

2019 年山东省青岛市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) $-\sqrt{3}$ 的相反数是 ()

- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

2. (3 分) 下列四个图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是 ()



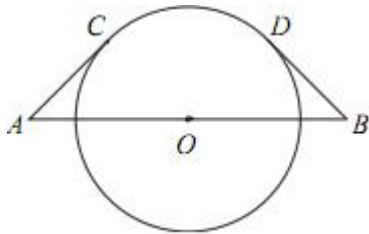
3. (3 分) 2019 年 1 月 3 日，我国“嫦娥四号”月球探测器在月球背面软着陆，实现人类有史以来首次成功登陆月球背面. 已知月球与地球之间的平均距离约为 $384000km$ ，把 $384000km$ 用科学记数法可以表示为 ()

- A. $38.4 \times 10^4 km$ B. $3.84 \times 10^5 km$
C. $0.384 \times 10^6 km$ D. $3.84 \times 10^6 km$

4. (3 分) 计算 $(-2m)^2 \cdot (-m \cdot m^2 + 3m^3)$ 的结果是 ()

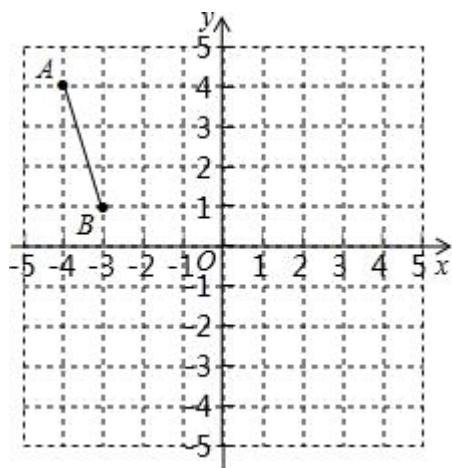
- A. $8m^5$ B. $-8m^5$ C. $8m^6$ D. $-4m^4 + 12m^5$

5. (3 分) 如图，线段 AB 经过 $\odot O$ 的圆心， AC ， BD 分别与 $\odot O$ 相切于点 C ， D . 若 $AC = BD = 4$ ， $\angle A = 45^\circ$ ，则 $\widehat{CD}$ 的长度为 ()



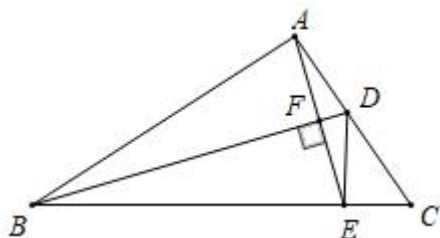
- A. π B. 2π C. $2\sqrt{2}\pi$ D. 4π

6. (3 分) 如图，将线段 AB 先向右平移 5 个单位，再将所得线段绕原点按顺时针方向旋转 90° ，得到线段 $A'B'$ ，则点 B 的对应点 B' 的坐标是 ()



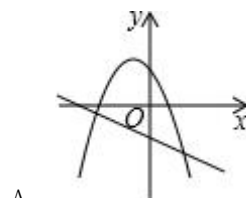
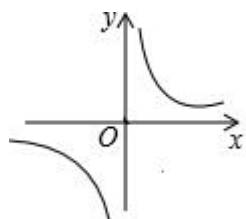
- A. $(-4, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(4, -1)$ D. $(1, -2)$

7. (3分) 如图, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $AE \perp BD$, 垂足为 F . 若 $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, 则 $\angle CDE$ 的度数为 ()

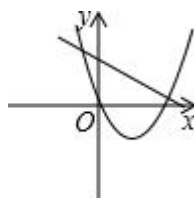


- A. 35° B. 40° C. 45° D. 50°

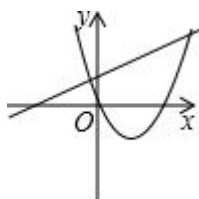
8. (3分) 已知反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$ 的图象如图所示, 则二次函数 $y = ax^2 - 2x$ 和一次函数 $y = bx + a$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是 ()



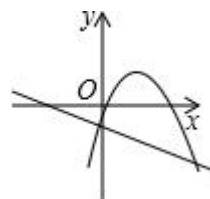
A.



B.



C.



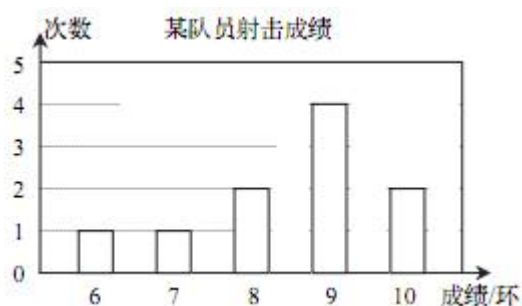
D.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

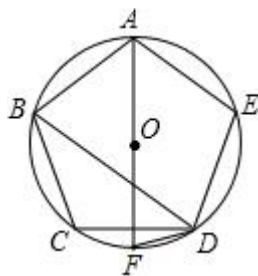
9. (3分) 计算: $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - (\sqrt{3})^0 =$ _____.

10. (3分) 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 m 的值为_____.

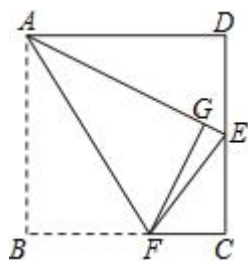
11. (3分) 射击比赛中, 某队员 10 次射击成绩如图所示, 则该队员的平均成绩是_____环.



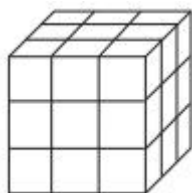
12. (3分) 如图, 五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形, AF 是 $\odot O$ 的直径, 则 $\angle BDF$ 的度数是_____°.



13. (3分) 如图, 在正方形纸片 $ABCD$ 中, E 是 CD 的中点, 将正方形纸片折叠, 点 B 落在线段 AE 上的点 G 处, 折痕为 AF . 若 $AD = 4\text{cm}$, 则 CF 的长为_____ cm .



14. (3分) 如图, 一个正方体由 27 个大小相同的小立方块搭成, 现从中取走若干个小立方块, 得到一个新的几何体. 若新几何体与原正方体的表面积相等, 则最多可以取走个小立方块.



三、作图题 (本大题满分 4 分) 请用直尺、圆规作图, 不写作法, 但要保留作图痕迹.

15. (4分) 请用直尺、圆规作图, 不写作法, 但要保留作图痕迹.

已知: $\angle \alpha$, 直线 l 及 l 上两点 A, B .

求作: $\text{Rt}\triangle ABC$, 使点 C 在直线 l 的上方, 且 $\angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = \angle \alpha$.



四、解答题 (本大题共 9 小题, 共 74 分)

16. (8分) (1) 化简: $\frac{m-n}{m} \div (\frac{m^2+n^2}{m} - 2n)$;

(2) 解不等式组 $\begin{cases} 1 - \frac{1}{5}x \leq \frac{6}{5} \\ 3x - 1 < 8 \end{cases}$, 并写出它的正整数解.

17. (6分) 小明和小刚一起做游戏, 游戏规则如下: 将分别标有数字 1, 2, 3, 4 的 4 个小球放入一个不透明的袋子中, 这些球除数字外都相同. 从中随机摸出一个球记下数字后放回, 再从中随机摸出一个球记下数字. 若两次数数字差的绝对值小于 2, 则小明获胜, 否则小刚获胜. 这个游戏对两人公平吗? 请说明理由.

18. (6分) 为了解学生每天的睡眠情况, 某初中学校从全校 800 名学生中随机抽取了 40 名学生, 调查了他们平均每天的睡眠时间 (单位: h), 统计结果如下:

9, 8, 10.5, 7, 9, 8, 10, 9.5, 8, 9, 9.5, 7.5, 9.5, 9, 8.5, 7.5, 10, 9.5, 8, 9, 7, 9.5, 8.5, 9, 7, 9, 9, 7.5, 8.5, 8.5, 9, 8, 7.5, 9.5, 10, 9.5, 8.5, 9, 8, 9.

