

2019 年山东省烟台市中考数学试卷

一、选择题（本题共 12 个小题,每小题 3 分,满分 36 分）每小题都给出标号为 A, B, C, D 四个备选答案,其中有且只有一个是正确的.

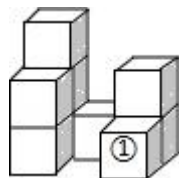
1. (3 分) -8 的立方根是 ()

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $-2\sqrt{2}$

2. (3 分) 下列智能手机的功能图标中,既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



3. (3 分) 如图所示的几何体是由 9 个大小相同的小正方体组成的,将小正方体①移走后,所得几何体的三视图没有发生变化的是 ()



- A. 主视图和左视图 B. 主视图和俯视图
C. 左视图和俯视图 D. 主视图、左视图、俯视图

4. (3 分) 将一枚飞镖任意投掷到如图所示的正六边形镖盘上,飞镖落在白色区域的概率为 ()



- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{5}$ D. 无法确定

5. (3 分) 某种计算机完成一次基本运算的时间约为 1 纳秒(ns),已知 1 纳秒 = 0.000 000 001 秒,该计算机完成 15 次基本运算,所用时间用科学记数法表示为 ()

- A. 1.5×10^{-9} 秒 B. 15×10^{-9} 秒 C. 1.5×10^{-8} 秒 D. 15×10^{-8} 秒

6. (3 分) 当 $b+c=5$ 时,关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx-c=0$ 的根的情况为 ()

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 没有实数根 D. 无法确定

7. (3 分) 某班有 40 人,一次体能测试后,老师对测试成绩进行了统计.由于小亮没有参

加本次集体测试因此计算其他 39 人的平均分为 90 分，方差 $s^2 = 41$ ．后来小亮进行了补测，成绩为 90 分，关于该班 40 人的测试成绩，下列说法正确的是（ ）

- A. 平均分不变，方差变大 B. 平均分不变，方差变小
C. 平均分和方差都不变 D. 平均分和方差都改变

8. (3 分) 已知 $\angle AOB = 60^\circ$ ，以 O 为圆心，以任意长为半径作弧，交 OA , OB 于点 M , N ，分别以点 M , N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长度为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 P ，以 OP 为边作 $\angle POC = 15^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数为（ ）

- A. 15° B. 45° C. 15° 或 30° D. 15° 或 45°

9. (3 分) 南宋数学家杨辉在其著作《详解九章算法》中揭示了 $(a+b)^n$ (n 为非负整数) 展开式的项数及各项系数的有关规律如下，后人也将右表称为“杨辉三角”

$$(a+b)^0 = 1$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

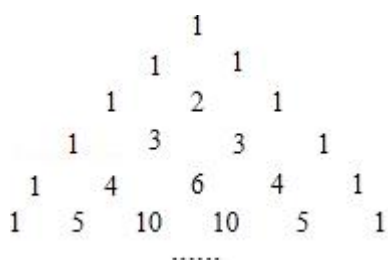
$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

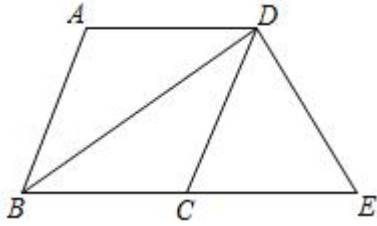
...

则 $(a+b)^9$ 展开式中所有项的系数和是（ ）



- A. 128 B. 256 C. 512 D. 1024

10. (3 分) 如图，面积为 24 的 $\square ABCD$ 中，对角线 BD 平分 $\angle ABC$ ，过点 D 作 $DE \perp BD$ 交 BC 的延长线于点 E ， $DE = 6$ ，则 $\sin \angle DCE$ 的值为（ ）



- A. $\frac{24}{25}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{12}{25}$

11. (3分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的 y 与 x 的部分对应值如表:

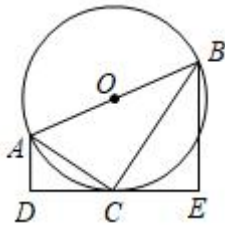
x	-1	0	2	3	4
y	5	0	-4	-3	0

下列结论: ①抛物线的开口向上; ②抛物线的对称轴为直线 $x = 2$; ③当 $0 < x < 4$ 时, $y > 0$; ④抛物线与 x 轴的两个交点间的距离是 4; ⑤若 $A(x_1, 2)$, $B(x_2, 3)$ 是抛物线上两点, 则 $x_1 < x_2$, 其中正确的个数是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

12. (3分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 直线 DE 与 $\odot O$ 相切于点 C , 过 A, B 分别作 $AD \perp DE$,

$BE \perp DE$, 垂足为点 D, E , 连接 AC, BC , 若 $AD = \sqrt{3}$, $CE = 3$, 则 $\widehat{AC}$ 的长为 ()



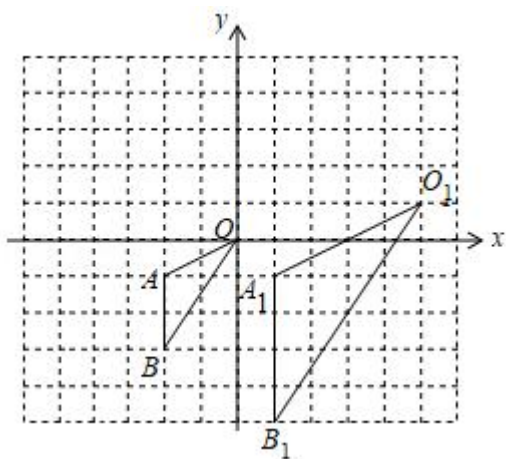
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

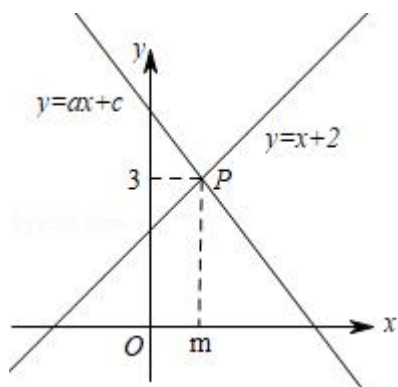
13. (3分) $|-6| \times 2^{-1} - \sqrt{2} \cos 45^\circ =$ _____.

