如下表所示：

作业情况	频数	频率
非常好	44	0.22
较好	68	0.34
一般	48	0.24
不好	40	0.2

(3) “非常好”和“较好”的学生的频率为 $0.22 + 0.34 = 0.56$,

$\therefore$ 该校学生作业情况 “非常好” 和 “较好” 的学生一共约 $1800 \times 0.56 = 1008$ (名),

故答案为：1008；

(4)由题意知，列表如下：

第一次 第二次	A_1	A_2	B	C
A_1		(A_1, A_2)	(A_1, B)	(A_1, C)
A_2	(A_2, A_1)		(A_2, B)	(A_2, C)
B	(B, A_1)	(B, A_2)		(B, C)
C	(C, A_1)	(C, A_2)	(C, B)	

由列表可以看出，一共有12种结果，并且它们出现的可能性相等.

其中两次抽到的作业本都是“非常好”的有2种，

$\therefore$ 两次抽到的作业本都是非常好的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$,

故答案为： $\frac{1}{6}$.

【点睛】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；解题时要注意此题是放回实验还是不放回实验．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

23.2020 年初，新冠肺炎疫情爆发，市场上防疫口罩热销，某医药公司每月生产甲、乙两种型号的防疫口罩共 20 万只，且所有口罩当月全部售出，其中成本、售价如下表：

型号 价格(元/只) 项目	甲	乙
成本	12	4
售价	18	6

- (1)若该公司三月份的销售收入为 300 万元，求生产甲、乙两种型号的防疫口罩分别是多少万只？
 (2)如果公司四月份投入成本不超过 216 万元，应怎样安排甲、乙两种型号防疫口罩的产量，可使该月公司所获利润最大？并求出最大利润.

【答案】(1)甲、乙两种型号口罩的产量分别为 15 万只和 5 万只；(2)从而安排生产甲种型号的口罩 17 万只，乙种型号的口罩 3 万只时，获得最大利润，最大利润为 108 万元.

【解析】

【分析】

- (1)设甲种型号口罩的产量是 x 万只，则乙种型号口罩的产量是 $(20-x)$ 万只，根据该公司三月份的销售收入为 300 万元列出一元一次方程，从而可以得到甲、乙两种型号的产品分别是多少万只；
 (2)根据题意，可以得到利润和生产甲种产品数量的函数关系式，再根据公司四月份投入总成本(原料总成本+生产提成总额)不超过 216 万元，可以得到生产甲种产品数量的取值范围，然后根据一次函数的性质，即可得到应怎样安排甲、乙两种型号的产量，可使该月公司所获利润最大，并求出最大利润.

【详解】(1) 设甲种型号口罩的产量是 x 万只，则乙种型号口罩的产量是 $(20-x)$ 万只，

根据题意得： $18x + 6(20-x) = 300$,

解得： $x = 15$,

则 $20-x = 20-15 = 5$,

则甲、乙两种型号口罩的产量分别为 15 万只和 5 万只；

(2) 设甲种型号口罩的产量是 y 万只，则乙种型号口罩的产量是 $(20-y)$ 万只，

根据题意得： $12y + 4(20-y) \leq 216$,

解得: $y \leq 17$.

设所获利润为 w 万元,

$$\text{则 } w = (18-12)y + (6-4)(20-y) = 4y + 40,$$

由于 $4 > 0$, 所以 w 随 y 的增大而增大,

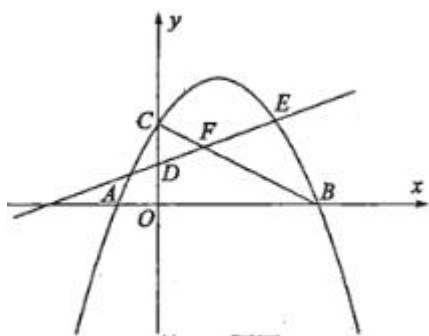
即当 $y = 17$ 时, w 最大,

$$\text{此时 } w = 4 \times 17 + 40 = 108.$$

从而安排生产甲种型号的口罩17万只, 乙种型号的口罩3万只时, 获得最大利润, 最大利润为108万元

【点睛】 本题考查一次函数的应用、一元一次方程的应用、一元一次不等式的应用, 解答本题的关键是明确题意, 利用一次函数的性质和不等式的性质解答.

24. 如图, 抛物线 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ 的图象经过点 $C(0, 2)$, 交 x 轴于点 A, B (点 A 在点 B 左侧), 连接 BC , 直线 $y = kx + 1$ ($k > 0$) 与 y 轴交于点 D , 与 BC 上方的抛物线交于点 E , 与 BC 交于点 F .