在对这些数据整理后, 绘制了如下的统计图表:

睡眠时间分组统计表睡眠时间分布情况

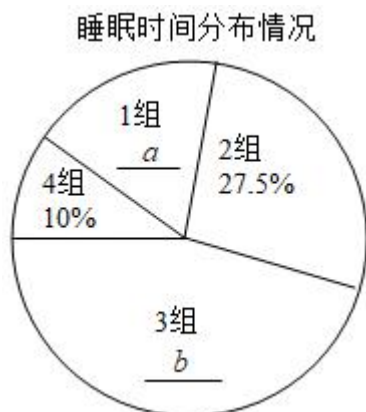
组别	睡眠时间分组	人数 (频数)
1	$7 \leq t < 8$	m
2	$8 \leq t < 9$	11
3	$9 \leq t < 10$	n
4	$10 \leq t < 11$	4

请根据以上信息, 解答下列问题:

(1) $m =$ _____, $n =$ _____, $a =$ _____, $b =$ _____;

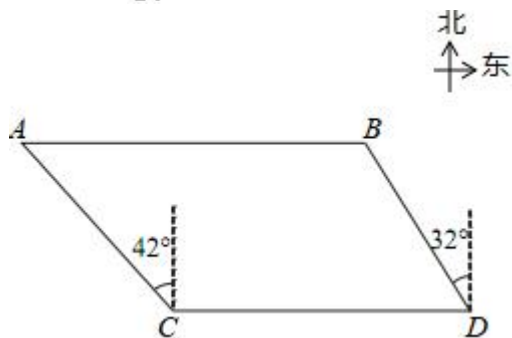
(2) 抽取的这 40 名学生平均每天睡眠时间的中位数落在_____组 (填组别);

(3) 如果按照学校要求, 学生平均每天的睡眠时间应不少于 $9h$, 请估计该校学生中睡眠时间符合要求的人数.



19. (6分) 如图, 某旅游景区为方便游客, 修建了一条东西走向的木栈道 AB , 栈道 AB 与景区道路 CD 平行. 在 C 处测得栈道一端 A 位于北偏西 42° 方向, 在 D 处测得栈道另一端 B 位于北偏西 32° 方向. 已知 $CD = 120m$, $BD = 80m$, 求木栈道 AB 的长度 (结果保留整数).

(参考数据: $\sin 32^\circ \approx \frac{17}{32}$, $\cos 32^\circ \approx \frac{17}{20}$, $\tan 32^\circ \approx \frac{5}{8}$, $\sin 42^\circ \approx \frac{27}{40}$, $\cos 42^\circ \approx \frac{3}{4}$, $\tan 42^\circ \approx \frac{9}{10}$)



20. (8分) 甲、乙两人加工同一种零件, 甲每天加工的数量是乙每天加工数量的 1.5 倍, 两人各加工 600 个这种零件, 甲比乙少用 5 天.

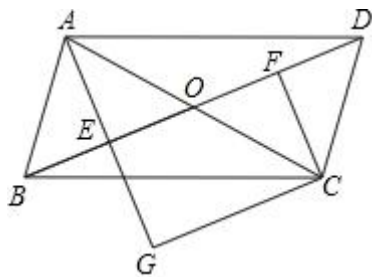
(1) 求甲、乙两人每天各加工多少个这种零件?

(2) 已知甲、乙两人加工这种零件每天的加工费分别是 150 元和 120 元, 现有 3000 个这种零件的加工任务, 甲单独加工一段时间后另有安排, 剩余任务由乙单独完成. 如果总加工费不超过 7800 元, 那么甲至少加工了多少天?

21. (8分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 点 E , F 分别为 OB , OD 的中点, 延长 AE 至 G , 使 $EG = AE$, 连接 CG .

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 当 AB 与 AC 满足什么数量关系时, 四边形 $EGCF$ 是矩形? 请说明理由.

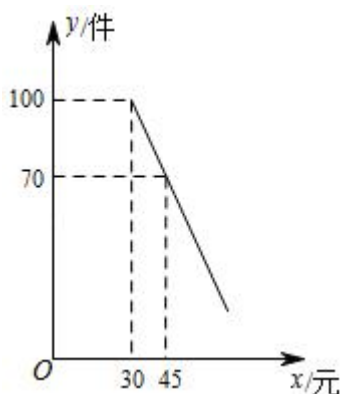


22. (10 分) 某商店购进一批成本为每件 30 元的商品, 经调查发现, 该商品每天的销售量 y (件) 与销售单价 x (元) 之间满足一次函数关系, 其图象如图所示.

(1) 求该商品每天的销售量 y 与销售单价 x 之间的函数关系式;

(2) 若商店按单价不低于成本价, 且不低于 50 元销售, 则销售单价定为多少, 才能使销售该商品每天获得的利润 w (元) 最大? 最大利润是多少?

(3) 若商店要使销售该商品每天获得的利润不低于 800 元, 则每天的销售量最少应为多少件?



23. (10 分) 问题提出:

如图, 图①是一张由三个边长为 1 的小正方形组成的“L”形纸片, 图②是一张 $a \times b$ 的方格纸 ($a \times b$ 的方格纸指边长分别为 a, b 的矩形, 被分成 $a \times b$ 个边长为 1 的小正方形, 其中 $a \geq 2, b \geq 2$, 且 a, b 为正整数). 把图①放置在图②中, 使它恰好盖住图②中的三个小正方形, 共有多少种不同的放置方法?

问题探究:

为探究规律, 我们采用一般问题特殊化的策略, 先从最简单的情形入手, 再逐次递进, 最后得出一般性的结论.

探究一:

把图①放置在 2×2 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

如图③，对于 2×2 的方格纸，要用图①盖住其中的三个小正方形，显然有 4 种不同的放置方法.

探究二：

把图①放置在 3×2 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

如图④，在 3×2 的方格纸中，共可以找到 2 个位置不同的 2×2 方格，依据探究一的结论可知，把图①放置在 3×2 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有 $2 \times 4 = 8$ 种不同的放置方法.

探究三：

把图①放置在 $a \times 2$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

如图⑤，在 $a \times 2$ 的方格纸中，共可以找到_____个位置不同的 2×2 方格，依据探究一的结论可知，把图①放置在 $a \times 2$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有_____种不同的放置方法.

探究四：

把图①放置在 $a \times 3$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

如图⑥，在 $a \times 3$ 的方格纸中，共可以找到_____个位置不同的 2×2 方格，依据探究一的结论可知，把图①放置在 $a \times 3$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有_____种不同的放置方法.

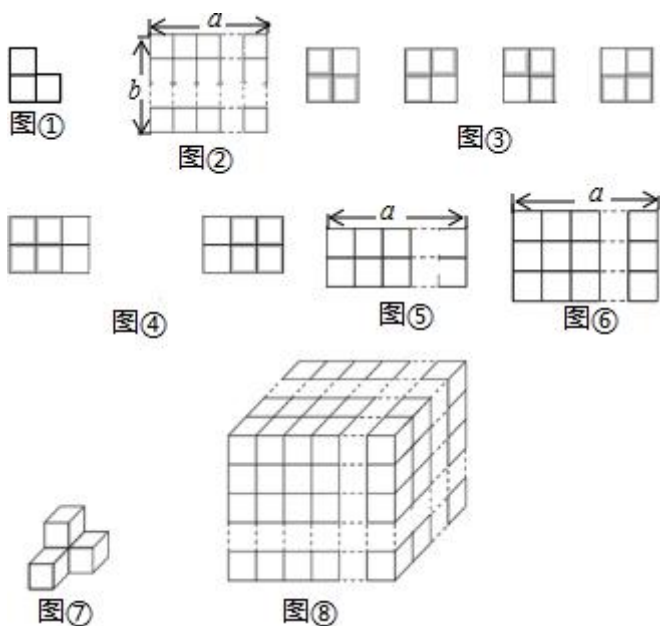
.....

问题解决：

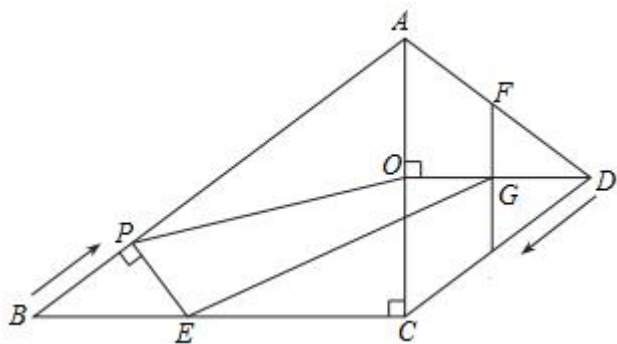
把图①放置在 $a \times b$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？（仿照前面的探究方法，写出解答过程，不需画图.）

问题拓展：

如图，图⑦是一个由 4 个棱长为 1 的小立方体构成的几何体，图⑧是一个长、宽、高分别为 a, b, c ($a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$ ，且 a, b, c 是正整数) 的长方体，被分成了 $a \times b \times c$ 个棱长为 1 的小立方体. 在图⑧的不同位置共可以找到_____个图⑦这样的几何体.