14. (3分) 若关于 x 的分式方程 $\frac{3x}{x-2} - 1 = \frac{m+3}{x-2}$ 有增根, 则 m 的值为_____.

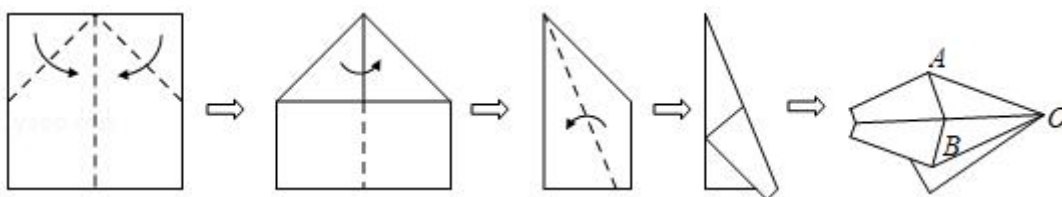
15. (3分) 如图, 在直角坐标系中, 每个小正方形的边长均为 1 个单位长度, $\triangle ABO$ 的顶点坐标分别为 $A(-2, -1)$, $B(-2, -3)$, $O(0, 0)$, $\triangle A_1B_1O_1$ 的顶点坐标分别为 $A_1(1, -1)$, $B_1(1, -5)$, $O_1(5, 1)$, $\triangle ABO$ 与 $\triangle A_1B_1O_1$ 是以点 P 为位似中心的位似图形, 则 P 点的坐标为_____.



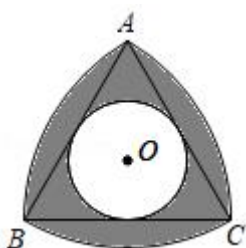
16. (3分) 如图, 直线 $y = x + 2$ 与直线 $y = ax + c$ 相交于点 $P(m, 3)$, 则关于 x 的不等式 $x + 2 \leq ax + c$ 的解为_____.



17. (3分) 小明将一张正方形纸片按如图所示顺序折叠成纸飞机, 当机翼展开在同一平面时 (机翼间无缝隙), $\angle AOB$ 的度数是_____.



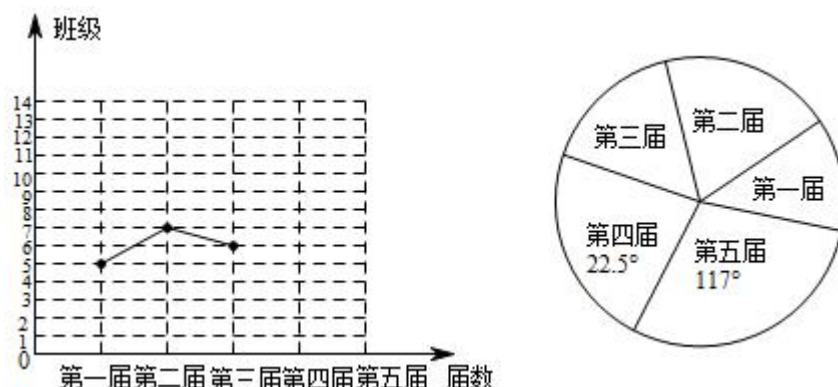
18. (3分) 如图, 分别以边长为 2 的等边三角形 ABC 的三个顶点为圆心, 以边长为半径作弧, 三段弧所围成的图形是一个曲边三角形, 已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 则阴影部分面积为_____.



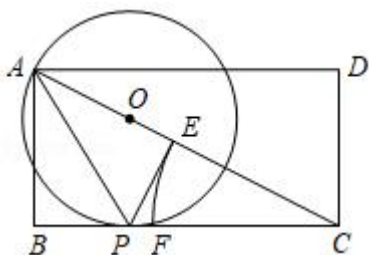
三、解答题（本大题共 7 个小题，满分 66 分）

19.（6 分）先化简 $(x+3 - \frac{7}{x-3}) \div \frac{2x^2-8x}{x-3}$ ，再从 $0 \leq x \leq 4$ 中选一个适合的整数代入求值.

20.（8 分）十八大以来，某校已举办五届校园艺术节，为了弘扬中华优秀传统文化，每届艺术节上都有一些班级表演“经典诵读”“民乐演奏”、“歌曲联唱”、“民族舞蹈”等节目.小颖对每届艺术节表演这些节目的班级数进行统计，并绘制了如图所示不完整的折线统计图和扇形统计图.



- (1) 五届艺术节共有_____个班级表演这些节目，班数的中位数为_____，在扇形统计图中，第四届班级数的扇形圆心角的度数为_____；
- (2) 补全折线统计图；
- (3) 第六届艺术节，某班决定从这四项艺术形式中任选两项表演（“经典诵读”、“民乐演奏”、“歌曲联唱”、“民族舞蹈”分别用 A, B, C, D 表示），利用树状图或表格求出该班选择 A 和 D 两项的概率.
- 21.（9 分）亚洲文明对话大会召开期间，大批的大学生志愿者参与服务工作. 某大学计划组织本校全体志愿者统一乘车去会场，若单独调配 36 座新能源客车若干辆，则有 2 人没有座位；若只调配 22 座新能源客车，则用车数量将增加 4 辆，并空出 2 个座位.
- (1) 计划调配 36 座新能源客车多少辆？该大学共有多少名志愿者？
- (2) 若同时调配 36 座和 22 座两种车型，既保证每人有座，又保证每车不空座，则两种车型各需多少辆？
- 22.（9 分）如图，在矩形 $ABCD$ 中， $CD=2$ ， $AD=4$ ，点 P 在 BC 上，将 $\triangle ABP$ 沿 AP 折叠，点 B 恰好落在对角线 AC 上的 E 点， O 为 AC 上一点， $\odot O$ 经过点 A, P
- (1) 求证： BC 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 在边 CB 上截取 $CF=CE$ ，点 F 是线段 BC 的黄金分割点吗？请说明理由.