(1) 求抛物线的解析式及点 A, B 的坐标;

(2) $\frac{EF}{DF}$ 是否存在最大值? 若存在, 请求出其最大值及此时点 E 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$, $A(-1, 0), B(4, 0)$; (2) 存在, 当 $t = 2$ 时, 有最大值且最大值为 2, 此时点 E 的坐标为 $(2, 3)$.

【解析】

【分析】

(1) 直接将 $C(0, 2)$ 代入 $y = ax^2 - 3ax - 4a$ 求出 a , 即可确定抛物线解析式; 然后令 $y=0$ 求得 x 的值, 再结合已知即可确定 A, B 的坐标;

(2) 作 $EG \parallel y$ 轴, 交 BC 于点 G , 由平行线等分线段定理可得 $\frac{EF}{DF} = \frac{EG}{CD}$; 再根据题意求出 D 点坐标和 CD

的长, 可得 $\frac{EF}{DF} = EG$; 然后再根据 B, C 的坐标求出直线 BC 的解析式; 再设 $E\left(t, -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2\right)$, 则

$G\left(t, -\frac{1}{2}t + 2\right)$, 运用两点间距离公式求得 EG , 然后再代入 $\frac{EF}{DF} = EG$, 根据二次函数的性质即可说明

【详解】解: (1) 把 $C(0, 2)$ 代入 $y = ax^3 - 3ax - 4a$, 即 $-4a = 2$, 解得 $a = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$

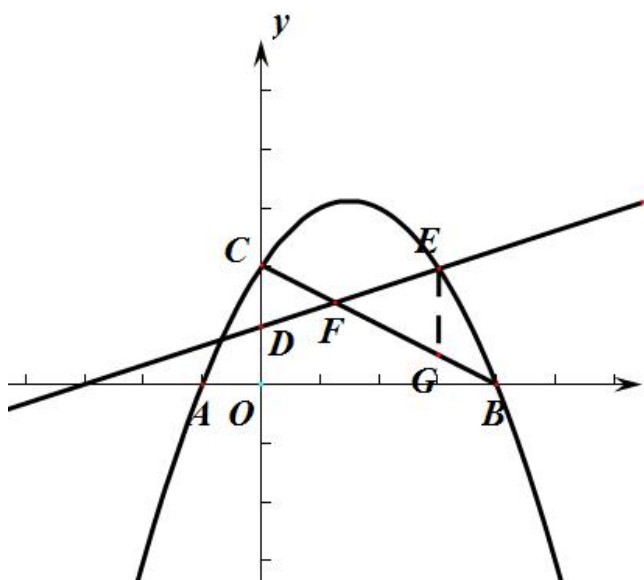
$$\text{令 } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = 0$$

可得: $x_1 = -1, x_2 = 4$,

$\therefore A(-1, 0), B(4, 0)$;

(2) 存在,

如图, 由题意, 点 E 在 y 轴的右侧, 作 $EG \parallel y$ 轴, 交 BC 于点 G



$\therefore CD \parallel EG$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{EG}{CD}$$

$\because$ 直线 $y = kx + 1 (k > 0)$ 与 y 轴交于点 D

$\therefore D(0, 1)$,

$$\therefore CD = 2 - 1 = 1,$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = EG$$

设 BC 所在直线的解析式为 $y = mx + n (m \neq 0)$,

将 $B(4,0), C(0,2)$ 代入上述解析式得: $\begin{cases} 0 = 4m + n \\ 2 = n \end{cases}$

解得: $\begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 2 \end{cases}$

$\therefore BC$ 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 2$

设 $E\left(t, -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2\right)$

则 $G\left(t, -\frac{1}{2}t + 2\right)$, 其中 $0 < t < 4$.

$\therefore EG = -\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2 - \left(-\frac{1}{2}t + 2\right) = -\frac{1}{2}(t-2)^2 + 2$

$\therefore \frac{EF}{DF} = -\frac{1}{2}(t-2)^2 + 2,$

$\because -\frac{1}{2} < 0,$

$\therefore$ 抛物线开口方向朝下

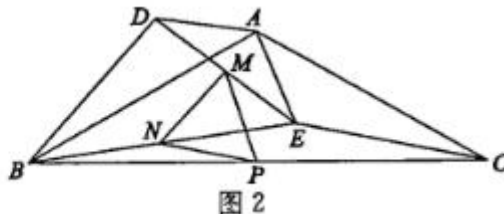
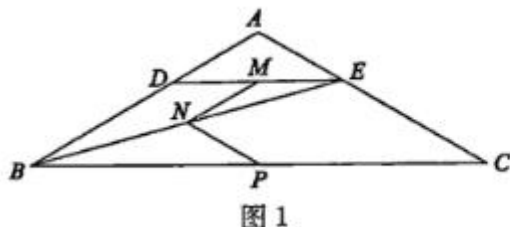
$\therefore$ 当 $t = 2$ 时, 有最大值, 最大值为 2.