24. (12分) 已知: 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10\text{cm}$, $BC = 8\text{cm}$, OD 垂直平分 AC . 点 P 从点 B 出发, 沿 BA 方向匀速运动, 速度为 1cm/s ; 同时, 点 Q 从点 D 出发, 沿 DC 方向匀速运动, 速度为 1cm/s ; 当一个点停止运动, 另一个点也停止运动. 过点 P 作 $PE \perp AB$, 交 BC 于点 E , 过点 Q 作 $QF \parallel AC$, 分别交 AD , OD 于点 F , G . 连接 OP , EG . 设运动时间为 t (s) ($0 < t < 5$), 解答下列问题:
- (1) 当 t 为何值时, 点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上?
 - (2) 设四边形 $PEGO$ 的面积为 S (cm^2), 求 S 与 t 的函数关系式;
 - (3) 在运动过程中, 是否存在某一时刻 t , 使四边形 $PEGO$ 的面积最大? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由;
 - (4) 连接 OE , OQ , 在运动过程中, 是否存在某一时刻 t , 使 $OE \perp OQ$? 若存在, 求出 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



2019 年山东省青岛市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. (3 分) $-\sqrt{3}$ 的相反数是 ()

- A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\pm\sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$

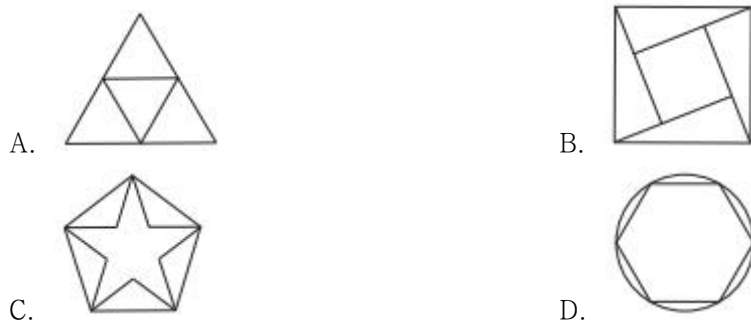
【分析】相反数的定义：只有符号不同的两个数互为相反数，0 的相反数是 0.

【解答】解：根据相反数、绝对值的性质可知： $-\sqrt{3}$ 的相反数是 $\sqrt{3}$.

故选：D.

【点评】本题考查的是相反数的求法. 要求掌握相反数定义，并能熟练运用到实际当中.

2. (3 分) 下列四个图形中，既是轴对称图形，又是中心对称图形的是 ()



【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解：A、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

B、不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项错误；

C、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

D、既是轴对称图形，又是中心对称图形，故此选项正确.

故选：D.

【点评】此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合.

3. (3 分) 2019 年 1 月 3 日，我国“嫦娥四号”月球探测器在月球背面软着陆，实现人类有史以来首次成功登陆月球背面. 已知月球与地球之间的平均距离约为 $384000km$ ，把 $384000km$ 用科学记数法可以表示为 ()

- A. $38.4 \times 10^4 km$ B. $3.84 \times 10^5 km$
C. $0.384 \times 10^6 km$ D. $3.84 \times 10^6 km$

【分析】利用科学记数法的表示形式即可

【解答】解：

科学记数法表示： $384\ 000 = 3.84 \times 10^5 km$

故选：B.

【点评】本题主要考查科学记数法的表示，把一个数表示成 a 与 10 的 n 次幂相乘的形式 ($1 \leq a < 10$, n 为整数)，这种记数法叫做科学记数法.

4. (3 分) 计算 $(-2m)^2 \cdot (-m \cdot m^2 + 3m^3)$ 的结果是 ()

- A. $8m^5$ B. $-8m^5$ C. $8m^6$ D. $-4m^4 + 12m^5$

【分析】根据积的乘方以及合并同类项进行计算即可.

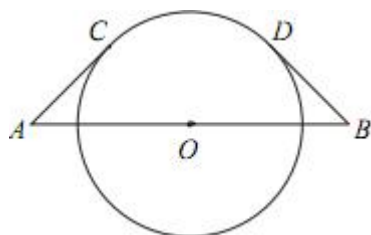
【解答】解：原式 $= 4m^2 \cdot 2m^3$

$= 8m^5$,

故选：A.

【点评】本题考查了幂的乘方、积的乘方以及合并同类项的法则，掌握运算法则是解题的关键.

5. (3 分) 如图，线段 AB 经过 $\odot O$ 的圆心， AC , BD 分别与 $\odot O$ 相切于点 C , D . 若 $AC = BD = 4$, $\angle A = 45^\circ$, 则 $\widehat{CD}$ 的长度为 ()



- A. π B. 2π C. $2\sqrt{2}\pi$ D. 4π

【分析】连接 OC 、 OD ，根据切线性质和 $\angle A = 45^\circ$ ，易证得 $\triangle AOC$ 和 $\triangle BOD$ 是等腰直角三角形，进而求得 $OC = OD = 4$, $\angle COD = 90^\circ$ ，根据弧长公式求得即可.

【解答】解：连接 OC 、 OD ,

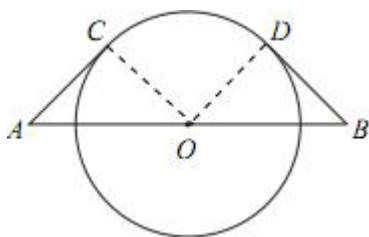
$\because AC, BD$ 分别与 $\odot O$ 相切于点 C, D .

$\therefore OC \perp AC, OD \perp BD$,

$\because \angle A = 45^\circ$,

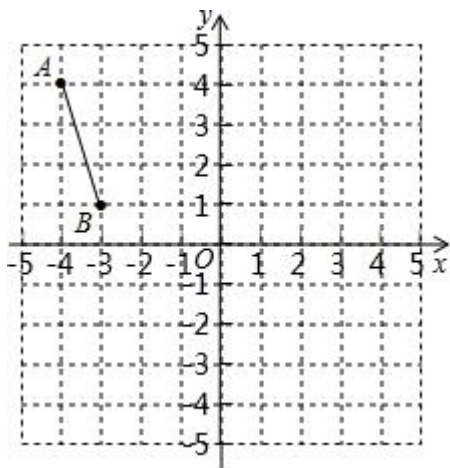
$$\begin{aligned}
 \therefore \angle AOC &= 45^\circ, \\
 \therefore AC &= OC = 4, \\
 \therefore AC &= BD = 4, \quad OC = OD = 4, \\
 \therefore OD &= BD, \\
 \therefore \angle BOD &= 45^\circ, \\
 \therefore \angle COD &= 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ, \\
 \therefore \widehat{CD} \text{ 的长度为: } &\frac{90\pi \times 4}{180} = 2\pi,
 \end{aligned}$$

故选: B.



【点评】 本题考查了切线的性质，等腰直角三角形的判定和性质，弧长的计算等，证得 $\angle COD = 90^\circ$ 是解题的关键.

6. (3分) 如图，将线段 AB 先向右平移 5 个单位，再将所得线段绕原点按顺时针方向旋转 90° ，得到线段 $A'B'$ ，则点 B 的对应点 B' 的坐标是 ()



- A. $(-4, 1)$ B. $(-1, 2)$ C. $(4, -1)$ D. $(1, -2)$

【分析】 在平面直角坐标系内，把一个图形各个点的横坐标都加上 (或减去) 一个整数 a ，相应的新图形就是把原图形向右 (或向左) 平移 a 个单位长度；如果把它各个点的纵坐标都加 (或减去) 一个整数 a ，相应的新图形就是把原图形向上 (或向下) 平移 a 个单位长度；

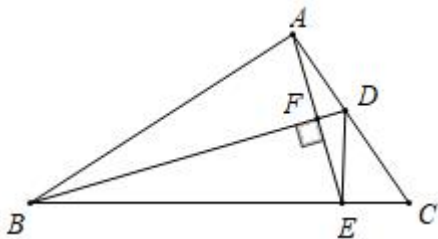
图形或点旋转之后要结合旋转的角度和图形的特殊性质来求出旋转后的点的坐标. 常见的是旋转特殊角度如: 30° , 45° , 60° , 90° , 180° .

【解答】解: 将线段 AB 先向右平移 5 个单位, 点 $B(2, 1)$, 连接 OB , 顺时针旋转 90° , 则 B 对应坐标为 $(1, -2)$,

故选: D .

【点评】 本题考查了图形的平移与旋转, 熟练运用平移与旋转的性质是解题的关键.