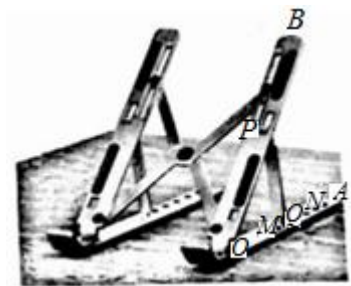
23. (10分) 如图所示, 一种适用于笔记本电脑的铝合金支架, 边 OA , OB 可绕点 O 开合, 在 OB 边上有一固定点 P , 支柱 PQ 可绕点 P 转动, 边 OA 上有六个卡孔, 其中离点 O 最近的卡孔为 M , 离点 O 最远的卡孔为 N . 当支柱端点 Q 放入不同卡孔内, 支架的倾斜角发生变化. 将电脑放在支架上, 电脑台面的角度可达到六档调节, 这样更有利于工作和身体健康, 现测得 OP 的长为 12cm , OM 为 10cm , 支柱 PQ 为 8m .

(1) 当支柱的端点 Q 放在卡孔 M 处时, 求 $\angle AOB$ 的度数;

(2) 当支柱的端点 Q 放在卡孔 N 处时, $\angle AOB = 20.5^\circ$, 若相邻两个卡孔的距离相同, 求此间距. (结果精确到十分位)

参考数据表

计算器按键顺序	计算结果 (已取近似值)
$\sqrt{\quad} \quad 7 \quad =$	2.65
$\sqrt{\quad} \quad 4 \quad 6 \quad \cdot \quad 3 \quad 6 \quad =$	6.8
$\sqrt{\quad} \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad \cdot \quad 3 \quad 6 \quad =$	11.24
$\sin \quad 2 \quad 0 \quad \cdot \quad 5 \quad =$	0.35
$\cos \quad 2 \quad 0 \quad \cdot \quad 5 \quad =$	0.937
$2\text{ndF} \quad \sin \quad 0 \quad \cdot \quad 6 \quad 6 \quad =$	41
$2\text{ndF} \quad \cos \quad 0 \quad \cdot \quad 6 \quad 6 \quad =$	49
$2\text{ndF} \quad \sin \quad 0 \quad \cdot \quad 7 \quad 5 \quad =$	49
$2\text{ndF} \quad \cos \quad 0 \quad \cdot \quad 7 \quad 5 \quad =$	41



24. (11分)【问题探究】

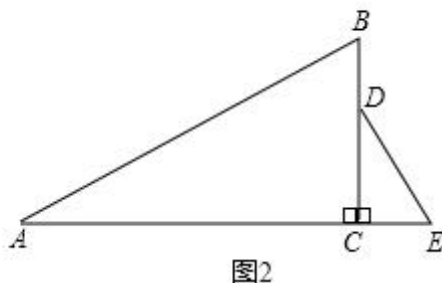
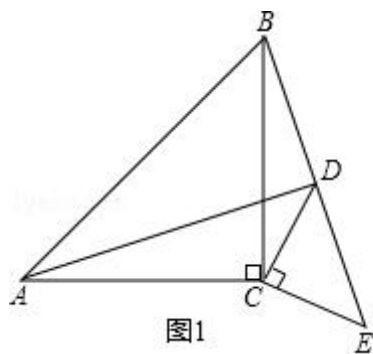
(1) 如图1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 均为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 点 B, D, E 在同一直线上, 连接 AD, BD .

①请探究 AD 与 BD 之间的位置关系: _____;

②若 $AC = BC = \sqrt{10}$, $DC = CE = \sqrt{2}$, 则线段 AD 的长为_____;

【拓展延伸】

(2) 如图2, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 均为直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $AC = \sqrt{21}$, $BC = \sqrt{7}$, $CD = \sqrt{3}$, $CE = 1$. 将 $\triangle DCE$ 绕点 C 在平面内顺时针旋转, 设旋转角 $\angle BCD$ 为 α ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$), 作直线 BD , 连接 AD , 当点 B, D, E 在同一直线上时, 画出图形, 并求线段 AD 的长.

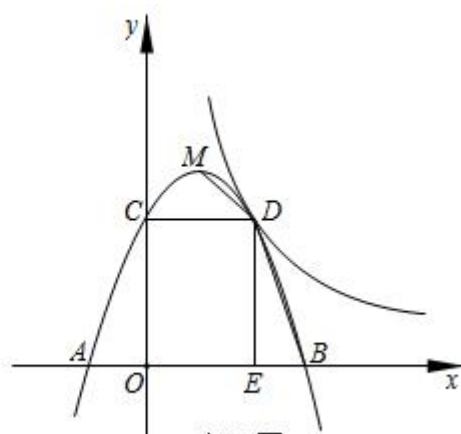
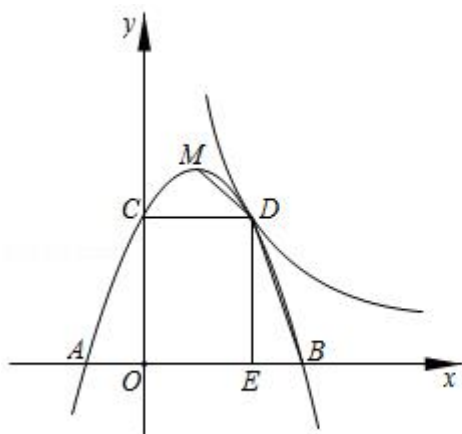


25. (13分) 如图, 顶点为 M 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴交抛物线于另一点 D , 作 $DE \perp x$ 轴, 垂足为点 E , 双曲线 $y = \frac{6}{x}$ ($x > 0$) 经过点 D , 连接 MD, BD .