将 $t=2$ 代入 $-\frac{1}{2}t^2 + \frac{3}{2}t + 2 = -2 + 3 + 2 = 3$

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(2,3)$.

【点睛】 本题主要考查了求一次函数和二次函数解析式、平行线等分线段定理以及运用二次函数的性质求最值, 掌握平行线等分线段定理是解答本题的关键.

25. 如图 1, 在等腰三角形 ABC 中, $\angle A = 120^\circ$, $AB = AC$, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, $AD = AE$, 连接 BE , 点 M, N, P 分别为 DE, BE, BC 的中点.



(1) 观察猜想

图 1 中, 线段 NM, NP 的数量关系是____, $\angle MNP$ 的大小为____;

(2) 探究证明

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针方向旋转到如图2所示的位置,连接 MP 、 BD 、 CE ,判断 $\triangle MNP$ 的形状,并说明理由;

(3)拓展延伸

把 $\triangle ADE$ 绕点 A 在平面内自由旋转,若 $AD=1$, $AB=3$,请求出 $\triangle MNP$ 面积的最大值.

【答案】(1)相等, 60° ; (2) $\triangle MNP$ 是等边三角形,理由见解析; (3) $\triangle MNP$ 面积的最大值为 $\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】

(1)根据" $\angle A=120^\circ$, $AB=AC$, $AD=AE$, 点 M 、 N 、 P 分别为 DE 、 BE 、 BC 的中点", 可得 $MN \parallel BD$, $NP \parallel CE$, 根据三角形外角和定理, 等量代换求出 $\angle MNP$.

(2)先求出 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 得出 $\angle ABD = \angle ACE$, 根据 $MN \parallel BD$, $NP \parallel CE$, 和三角形外角和定理, 可知 $MN=NP$, 再等量代换求出 $\angle MNP$, 即可求解.

(3)根据 $BD \leq AB + AD$, 可知 BD 最大值, 继而求出 $\triangle MNP$ 面积的最大值.

【详解】(1)由题意知: $AB=AC$, $AD=AE$, 且点 M 、 N 、 P 分别为 DE 、 BE 、 BC 的中点,

$$\therefore BD=CE, MN \parallel BD, NP \parallel CE, MN=\frac{1}{2}BD, NP=\frac{1}{2}EC$$

$$\therefore MN=NP$$

又 $\because MN \parallel BD, NP \parallel CE, \angle A=120^\circ, AB=AC$,

$$\therefore \angle MNE = \angle DBE, \angle NPB = \angle C, \angle ABC = \angle C = 30^\circ$$

根据三角形外角和定理,

$$\text{得 } \angle ENP = \angle NBP + \angle NPB$$

$$\therefore \angle MNP = \angle MNE + \angle ENP, \angle ENP = \angle NBP + \angle NPB,$$

$$\angle NPB = \angle C, \angle MNE = \angle DBE,$$

$$\therefore \angle MNP = \angle DBE + \angle NBP + \angle C$$

$$= \angle ABC + \angle C = 60^\circ.$$

(2) MNP 是等边三角形.

理由如下:

如图, 由旋转可得 $\angle BAD = \angle CAE$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE (SAS)$$

$$\therefore BD = CE, \angle ABD = \angle ACE.$$

$\because$ 点 M 、 N 分别为 DE 、 BE 的中点,

$\therefore MN$ 是 $\triangle EBD$ 的中位线,

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BD \text{ 且 } MN \parallel BD$$

$$\text{同理可证 } PN = \frac{1}{2}CE \text{ 且 } PN \parallel CE$$

$$\therefore MN = PN, \angle MNE = \angle DBE, \angle NPB = \angle ECB$$

$$\therefore \angle MNE = \angle DBE = \angle ABD + \angle ABE = \angle ACE + \angle ABE$$

$$\angle ENP = \angle EBP + \angle NPB = \angle EBP + \angle ECB$$

$$\therefore \angle MNP = \angle MNE + \angle ENP = \angle ACE + \angle ABE + \angle EBP + \angle ECB$$

$$= \angle ABC + \angle ACB = 60^\circ.$$

在 $\triangle MNP$ 中

$$\therefore \angle MNP = 60^\circ, MN = PN$$

$\therefore \triangle MNP$ 是等边三角形.

(3) 根据题意得: $BD \leq AB + AD$

即 $BD \leq 4$, 从而 $MN \leq 2$

$$\triangle MNP \text{ 的面积} = \frac{1}{2}MN \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}MN = \frac{\sqrt{3}}{4}MN^2.$$

$$\therefore \triangle MNP \text{ 面积的最大值为 } \sqrt{3}.$$

【点睛】 本题主要考查了三角形中点的性质、三角形相似的判定定理、三角形外角和定理以及图形旋转的相关知识; 正确掌握三角形相似的判定定理、三角形外角和定理以及图形旋转的相关知识是解题的关键.