7. (3 分) 如图, BD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $AE \perp BD$, 垂足为 F . 若 $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, 则 $\angle CDE$ 的度数为 ()



- A. 35° B. 40° C. 45° D. 50°

【分析】 根据角平分线的定义和垂直的定义得到 $\angle ABD = \angle EBD$, $\angle AFB = \angle EFB$, 根据全等三角形的性质得到 $AF = EF$, $AB = BE$, 求得 $AD = DE$, 根据三角形的内角和得到 $\angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle C = 95^\circ$, 根据全等三角形的性质得到 $\angle BED = \angle BAD = 95^\circ$, 根据四边形的内角和平角的定义即可得到结论.

【解答】 解: $\because BD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, $AE \perp BD$,

$$\therefore \angle ABD = \angle EBD, \quad \angle AFB = \angle EFB,$$

$$\because BF = BF,$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle EBF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AF = EF, \quad AB = BE,$$

$$\therefore AD = DE,$$

$$\because \angle ABC = 35^\circ, \quad \angle C = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle C = 95^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle DAB \text{ 与 } \triangle DEB \text{ 中 } \begin{cases} AB = BE \\ AD = DE \\ BD = BD, \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle EAD \text{ (SSS)},$$

$$\therefore \angle BED = \angle BAD = 95^\circ,$$

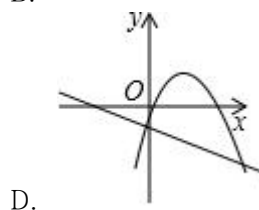
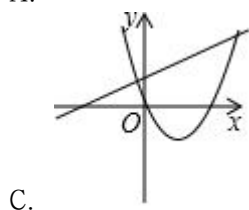
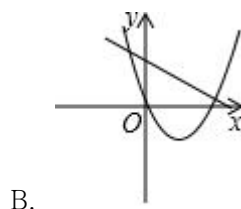
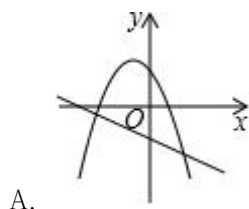
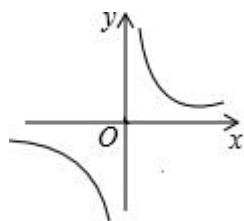
$$\therefore \angle ADE = 360^\circ - 95^\circ - 95^\circ - 35^\circ = 145^\circ,$$

$$\therefore \angle CDE = 180^\circ - \angle ADE = 35^\circ,$$

故选: A.

【点评】 本题考查了三角形的内角和, 全等三角形的判定和性质, 三角形的外角的性质, 熟练掌握全等三角形的判定和性质是解题的关键.

8. (3分) 已知反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$ 的图象如图所示, 则二次函数 $y = ax^2 - 2x$ 和一次函数 $y = bx + a$ 在同一平面直角坐标系中的图象可能是 ()



【分析】 先根据抛物线 $y = ax^2 - 2x$ 过原点排除 A, 再反比例函数图象确定 ab 的符号, 再由 a 、 b 的符号和抛物线对称轴确定抛物线与直线 $y = bx + a$ 的位置关系, 进而得解.

【解答】 解: $\because$ 当 $x = 0$ 时, $y = ax^2 - 2x = 0$, 即抛物线 $y = ax^2 - 2x$ 经过原点, 故 A 错误;

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{ab}{x}$ 的图象在第一、三象限,

$\therefore ab > 0$, 即 a 、 b 同号,

当 $a < 0$ 时, 抛物线 $y = ax^2 - 2x$ 的对称轴 $x = \frac{1}{a} < 0$, 对称轴在 y 轴左边, 故 D 错误;

当 $a > 0$ 时, $b > 0$, 直线 $y = bx + a$ 经过第一、二、三象限, 故 B 错误, C 正确.

故选: C.

【点评】 本题主要考查了一次函数、反比例函数、二次函数的图象与性质, 根据函数图象与系数的关系进行判断是解题的关键, 同时考查了数形结合的思想.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

9. (3分) 计算: $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - (\sqrt{3})^0 = \underline{2\sqrt{3}+1}$.

【分析】根据二次根式混合运算的法则计算即可.

【解答】解: $\frac{\sqrt{24}+\sqrt{8}}{\sqrt{2}} - (\sqrt{3})^0 = 2\sqrt{3}+2-1=2\sqrt{3}+1$,

故答案为: $2\sqrt{3}+1$.

【点评】本题考查了二次根式的混合运算, 熟记法则是解题的关键.

10. (3分) 若关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - x + m = 0$ 有两个相等的实数根, 则 m 的值为 $\underline{\frac{1}{8}}$.

【分析】根据“关于 x 的一元二次方程 $2x^2 - x + m = 0$ 有两个相等的实数根”, 结合根的判别式公式, 得到关于 m 的一元一次方程, 解之即可.

【解答】解: 根据题意得:

$$\Delta = 1 - 4 \times 2m = 0,$$

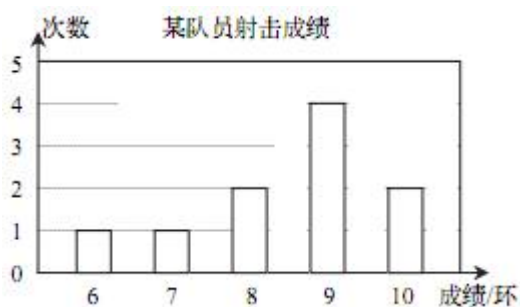
$$\text{整理得: } 1 - 8m = 0,$$

$$\text{解得: } m = \frac{1}{8},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{8}.$$

【点评】本题考查了根的判别式, 正确掌握根的判别式公式是解题的关键.

11. (3分) 射击比赛中, 某队员 10 次射击成绩如图所示, 则该队员的平均成绩是 $\underline{8.5}$ 环.



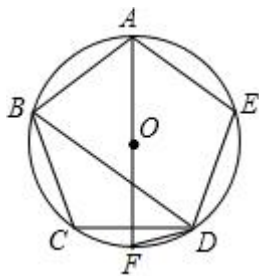
【分析】由加权平均数公式即可得出结果.

【解答】解: 该队员的平均成绩为 $\frac{1}{10} (1 \times 6 + 1 \times 7 + 2 \times 8 + 4 \times 9 + 2 \times 10) = 8.5$ (环);

故答案为: 8.5.

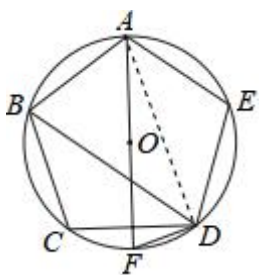
【点评】本题考查了加权平均数和条形统计图; 熟练掌握加权平均数的计算公式是解决问题的关键.

12. (3分) 如图, 五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形, AF 是 $\odot O$ 的直径, 则 $\angle BDF$ 的度数是 $\underline{54}$ $^\circ$.



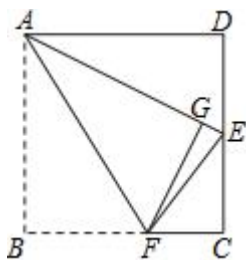
【分析】连接 AD ，根据圆周角定理得到 $\angle ADF = 90^\circ$ ，根据五边形的内角和得到 $\angle ABC = \angle C = 108^\circ$ ，求得 $\angle ABD = 72^\circ$ ，由圆周角定理得到 $\angle F = \angle ABD = 72^\circ$ ，求得 $\angle FAD = 18^\circ$ ，于是得到结论.

【解答】解：连接 AD ，
 $\because AF$ 是 $\odot O$ 的直径，
 $\therefore \angle ADF = 90^\circ$ ，
 $\because$ 五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形，
 $\therefore \angle ABC = \angle C = 108^\circ$ ，
 $\therefore \angle ABD = 72^\circ$ ，
 $\therefore \angle F = \angle ABD = 72^\circ$ ，
 $\therefore \angle FAD = 18^\circ$ ，
 $\therefore \angle CDF = \angle DAF = 18^\circ$ ，
 $\therefore \angle BDF = 36^\circ + 18^\circ = 54^\circ$ ，
 故答案为：54.



【点评】本题考查正多边形与圆，圆周角定理等知识，解题的关键灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

13. (3分) 如图，在正方形纸片 $ABCD$ 中， E 是 CD 的中点，将正方形纸片折叠，点 B 落在线段 AE 上的点 G 处，折痕为 AF . 若 $AD = 4\text{cm}$ ，则 CF 的长为 $6 - 2\sqrt{5}\text{cm}$.