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 N, F 分别是 x 轴, y 轴上的两点, 当以 M, D, N, F 为顶点的四边形周长最小时, 求出点 N, F 的坐标;

(3) 动点 P 从点 O 出发, 以每秒1个单位长度的速度沿 OC 方向运动, 运动时间为 t 秒, 当 t 为何值时, $\angle BPD$ 的度数最大? (请直接写出结果)



备用图

2019 年山东省烟台市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 12 个小题,每小题 3 分,满分 36 分）每小题都给出标号为 A, B, C, D 四个备选答案,其中有且只有一个是正确的.

1. (3 分) -8 的立方根是 ()

A. 2

B. -2

C. ± 2

D. $-2\sqrt{2}$

【分析】如果一个数 x 的立方等于 a , 那么 x 是 a 的立方根, 根据此定义求解即可.

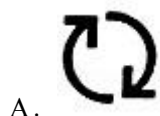
【解答】解: $\because -2$ 的立方等于 -8 ,

$\therefore -8$ 的立方根等于 -2 .

故选: B.

【点评】本题主要考查了立方根的定义, 求一个数的立方根, 应先找出所要求的这个数是哪一个数的立方. 由开立方和立方是互逆运算, 用立方的方法求这个数的立方根. 注意一个数的立方根与原数的性质符号相同.

2. (3 分) 下列智能手机的功能图标中, 既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【分析】根据轴对称图形和中心对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【解答】解: A、不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故本选项错误;

B、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故本选项错误;

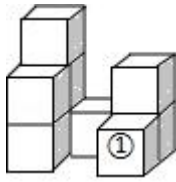
C、既是轴对称图形, 也是中心对称图形, 故本选项正确;

D、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故本选项错误.

故选: C.

【点评】本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合, 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180° 度后两部分重合.

3. (3 分) 如图所示的几何体是由 9 个大小相同的小正方体组成的, 将小正方体①移走后, 所得几何体的三视图没有发生变化的是 ()



A. 主视图和左视图

B. 主视图和俯视图

C. 左视图和俯视图

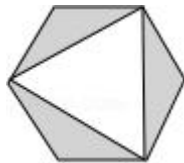
D. 主视图、左视图、俯视图

【分析】根据从正面看得到的图形是主视图，从上面看得到的图形是俯视图，从左边看得到的图形是左视图，可得答案．

【解答】解：将正方体①移走后，主视图不变，俯视图变化，左视图不变，
故选：A．

【点评】本题考查了简单组合体的三视图，从正面看得到的图形是主视图，从上面看得到的图形是俯视图，从左边看得到的图形是左视图．

4. (3分) 将一枚飞镖任意投掷到如图所示的正六边形镖盘上，飞镖落在白色区域的概率为 ()



A. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{5}$

D. 无法确定

【分析】随机事件 A 的概率 $P(A) = \text{事件 } A \text{ 可能出现的结果数} \div \text{所有可能出现的结果数}$ ．

【解答】解：设正六边形边长为 a ，则灰色部分面积为 $3 \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3}a \times \frac{1}{2}a = \frac{3}{4}\sqrt{3}a^2$ ，

白色区域面积为 $\frac{1}{2}\sqrt{3}a \times \frac{3}{2}a = \frac{3}{4}\sqrt{3}a^2$ ，

所以正六边形面积为 $\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$ ，

镖落在白色区域的概率 $P = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{3}a^2}{\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2} = \frac{1}{2}$ ，

故选：B．

【点评】本题考查了概率，熟练掌握概率公式是解题的关键．

5. (3分) 某种计算机完成一次基本运算的时间约为 1 纳秒 (ns)，已知 1 纳秒 = 0.000 000 001 秒，该计算机完成 15 次基本运算，所用时间用科学记数法表示为 ()

- A. 1.5×10^{-9} 秒 B. 15×10^{-9} 秒 C. 1.5×10^{-8} 秒 D. 15×10^{-8} 秒

【分析】绝对值小于 1 的正数也可以利用科学记数法表示，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂，指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定。

【解答】解：所用时间 $= 15 \times 0.000\ 000\ 001 = 1.5 \times 10^{-8}$ 。

故选：C。

【点评】本题考查用科学记数法表示较小的数，一般形式为 $a \times 10^{-n}$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定。

6. (3 分) 当 $b+c=5$ 时，关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx-c=0$ 的根的情况为 ()

- A. 有两个不相等的实数根 B. 有两个相等的实数根
C. 没有实数根 D. 无法确定

【分析】由 $b+c=5$ 可得出 $c=5-b$ ，根据方程的系数结合根的判别式可得出 $\Delta = (b-6)^2+24$ ，由偶次方的非负性可得出 $(b-6)^2+24 > 0$ ，即 $\Delta > 0$ ，由此即可得出关于 x 的一元二次方程 $3x^2+bx-c=0$ 有两个不相等的实数根。

【解答】解： $\because b+c=5$ ，

$$\therefore c=5-b.$$

$$\Delta = b^2 - 4 \times 3 \times (-c) = b^2 + 12c = b^2 - 12b + 60 = (b-6)^2 + 24.$$

$$\because (b-6)^2 \geq 0,$$

$$\therefore (b-6)^2 + 24 > 0,$$

$$\therefore \Delta > 0,$$

$$\therefore \text{关于 } x \text{ 的一元二次方程 } 3x^2+bx-c=0 \text{ 有两个不相等的实数根.}$$

故选：A。

【点评】本题考查了根的判别式，牢记“当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的实数根”是解题的关键。

7. (3 分) 某班有 40 人，一次体能测试后，老师对测试成绩进行了统计。由于小亮没有参加本次集体测试因此计算其他 39 人的平均分为 90 分，方差 $s^2 = 41$ 。后来小亮进行了补测，成绩为 90 分，关于该班 40 人的测试成绩，下列说法正确的是 ()

- A. 平均分不变，方差变大 B. 平均分不变，方差变小
C. 平均分和方差都不变 D. 平均分和方差都改变

【分析】根据平均数，方差的定义计算即可。

【解答】解： $\because$ 小亮的成绩和其他 39 人的平均数相同，都是 90 分，

$\therefore$ 该班 40 人的测试成绩的平均分为 90 分，方差变小，

故选：B.

【点评】本题考查方差，算术平均数等知识，解题的关键是理解题意，灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

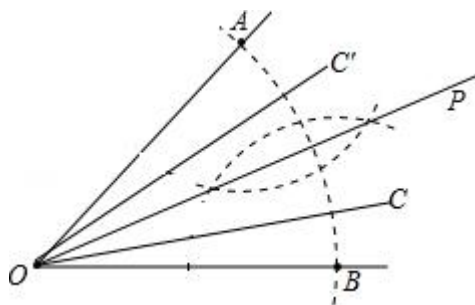
8. (3 分) 已知 $\angle AOB = 60^\circ$ ，以 O 为圆心，以任意长为半径作弧，交 OA , OB 于点 M , N ，分别以点 M , N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长度为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 P ，以 OP 为边作 $\angle POC = 15^\circ$ ，则 $\angle BOC$ 的度数为 ()

A. 15° B. 45° C. 15° 或 30° D. 15° 或 45°

【分析】(1) 以 O 为圆心，以任意长为半径作弧，交 OA , OB 于点 M , N ，分别以点 M , N 为圆心，以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长度为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 P ，则 OP 为 $\angle AOB$ 的平分线；(2) 两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 P ，以 OP 为边作 $\angle POC = 15^\circ$ ，则为作 $\angle POB$ 或 $\angle POA$ 的角平分线，即可求解.

【解答】解：(1) 以 O 为圆心，以任意长为半径作弧，交 OA , OB 于点 M , N ，分别以点 M , N 为圆心，

以大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长度为半径作弧，两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 P ，则 OP 为 $\angle AOB$ 的平分线，



(2) 两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 P ，以 OP 为边作 $\angle POC = 15^\circ$ ，则为作 $\angle POB$ 或 $\angle POA$ 的角平分线，

则 $\angle BOC = 15^\circ$ 或 45° ，

故选：D.

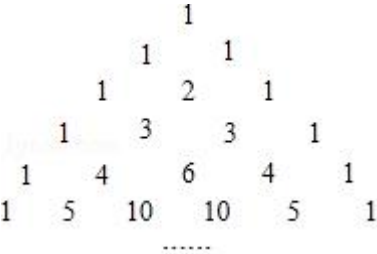
【点评】本题考查的是复杂作图，主要要理解作图是在作角的平分线，同时要考虑以 OP 为边作 $\angle POC = 15^\circ$ 的两种情况，避免遗漏.

9. (3 分) 南宋数学家杨辉在其著作《详解九章算法》中揭示了 $(a+b)^n$ (n 为非负整数)

展开式的项数及各项系数的有关规律如下，后人也将右表称为“杨辉三角”

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\(a+b)^1 &= a+b \\(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \\(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\(a+b)^4 &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\(a+b)^5 &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5 \\&\dots\end{aligned}$$

则 $(a+b)^9$ 展开式中所有项的系数和是 ()



- A. 128 B. 256 C. 512 D. 1024

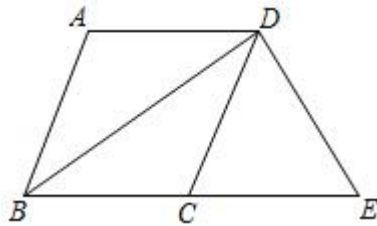
【分析】 由“杨辉三角”的规律可知，令 $a = b = 1$ ，代入 $(a+b)^9$ 计算可得所有项的系数和。

【解答】 解：由“杨辉三角”的规律可知， $(a+b)^9$ 展开式中所有项的系数和为 $(1+1)^9 = 2^9 = 512$

故选：C.

【点评】 本题考查了“杨辉三角”展开式中所有项的系数和的求法，需要知道取值代入即可求得。

10. (3 分) 如图，面积为 24 的 $\square ABCD$ 中，对角线 BD 平分 $\angle ABC$ ，过点 D 作 $DE \perp BD$ 交 BC 的延长线于点 E ， $DE = 6$ ，则 $\sin \angle DCE$ 的值为 ()

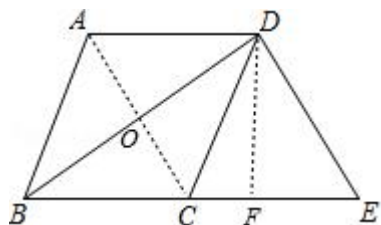


- A. $\frac{24}{25}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{3}{4}$ D. $\frac{12}{25}$

【分析】 可证明四边形 $ABCD$ 是菱形，由面积可求出 BD 长，连接 AC ，过点 D 作 $DF \perp$

BE 于点 E ，求出菱形的边长 $CD = 5$ ，由勾股定理可求出 CF 、 DF 长，则 $\sin \angle DCE$ 的值可求出。

【解答】解：连接 AC ，过点 D 作 $DF \perp BE$ 于点 E ，



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$,

$\therefore \angle ABD = \angle DBC$,

$\because \square ABCD$ 中, $AD \parallel BC$,

$\therefore \angle ADB = \angle DBC$,

$\therefore \angle ADB = \angle ABD$,

$\therefore AB = BC$,

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AC \perp BD$, $OB = OD$,

$\because DE \perp BD$,

$\therefore OC \parallel ED$,

$\because DE = 6$,

$\therefore OC = \frac{1}{2}DE = 3$,

$\because \square ABCD$ 的面积为 24,

$\therefore \frac{1}{2}BD \cdot AC = 24$,

$\therefore BD = 8$,

$\therefore BC = CD = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,

设 $CF = x$, 则 $BF = 5 + x$,

由 $BD^2 - BF^2 = DC^2 - CF^2$ 可得: $8^2 - (5 + x)^2 = 5^2 - x^2$,

解得 $x = \frac{7}{5}$,

$\therefore DF = \frac{24}{5}$,

$$\therefore \sin \angle DCE = \frac{DF}{DC} = \frac{\frac{24}{5}}{5} = \frac{24}{25}.$$

故选：A.