【分析】 设 $BF = x$, 则 $FG = x$, $CF = 4 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle GEF$ 中, 利用勾股定理可得 $EF^2 = (2\sqrt{5} - 4)^2 + x^2$, 在 $\text{Rt}\triangle FCE$ 中, 利用勾股定理可得 $EF^2 = (4 - x)^2 + 2^2$, 从而得到关于 x 方程, 求解 x , 最后用 $4 - x$ 即可.

【解答】 解: 设 $BF = x$, 则 $FG = x$, $CF = 4 - x$.

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 利用勾股定理可得 $AE = 2\sqrt{5}$.

根据折叠的性质可知 $AG = AB = 4$, 所以 $GE = 2\sqrt{5} - 4$.

在 $\text{Rt}\triangle GEF$ 中, 利用勾股定理可得 $EF^2 = (2\sqrt{5} - 4)^2 + x^2$,

在 $\text{Rt}\triangle FCE$ 中, 利用勾股定理可得 $EF^2 = (4 - x)^2 + 2^2$,

所以 $(2\sqrt{5} - 4)^2 + x^2 = (4 - x)^2 + 2^2$,

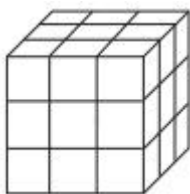
解得 $x = 2\sqrt{5} - 2$.

则 $FC = 4 - x = 6 - 2\sqrt{5}$.

故答案为 $6 - 2\sqrt{5}$.

【点评】 本题主要考查了折叠的性质、勾股定理. 折叠问题主要是抓住折叠的不变量, 在直角三角形中利用勾股定理求解是解题的关键.

14. (3 分) 如图, 一个正方体由 27 个大小相同的小立方块搭成, 现从中取走若干个小立方块, 得到一个新的几何体. 若新几何体与原正方体的表面积相等, 则最多可以取走 4 个小立方块.



【分析】 根据新几何体的三视图与原来的几何体的三视图相同解答即可.

【解答】 解: 若新几何体与原正方体的表面积相等, 则新几何体的三视图与原来的几何体的三视图相同, 所以最多可以取走 4 个小立方块.

故答案为: 4

【点评】 本题主要考查了几何体的表面积, 理解三视图是解答本题的关键. 用到的知识

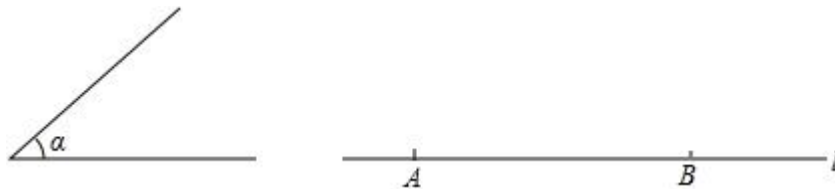
点为：主视图，左视图与俯视图分别是从物体的正面，左面，上面看得到的图形.

三、作图题（本大题满分 4 分）请用直尺、圆规作图，不写作法，但要保留作图痕迹.

15. (4 分) 请用直尺、圆规作图，不写作法，但要保留作图痕迹.

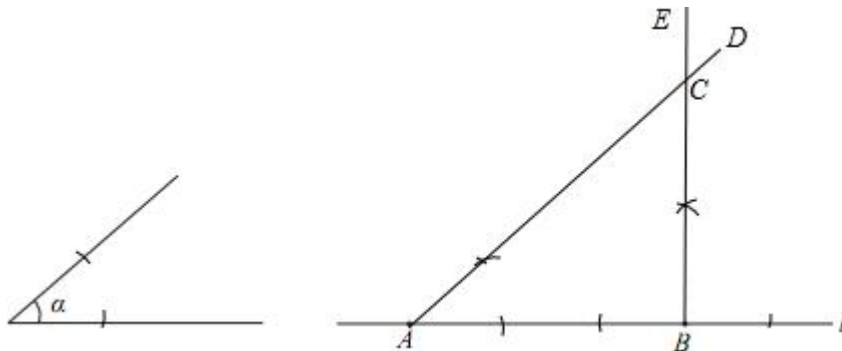
已知： $\angle \alpha$ ，直线 l 及 l 上两点 A, B .

求作： $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使点 C 在直线 l 的上方，且 $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BAC = \angle \alpha$.



【分析】 先作 $\angle DAB = \alpha$ ，再过 B 点作 $BE \perp AB$ ，则 AD 与 BE 的交点为 C 点.

【解答】 解：如图， $\triangle ABC$ 为所作.



【点评】 本题考查了作图 - 复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法. 解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作.

四、解答题（本大题共 9 小题，共 74 分）

16. (8 分) (1) 化简： $\frac{m-n}{m} \div (\frac{m^2+n^2}{m} - 2n)$;

(2) 解不等式组 $\begin{cases} 1 - \frac{1}{5}x \leq \frac{6}{5} \\ 3x - 1 < 8 \end{cases}$ ，并写出它的正整数解.

【分析】 (1) 按分式的运算顺序和运算法则计算求值;

(2) 先确定不等式组的解集，再求出满足条件的正整数解.

【解答】 解：(1) 原式 $= \frac{m-n}{m} \div \frac{m^2+n^2-2mn}{m}$
 $= \frac{m-n}{m} \times \frac{m}{(m-n)^2}$
 $= \frac{1}{m-n};$

$$(2) \begin{cases} 1 - \frac{1}{5}x \leq \frac{6}{5} & \text{①} \\ 3x - 1 < 8 & \text{②} \end{cases}$$

由①，得 $x \geq -1$ ，

由②，得 $x < 3$ 。

所以该不等式组的解集为： $-1 \leq x < 3$ 。

所以满足条件的正整数解为： 1、2。

【点评】 本题考查了分式的混合运算、不等式组的正整数解等知识点。解决（1）的关键是掌握分式的运算法则，解决（2）的关键是确定不等式组的解集。

17. (6分) 小明和小刚一起做游戏，游戏规则如下：将分别标有数字 1, 2, 3, 4 的 4 个小球放入一个不透明的袋子中，这些球除数字外都相同。从中随机摸出一个球记下数字后放回，再从中随机摸出一个球记下数字。若两次数字差的绝对值小于 2，则小明获胜，否则小刚获胜。这个游戏对两人公平吗？请说明理由。

【分析】 列表得出所有等可能的情况数，找出两次数字差的绝对值小于 2 的情况数，分别求出两人获胜的概率，比较即可得到游戏公平与否。

【解答】 解：这个游戏对双方不公平。

理由：列表如下：

	1	2	3	4
1	(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)
2	(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)
3	(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)
4	(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)

所有等可能的情况有 16 种，其中两次数字差的绝对值小于 2 的情况有 (1, 1), (2, 1),

(1, 2), (2, 2), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 3), (3, 4), (4, 4) 共 10 种，

故小明获胜的概率为： $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$ ，则小刚获胜的概率为： $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$ ，

$$\therefore \frac{5}{8} \neq \frac{3}{8},$$

$\therefore$ 这个游戏对两人不公平。

【点评】 此题考查了游戏公平性，以及列表法与树状图法，判断游戏公平性就要计算每个事件的概率，概率相等就公平，否则就不公平。

18. (6分) 为了解学生每天的睡眠情况, 某初中学校从全校 800 名学生中随机抽取了 40 名学生, 调查了他们平均每天的睡眠时间 (单位: h), 统计结果如下:

9, 8, 10.5, 7, 9, 8, 10, 9.5, 8, 9, 9.5, 7.5, 9.5, 9, 8.5, 7.5, 10, 9.5, 8, 9, 7, 9.5, 8.5, 9, 7, 9, 9, 7.5, 8.5, 8.5, 9, 8, 7.5, 9.5, 10, 9.5, 8.5, 9, 8, 9.

在对这些数据整理后, 绘制了如下的统计图表:

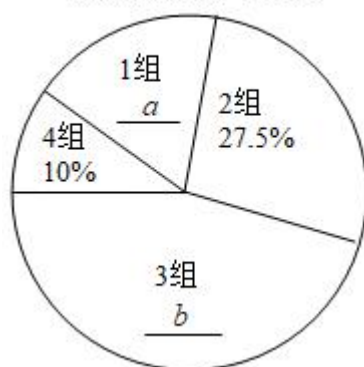
睡眠时间分组统计表睡眠时间分布情况

组别	睡眠时间分组	人数 (频数)
1	$7 \leq t < 8$	m
2	$8 \leq t < 9$	11
3	$9 \leq t < 10$	n
4	$10 \leq t < 11$	4

请根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) $m = \underline{7}$, $n = \underline{1}$, $a = \underline{17.5\%}$, $b = \underline{45\%}$;
- (2) 抽取的这 40 名学生平均每天睡眠时间的中位数落在 3 组 (填组别);
- (3) 如果按照学校要求, 学生平均每天的睡眠时间应不少于 $9h$, 请估计该校学生中睡眠时间符合要求的人数.