【点评】 本题考查菱形的判定与性质、平行四边形的性质、解直角三角形、锐角三角函数等知识，解题的关键是熟练掌握菱形的判定，正确作出辅助线思考问题.

11. (3分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的 y 与 x 的部分对应值如表：

x	-1	0	2	3	4
y	5	0	-4	-3	0

下列结论：①抛物线的开口向上；②抛物线的对称轴为直线 $x = 2$ ；③当 $0 < x < 4$ 时， $y > 0$ ；④抛物线与 x 轴的两个交点间的距离是 4；⑤若 $A(x_1, 2)$ ， $B(x_2, 3)$ 是抛物线上两点，则 $x_1 < x_2$ ，其中正确的个数是 ()

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

【分析】 先利用交点式求出抛物线解析式，则可对①进行判断；利用抛物线的对称性可对②进行判断；利用抛物线与 x 轴的交点坐标为 $(0, 0)$ ， $(4, 0)$ 可对③④进行判断；根据二次函数的增减性可对⑤进行判断.

【解答】 解：设抛物线解析式为 $y = ax(x - 4)$ ，

把 $(-1, 5)$ 代入得 $5 = a \times (-1) \times (-1 - 4)$ ，解得 $a = 1$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = x^2 - 4x$ ，所以①正确；

抛物线的对称轴为直线 $x = 2$ ，所以②正确；

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的交点坐标为 $(0, 0)$ ， $(4, 0)$ ，

$\therefore$ 当 $0 < x < 4$ 时， $y < 0$ ，所以③错误；

抛物线与 x 轴的两个交点间的距离是 4，所以④正确；

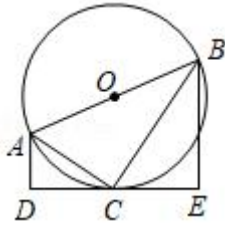
若 $A(x_1, 2)$ ， $B(x_2, 3)$ 是抛物线上两点，则 $x_2 < x_1 < 2$ 或 $2 < x_1 < x_2$ ，所以⑤错误.

故选：B.

【点评】 本题考查了抛物线与 x 轴的交点：把求二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 是常数， $a \neq 0$) 与 x 轴的交点坐标问题转化为解关于 x 的一元二次方程. 也考查了二次函数的性质.

12. (3分) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，直线 DE 与 $\odot O$ 相切于点 C ，过 A, B 分别作 $AD \perp DE$ ，

$BE \perp DE$ ，垂足为点 D, E ，连接 AC, BC ，若 $AD = \sqrt{3}$ ， $CE = 3$ ，则 $\widehat{AC}$ 的长为 ()



A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

【分析】根据圆周角定理求得 $\angle ACB = 90^\circ$ ，进而证得 $\triangle ADC \sim \triangle CEB$ ，求得 $\angle ABC = 30^\circ$ ，根据切线的性质求得 $\angle ACD = 30^\circ$ ，解直角三角形求得半径，根据圆周角定理求得 $\angle AOC = 60^\circ$ ，根据弧长公式求得即可。

【解答】解：连接 OC ，

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\because AD \perp DE, BE \perp DE,$$

$$\therefore \angle DAC + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ECB,$$

$$\because \angle ADC = \angle CEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle CEB,$$

$$\therefore \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{CE}, \text{ 即 } \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\because \tan \angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore AB = 2AC, \angle AOC = 60^\circ,$$

$\because$ 直线 DE 与 $\odot O$ 相切于点 C ,

$$\therefore \angle ACD = \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore AC = 2AD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore AB = 4\sqrt{3},$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 2\sqrt{3},$$

$$\therefore \widehat{AC} \text{ 的长为: } \frac{60\pi \cdot 2\sqrt{3}}{180} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi,$$

故选：D.

【点评】本题考查了切线的性质，圆周角定理，直角三角函数， 30° 角的直角三角形的性质等，求得 $\angle ABC = 30^\circ$ 是解题的关键.

二、填空题（本大题共 6 个小题，每小题 3 分，满分 18 分）

13. (3 分) $|-6| \times 2^{-1} - \sqrt{2} \cos 45^\circ = \underline{2}$.

【分析】直接利用二次根式的性质以及特殊角的三角函数值、负指数幂的性质分别化简得出答案.

【解答】解：原式 $= 6 \times \frac{1}{2} - \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$= 3 - 1$$

$$= 2.$$

故答案为：2.

【点评】此题主要考查了实数运算，正确化简各数是解题关键.

14. (3 分) 若关于 x 的分式方程 $\frac{3x}{x-2} - 1 = \frac{m+3}{x-2}$ 有增根，则 m 的值为 3.

【分析】增根是化为整式方程后产生的不适合分式方程的根. 所以应先确定增根的可能值，让最简公分母 $(x-2) = 0$ ，得到 $x = 2$ ，然后代入化为整式方程的方程算出 m 的值.

【解答】.解：方程两边都乘 $(x-2)$,

$$\text{得 } 3x - x + 2 = m + 3$$

$\therefore$ 原方程有增根，

$$\therefore \text{最简公分母 } (x-2) = 0,$$

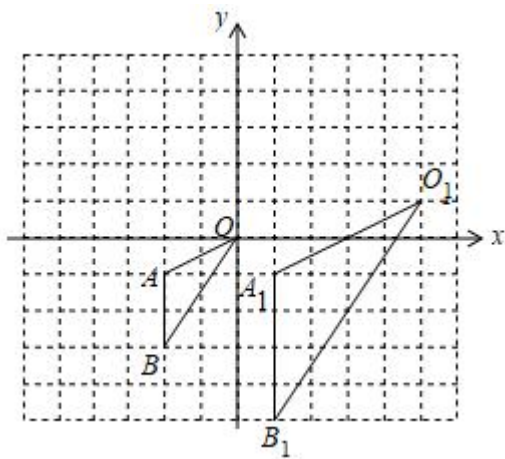
$$\text{解得 } x = 2,$$

$$\text{当 } x = 2 \text{ 时, } m = 3.$$

故答案为 3.

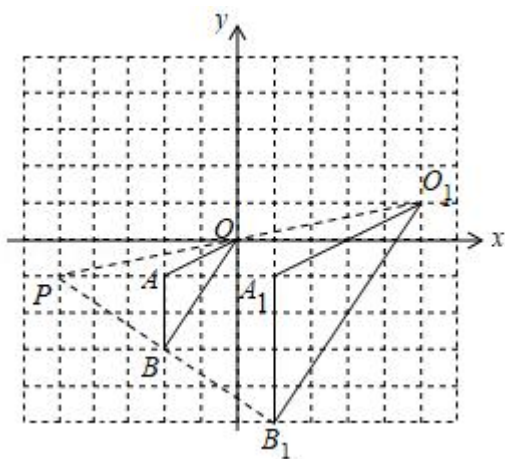
【点评】本题考查了分式方程的增根，增根问题可按如下步骤进行：①让最简公分母为 0 确定增根；②化分式方程为整式方程；③把增根代入整式方程即可求得相关字母的值.

15. (3 分) 如图，在直角坐标系中，每个小正方形的边长均为 1 个单位长度， $\triangle ABO$ 的顶点坐标分别为 $A(-2, -1)$ ， $B(-2, -3)$ ， $O(0, 0)$ ， $\triangle A_1B_1O_1$ 的顶点坐标分别为 $A_1(1, -1)$ ， $B_1(1, -5)$ ， $O_1(5, 1)$ ， $\triangle ABO$ 与 $\triangle A_1B_1O_1$ 是以点 P 为位似中心的位似图形，则 P 点的坐标为 $(-5, -1)$.



【分析】分别延长 B_1B 、 O_1O 、 A_1A ，它们相交于点 P ，然后写出 P 点坐标即可．

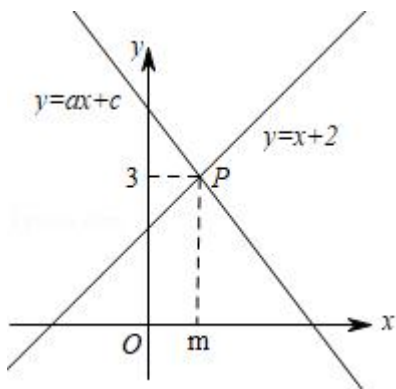
【解答】解：如图， P 点坐标为 $(-5, -1)$ ．



故答案为 $(-5, -1)$ ．

【点评】本题考查了位似变换：如果两个图形不仅是相似图形，而且对应顶点的连线相交于一点，对应边互相平行，那么这样的两个图形叫做位似图形，这个点叫做位似中心．位似图形的性质有 两个图形必须是相似形；对应点的连线都经过同一点；对应边平行或共线．

16. (3 分) 如图，直线 $y = x + 2$ 与直线 $y = ax + c$ 相交于点 $P(m, 3)$ ，则关于 x 的不等式 $x + 2 \leq ax + c$ 的解为 $x \leq 1$ ．



【分析】将点 $P(m, 3)$ 代入 $y = x + 2$ ，求出点 P 的坐标；结合函数图象可知当 $x < 1$ 时 $x + 2 \leq ax + c$ ，即可求解；

【解答】解：点 $P(m, 3)$ 代入 $y = x + 2$ ，

$$\therefore m = 1,$$

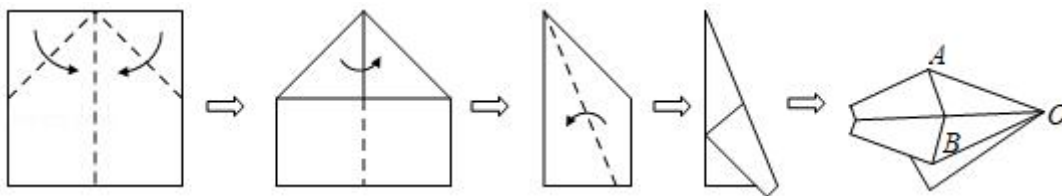
$$\therefore P(1, 3),$$

结合图象可知 $x + 2 \leq ax + c$ 的解为 $x \leq 1$ ；

故答案为 $x \leq 1$ ；

【点评】本题考查一次函数的交点于一元一次不等式；将一元一次不等式的解转化为一次函数图象的关系是解题的关键。

17. (3 分) 小明将一张正方形纸片按如图所示顺序折叠成纸飞机，当机翼展开在同一平面时（机翼间无缝隙）， $\angle AOB$ 的度数是 45° 。



【分析】根据折叠的轴对称性， 180° 的角对折 3 次，求出每次的角度即可；

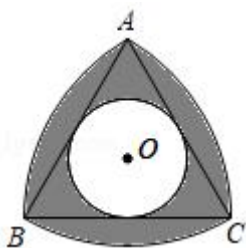
【解答】解：在折叠过程中角一直是轴对称的折叠，

$$\angle AOB = 22.5^\circ \times 2 = 45^\circ ;$$

故答案为 45° ；

【点评】本题考查轴对称的性质；能够通过折叠理解角之间的对称关系是解题的关键。

18. (3 分) 如图，分别以边长为 2 的等边三角形 ABC 的三个顶点为圆心，以边长为半径作弧，三段弧所围成的图形是一个曲边三角形，已知 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，则阴影部分面积为 $\frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 。