睡眠时间分布情况



- 【分析】** (1) 根据 40 名学生平均每天的睡眠时间即可得出结果;
- (2) 由中位数的定义即可得出结论;
- (3) 由学校总人数 $\times$ 该校学生中睡眠时间符合要求的人数所占的比例, 即可得出结果.

【解答】 解: (1) $7 \leq t < 8$ 时, 频数为 $m = 7$;

$9 \leq t < 10$ 时, 频数为 $n = 18$;

$$\therefore a = \frac{7}{40} \times 100\% = 17.5\%; \quad b = \frac{18}{40} \times 100\% = 45\%;$$

故答案为：7，18，17.5%，45%；

(2) 由统计表可知，抽取的这40名学生平均每天睡眠时间的中位数为第20个和第21个数据的平均数，

$\therefore$ 落在第3组；

故答案为：3；

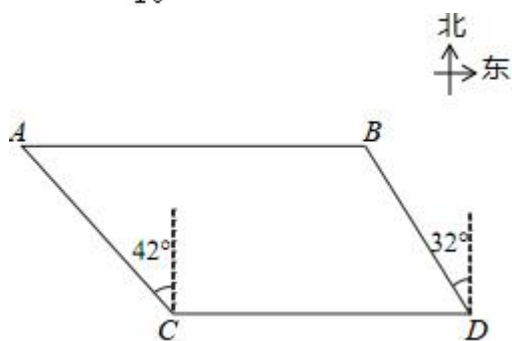
$$(3) \text{ 该校学生中睡眠时间符合要求的人数为 } 800 \times \frac{18+4}{40} = 440 \text{ (人)};$$

答：估计该校学生中睡眠时间符合要求的人数为440人.

【点评】 本题考查了统计图的有关知识，解题的关键是仔细地审题，从图中找到进一步解题的信息.

19. (6分) 如图，某旅游景区为方便游客，修建了一条东西走向的木栈道 AB ，栈道 AB 与景区道路 CD 平行. 在 C 处测得栈道一端 A 位于北偏西 42° 方向，在 D 处测得栈道另一端 B 位于北偏西 32° 方向. 已知 $CD = 120m$ ， $BD = 80m$ ，求木栈道 AB 的长度 (结果保留整数).

$$(\text{参考数据: } \sin 32^\circ \approx \frac{17}{32}, \cos 32^\circ \approx \frac{17}{20}, \tan 32^\circ \approx \frac{5}{8}, \sin 42^\circ \approx \frac{27}{40}, \cos 42^\circ \approx \frac{3}{4}, \tan 42^\circ \approx \frac{9}{10})$$



【分析】 过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ， $DF \perp AB$ 交 AB 的延长线于 F ，于是得到 $CE \parallel DF$ ，推出四边形 $CDFE$ 是矩形，得到 $EF = CD = 120$ ， $DF = CE$ ，解直角三角形即可得到结论.

【解答】 解：过 C 作 $CE \perp AB$ 于 E ， $DF \perp AB$ 交 AB 的延长线于 F ，
则 $CE \parallel DF$ ，

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$\therefore$ 四边形 $CDFE$ 是矩形，

$$\therefore EF = CD = 120, \quad DF = CE,$$

在 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中, $\because \angle BDF = 32^\circ$, $BD = 80$,

$$\therefore DF = \cos 32^\circ \cdot BD = 80 \times \frac{17}{20} \approx 68, \quad BF = \sin 32^\circ \cdot BD = 80 \times \frac{17}{32} \approx \frac{85}{2},$$

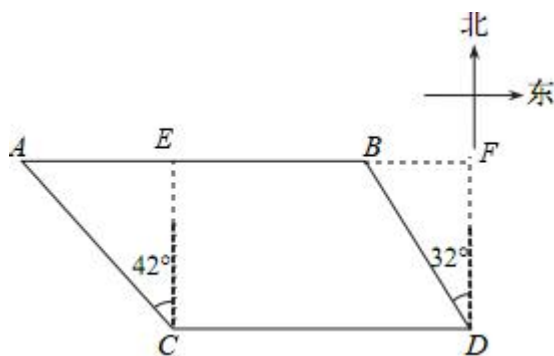
$$\therefore BE = EF - BF = \frac{155}{2},$$

在 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中, $\because \angle ACE = 42^\circ$, $CE = DF = 68$,

$$\therefore AE = CE \cdot \tan 42^\circ = 68 \times \frac{9}{10} = \frac{306}{5},$$

$$\therefore AB = AE + BE = \frac{155}{2} + \frac{306}{5} \approx 134m,$$

答: 木栈道 AB 的长度约为 $134m$.



【点评】 本题考查解直角三角形—方向角问题, 解题的关键是学会添加常用辅助线. 构造直角三角形解决问题, 属于中考常考题型.

20. (8分) 甲、乙两人加工同一种零件, 甲每天加工的数量是乙每天加工数量的 1.5 倍, 两人各加工 600 个这种零件, 甲比乙少用 5 天.

(1) 求甲、乙两人每天各加工多少个这种零件?

(2) 已知甲、乙两人加工这种零件每天的加工费分别是 150 元和 120 元, 现有 3000 个这种零件的加工任务, 甲单独加工一段时间后另有安排, 剩余任务由乙单独完成. 如果总加工费不超过 7800 元, 那么甲至少加工了多少天?

【分析】 (1) 设乙每天加工 x 个零件, 则甲每天加工 $1.5x$ 个零件, 根据甲比乙少用 5 天, 列分式方程求解;

(2) 设甲加工了 x 天, 乙加工了 y 天, 根据 3000 个零件, 列方程; 根据总加工费不超过 7800 元, 列不等式, 方程和不等式综合考虑求解即可.

【解答】 解: (1) 设乙每天加工 x 个零件, 则甲每天加工 $1.5x$ 个零件, 由题意得: $\frac{600}{x} =$

$$\frac{600}{1.5x} + 5$$

化简得 $600 \times 1.5 = 600 + 5 \times 1.5x$

解得 $x = 40$

$$\therefore 1.5x = 60$$

经检验, $x = 40$ 是分式方程的解且符合实际意义.

答: 甲每天加工 60 个零件, 乙每天加工, 40 个零件.

(2) 设甲加工了 x 天, 乙加工了 y 天, 则由题意得

$$\begin{cases} 60x + 40y = 3000 & \text{①} \\ 150x + 120y \leq 7800 & \text{②} \end{cases}$$

由①得 $y = 75 - 1.5x$ ③

将③代入②得 $150x + 120(75 - 1.5x) \leq 7800$

解得 $x \geq 40$,

当 $x = 40$ 时, $y = 15$, 符合问题的实际意义.

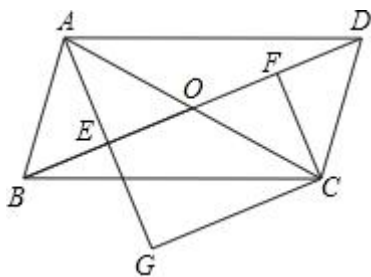
答: 甲至少加工了 40 天.

【点评】 本题是分式方程与不等式的实际应用题, 题目数量关系清晰, 难度不大.

21. (8 分) 如图, 在 $\square ABCD$ 中, 对角线 AC 与 BD 相交于点 O , 点 E, F 分别为 OB, OD 的中点, 延长 AE 至 G , 使 $EG = AE$, 连接 CG .

(1) 求证: $\triangle ABE \cong \triangle CDF$;

(2) 当 AB 与 AC 满足什么数量关系时, 四边形 $EGCF$ 是矩形? 请说明理由.



【分析】 (1) 由平行四边形的性质得出 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $OB = OD$, $OA = OC$, 由平行线的性质得出 $\angle ABE = \angle CDF$, 证出 $BE = DF$, 由 SAS 证明 $\triangle ABE \cong \triangle CDF$ 即可;

(2) 证出 $AB = OA$, 由等腰三角形的性质得出 $AG \perp OB$, $\angle OEG = 90^\circ$, 同理: $CF \perp OD$, 得出 $EG \parallel CF$, 由三角形中位线定理得出 $OE \parallel CG$, $EF \parallel CG$, 得出四边形 $EGCF$ 是平行四边形, 即可得出结论.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,

$$\therefore AB = CD, AB \parallel CD, OB = OD, OA = OC,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CDF,$$

$\because$ 点 E, F 分别为 OB, OD 的中点,

$$\therefore BE = \frac{1}{2}OB, \quad DF = \frac{1}{2}OD,$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 和 } \triangle CDF \text{ 中, } \begin{cases} AB=CD \\ \angle BAE=\angle CDF \\ BE=DF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CDF \text{ (SAS)};$$

(2) 解: 当 $AC=2AB$ 时, 四边形 $EGCF$ 是矩形; 理由如下:

$$\because AC=2OA, \quad AC=2AB,$$

$$\therefore AB=OA,$$

$\therefore E$ 是 OB 的中点,

$$\therefore AG \perp OB,$$

$$\therefore \angle OEG = 90^\circ,$$

同理: $CF \perp OD$,

$$\therefore AG \parallel CF,$$

$$\therefore EG \parallel CF,$$

$$\because EG=AE, \quad OA=OC,$$

$\therefore OE$ 是 $\triangle ACG$ 的中位线,

$$\therefore OE \parallel CG,$$

$$\therefore EF \parallel CG,$$

$\therefore$ 四边形 $EGCF$ 是平行四边形,

$$\because \angle OEG = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $EGCF$ 是矩形.

【点评】 本题考查了矩形的判定、平行四边形的性质和判定、全等三角形的判定、三角形中位线定理等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

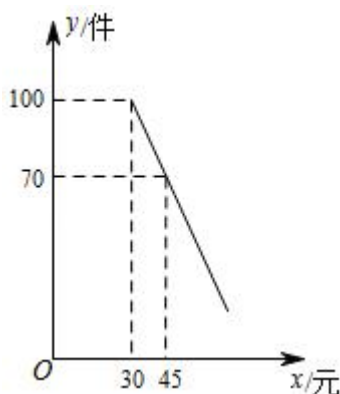
22. (10 分) 某商店购进一批成本为每件 30 元的商品, 经调查发现, 该商品每天的销售量 y (件) 与销售单价 x (元) 之间满足一次函数关系, 其图象如图所示.

(1) 求该商品每天的销售量 y 与销售单价 x 之间的函数关系式;

(2) 若商店按单价不低于成本价, 且不低于 50 元销售, 则销售单价定为多少, 才能使销售该商品每天获得的利润 w (元) 最大? 最大利润是多少?

(3) 若商店要使销售该商品每天获得的利润不低于 800 元, 则每天的销售量最少应为多

少件?



【分析】(1) 将点 $(30, 100)$ 、 $(45, 70)$ 代入一次函数表达式，即可求解；

(2) 由题意得 $w = (x - 30)(-2x + 160) = -2(x - 55)^2 + 1250$ ，即可求解；

(3) 由题意得 $(x - 30)(-2x + 160) \geq 800$ ，解不等式即可得到结论.

【解答】解：(1) 设 y 与销售单价 x 之间的函数关系式为： $y = kx + b$ ，

将点 $(30, 100)$ 、 $(45, 70)$ 代入一次函数表达式得：
$$\begin{cases} 100 = 30k + b \\ 70 = 45k + b \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} k = -2 \\ b = 160 \end{cases}$$

故函数的表达式为： $y = -2x + 160$ ；

(2) 由题意得： $w = (x - 30)(-2x + 160) = -2(x - 55)^2 + 1250$ ，

$\because -2 < 0$ ，故当 $x < 55$ 时， w 随 x 的增大而增大，而 $30 \leq x \leq 50$ ，

$\therefore$ 当 $x = 50$ 时， w 由最大值，此时， $w = 1200$ ，

故销售单价定为 50 元时，该超市每天的利润最大，最大利润 1200 元；

(3) 由题意得： $(x - 30)(-2x + 160) \geq 800$ ，

解得： $x \leq 70$ ，

$\therefore$ 每天的销售量 $y = -2x + 160 \geq 20$ ，

$\therefore$ 每天的销售量最少应为 20 件.

【点评】此题主要考查了二次函数的应用以及一元二次不等式的应用、待定系数法求一次函数解析式等知识，正确利用销量 $\times$ 每件的利润 $= w$ 得出函数关系式是解题关键.

23. (10 分) 问题提出：

如图，图①是一张由三个边长为 1 的小正方形组成的“L”形纸片，图②是一张 $a \times b$ 的方格纸 ($a \times b$ 的方格纸指边长分别为 a, b 的矩形，被分成 $a \times b$ 个边长为 1 的小正方形，其中 $a \geq 2, b \geq 2$ ，且 a, b 为正整数). 把图①放置在图②中，使它恰好盖住图②中的三

个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

问题探究：

为探究规律，我们采用一般问题特殊化的策略，先从最简单的情形入手，再逐次递进，最后得出一般性的结论.

探究一：

把图①放置在 2×2 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

如图③，对于 2×2 的方格纸，要用图①盖住其中的三个小正方形，显然有 4 种不同的放置方法.

探究二：

把图①放置在 3×2 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

如图④，在 3×2 的方格纸中，共可以找到 2 个位置不同的 2×2 方格，依据探究一的结论可知，把图①放置在 3×2 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有 $2 \times 4 = 8$ 种不同的放置方法.

探究三：

把图①放置在 $a \times 2$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

如图⑤，在 $a \times 2$ 的方格纸中，共可以找到 $(a-1)$ 个位置不同的 2×2 方格，依据探究一的结论可知，把图①放置在 $a \times 2$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有 $(4a-4)$ 种不同的放置方法.

探究四：

把图①放置在 $a \times 3$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的放置方法？

如图⑥，在 $a \times 3$ 的方格纸中，共可以找到 $(2a-2)$ 个位置不同的 2×2 方格，依据探究一的结论可知，把图①放置在 $a \times 3$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有 $(8a-8)$ 种不同的放置方法.

.....

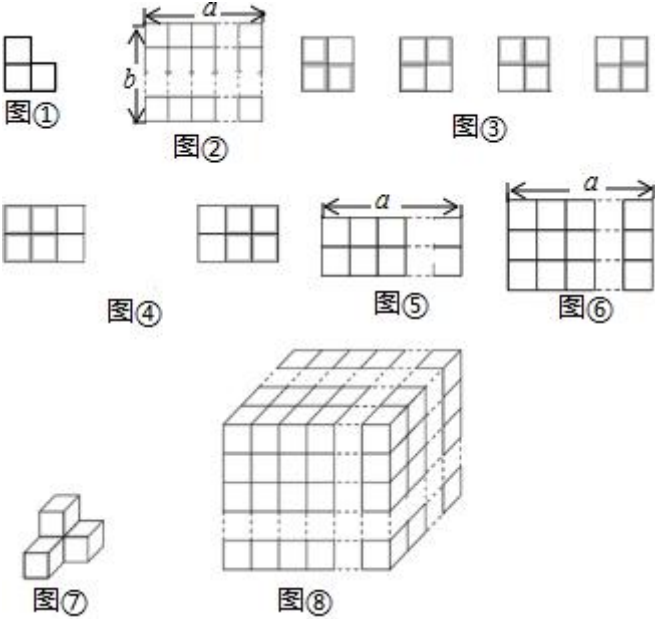
问题解决：

把图①放置在 $a \times b$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有多少种不同的

放置方法？（仿照前面的探究方法，写出解答过程，不需画图.）

问题拓展：

如图，图⑦是一个由 4 个棱长为 1 的小立方体构成的几何体，图⑧是一个长、宽、高分别为 a, b, c ($a \geq 2, b \geq 2, c \geq 2$ ，且 a, b, c 是正整数) 的长方体，被分成了 $a \times b \times c$ 个棱长为 1 的小立方体. 在图⑧的不同位置共可以找到 $8(a-1)(b-1)(c-1)$ 个图⑦这样的几何体.



【分析】 对于图形的变化类的规律题，首先应找出图形哪些部分发生了变化，是按照什么规律变化的，通过分析找到各部分的变化规律后直接利用规律求解. 探寻规律要仔细观察、仔细思考，善用联想来解决这类问题.

【解答】 解：探究三：

根据探究二， $a \times 2$ 的方格纸中，共可以找到 $(a-1)$ 个位置不同的 2×2 方格，

根据探究一结论可知，每个 2×2 方格中有 4 种放置方法，所以在 $a \times 2$ 的方格纸中，共可以找到 $(a-1) \times 4 = (4a-4)$ 种不同的放置方法；

故答案为 $a-1, 4a-4$ ；

探究四：

与探究三相比，本题矩形的宽改变了，可以沿用上一问的思路：边长为 a ，有 $(a-1)$ 条边长为 2 的线段，

同理，边长为 3，则有 $3-1=2$ 条边长为 2 的线段，

所以在 $a \times 3$ 的方格中，可以找到 $2(a-1) = (2a-2)$ 个位置不同的 2×2 方格，

根据探究一，在在 $a \times 3$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有 $(2a-2) \times 4 = (8a-8)$ 种不同的放置方法.

故答案为 $2a-2$, $8a-8$;

问题解决:

在 $a \times b$ 的方格纸中，共可以找到 $(a-1)(b-1)$ 个位置不同的 2×2 方格，

依照探究一的结论可知，把图①放置在 $a \times b$ 的方格纸中，使它恰好盖住其中的三个小正方形，共有 $4(a-1)(b-1)$ 种不同的放置方法；

问题拓展:

发现图⑦是棱长为 2 的正方体中的一部分，利用前面的思路，

这个长方体的长宽高分别为 a 、 b 、 c ，则分别可以找到 $(a-1)$ 、 $(b-1)$ 、 $(c-1)$ 条边长为 2 的线段，

所以在 $a \times b \times c$ 的长方体共可以找到 $(a-1)(b-1)(c-1)$ 位置不同的 $2 \times 2 \times 2$ 的正方体，

再根据探究一类比发现，每个 $2 \times 2 \times 2$ 的正方体有 8 种放置方法，

所以在 $a \times b \times c$ 的长方体中共可以找到 $8(a-1)(b-1)(c-1)$ 个图⑦这样的几何体；

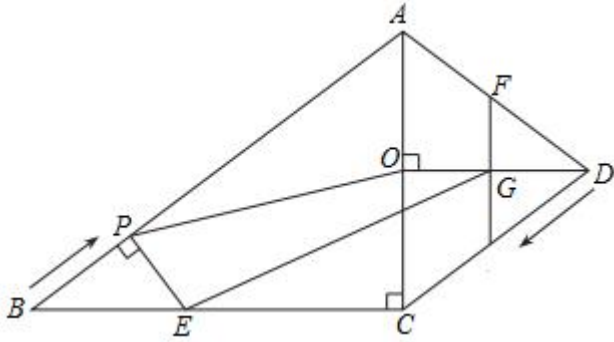
故答案为 $8(a-1)(b-1)(c-1)$.

【点评】 此题考查了平面图形的有规律变化，要求学生通过观察图形，分析、归纳并发现其中的规律，并应用规律解决问题是解题的关键.

24. (12 分) 已知：如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ， OD 垂直平分 AC . 点 P 从点 B 出发，沿 BA 方向匀速运动，速度为 1cm/s ；同时，点 Q 从点 D 出发，沿 DC 方向匀速运动，速度为 1cm/s ；当一个点停止运动，另一个点也停止运动. 过点 P 作 $PE \perp AB$ ，交 BC 于点 E ，过点 Q 作 $QF \parallel AC$ ，分别交 AD ， OD 于点 F ， G . 连接 OP ， EG . 设运动时间为 t (s) ($0 < t < 5$)，解答下列问题：

- (1) 当 t 为何值时，点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上？
- (2) 设四边形 $PEGO$ 的面积为 S (cm^2)，求 S 与 t 的函数关系式；
- (3) 在运动过程中，是否存在某一时刻 t ，使四边形 $PEGO$ 的面积最大？若存在，求出 t 的值；若不存在，请说明理由；
- (4) 连接 OE ， OQ ，在运动过程中，是否存在某一时刻 t ，使 $OE \perp OQ$ ？若存在，求出 t

的值；若不存在，请说明理由.



【分析】(1) 当点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上时，因为 $EP \perp AB$ ， $EC \perp AC$ ，可得 $PE = EC$ ，由此构建方程即可解决问题.

(2) 根据 $S_{\text{四边形} OPEG} = S_{\triangle OEG} + S_{\triangle OPE} = S_{\triangle OEG} + (S_{\triangle OPC} + S_{\triangle PCE} - S_{\triangle OEC})$ 构建函数关系式即可.

(3) 利用二次函数的性质解决问题即可.

(4) 证明 $\angle EOC = \angle QOG$ ，可得 $\tan \angle EOC = \tan \angle QOG$ ，推出 $\frac{EC}{OC} = \frac{GQ}{OG}$ ，由此构建方程

即可解决问题.

【解答】解：(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\because \angle ACB = 90^\circ$ ， $AB = 10\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6 \text{ (cm)},$$

$\because OD$ 垂直平分线段 AC ，

$$\therefore OC = OA = 3 \text{ (cm)}, \quad \angle DOC = 90^\circ,$$

$\because CD \parallel AB$ ，

$$\therefore \angle BAC = \angle DCO,$$

$$\because \angle DOC = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle DOC \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{AC}{OC} = \frac{AB}{CD} = \frac{BC}{OD},$$

$$\therefore \frac{6}{3} = \frac{10}{CD} = \frac{8}{OD},$$

$$\therefore CD = 5 \text{ (cm)}, \quad OD = 4 \text{ (cm)},$$

$$\because PB = t, \quad PE \perp AB,$$

$$\text{易知: } PE = \frac{3}{4}t, \quad BE = \frac{5}{4}t,$$

当点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上时，

$$\because EP \perp AB, \quad EC \perp AC,$$

$$\therefore PE = EC,$$

$$\therefore \frac{3}{4}t = 8 - \frac{5}{4}t,$$

$$\therefore t = 4.$$

$\therefore$ 当 t 为 4 秒时, 点 E 在 $\angle BAC$ 的平分线上.

(2) 如图, 连接 OE , PC .

$$\begin{aligned} S_{\text{四边形 } OPEG} &= S_{\triangle OEG} + S_{\triangle OPE} = S_{\triangle OEG} + (S_{\triangle OPC} + S_{\triangle PCE} - S_{\triangle OEC}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot (4 - \frac{4}{5}t) \cdot 3 + [\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (8 - \frac{4}{5}t) + \frac{1}{2} \cdot (8 - \frac{5}{4}t) \cdot \frac{3}{5}t - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (8 - \frac{5}{4}t)] \\ &= -\frac{8}{3}t^2 + \frac{15}{3}t + 16 \quad (0 < t < 5). \end{aligned}$$

(3) 存在.

$$\therefore S = -\frac{8}{3}(t - \frac{5}{2})^2 + \frac{68}{3} \quad (0 < t < 5),$$

$$\therefore t = \frac{5}{2} \text{ 时, 四边形 } OPEG \text{ 的面积最大, 最大值为 } \frac{68}{3}.$$

(4) 存在. 如图, 连接 OQ .

$$\therefore OE \perp OQ,$$

$$\therefore \angle EOC + \angle QOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QOC + \angle QOG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOC = \angle QOG,$$

$$\therefore \tan \angle EOC = \tan \angle QOG,$$

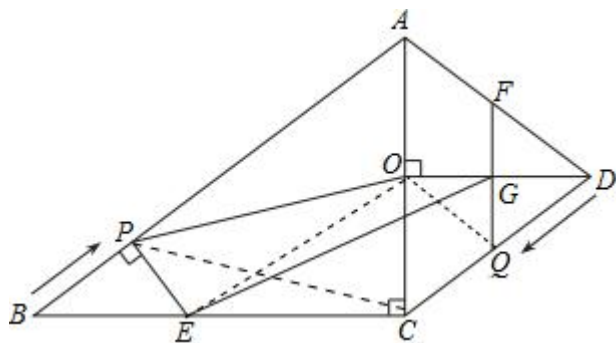
$$\therefore \frac{EC}{OC} = \frac{GQ}{OG},$$

$$\therefore \frac{8 - \frac{5}{4}t}{3} = \frac{\frac{3}{5}t}{4 - \frac{4}{5}t},$$

$$\text{整理得: } 5t^2 - 66t + 160 = 0,$$

$$\text{解得 } t = \frac{16}{5} \text{ 或 } 10 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{16}{5} \text{ 秒时, } OE \perp OQ.$$



【点评】本题属于四边形综合题，考查了解直角三角形，相似三角形的判定和性质，锐角三角函数，多边形的面积等知识，解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题，属于中考常考题型.

积分超值换

活动时间：2019年4月23日-6月30日
活动对象：中小学一线教师以及教育工作者



扫一扫 换礼啦

积 分 兑 换 更 超 值



会员升级服务第一拨 · 清北季



神马，有清华北大学霸方法论课；还有清华学霸向所有的父母亲述自己求学之路；

衡水名校试卷悄悄的上线了；

扫qq领取官网不首发课程，很多人我没告诉他啊！

会员qq专享等你来撩.....