【分析】连接 OB ，作 $OD \perp BC$ 于 D ，如图，利用等边三角形的性质得 $AB = BC = AC = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，再根据三角形内切圆的性质得 OH 为 $\odot O$ 的半径， $\angle OBH = 30^\circ$ ，再计算出 $BH = CH = 1$ ， $OH = \frac{\sqrt{3}}{3}BH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，然后根据扇形的面积公式，利用阴影部分面积 = $3S_{\text{弓形}AB} + S_{\triangle ABC} - S_{\odot O} = 3(S_{\text{扇形}ACB} - S_{\triangle ABC}) + S_{\triangle ABC} - S_{\odot O}$ 进行计算。

【解答】解：连接 OB ，作 $OD \perp BC$ 于 D ，如图，

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore AB = BC = AC = 2$ ， $\angle ABC = 60^\circ$ ，

$\because \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，

$\therefore OH$ 为 $\odot O$ 的半径， $\angle OBH = 30^\circ$ ，

$\therefore O$ 点为等边三角形的外心，

$\therefore BH = CH = 1$ ，

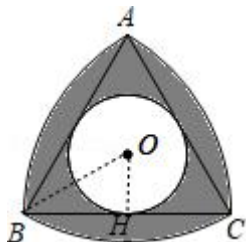
在 $\text{Rt}\triangle OBH$ 中， $OH = \frac{\sqrt{3}}{3}BH = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore S_{\text{弓形}AB} = S_{\text{扇形}ACB} - S_{\triangle ABC}$ ，

$\therefore$ 阴影部分面积 = $3S_{\text{弓形}AB} + S_{\triangle ABC} - S_{\odot O} = 3(S_{\text{扇形}ACB} - S_{\triangle ABC}) + S_{\triangle ABC} - S_{\odot O} = 3S_{\text{扇形}ACB}$

$- 2S_{\triangle ABC} - S_{\odot O} = 3 \times \frac{60 \times \pi \times 2^2}{360} - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 - \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 。

故答案为 $\frac{5}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 。



【点评】本题考查了三角形的内切圆与内心：三角形的内心到三角形三边的距离相等；

三角形的内心与三角形顶点的连线平分这个内角。也考查了等边三角形的性质和扇形面积公式。

三、解答题（本大题共 7 个小题，满分 66 分）

19. (6分) 先化简 $(x+3 - \frac{7}{x-3}) \div \frac{2x^2-8x}{x-3}$, 再从 $0 \leq x \leq 4$ 中选一个适合的整数代入求值.

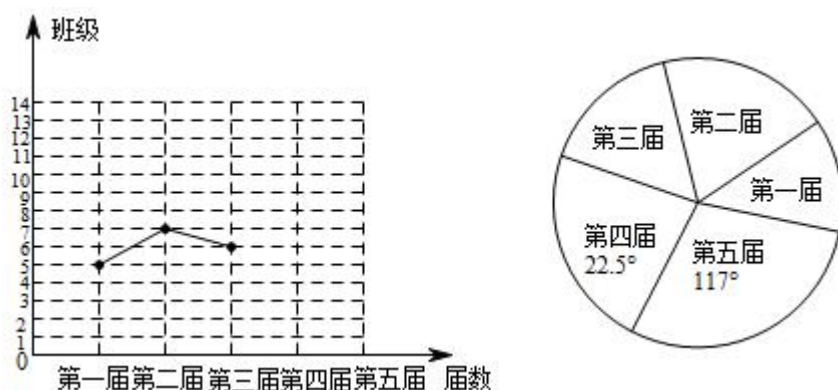
【分析】 根据分式的混合运算法则把原式化简, 根据分式有意义的条件选择一个整数代入计算即可.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: } & (x+3 - \frac{7}{x-3}) \div \frac{2x^2-8x}{x-3} \\ &= (\frac{x^2-9}{x-3} - \frac{7}{x-3}) \div \frac{2x^2-8x}{x-3} \\ &= \frac{(x+4)(x-4)}{x-3} \cdot \frac{x-3}{2x(x-4)} \\ &= \frac{x+4}{2x}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x=1 \text{ 时, 原式} = \frac{1+4}{2 \times 1} = \frac{5}{2}.$$

【点评】 本题考查的是分式的化简求值、分式有意义的条件, 掌握分式的混合运算法则是解题的关键.

20. (8分) 十八大以来, 某校已举办五届校园艺术节, 为了弘扬中华优秀传统文化, 每届艺术节上都有一些班级表演“经典诵读”“民乐演奏”、“歌曲联唱”、“民族舞蹈”等节目. 小颖对每届艺术节表演这些节目的班级数进行统计, 并绘制了如图所示不完整的折线统计图和扇形统计图.



(1) 五届艺术节共有 40 个班级表演这些节目, 班数的中位数为 7, 在扇形统计图中, 第四届班级数的扇形圆心角的度数为 81°;

(2) 补全折线统计图;

(3) 第六届艺术节, 某班决定从这四项艺术形式中任选两项表演 (“经典诵读”、“民乐演奏”、“歌曲联唱”、“民族舞蹈”分别用 A, B, C, D 表示), 利用树状图或表格求出该班选择 A 和 D 两项的概率.

【分析】 (1) 先计算出第一届、第二届和第三届参加班级所占的百分比为 45%, 再用 18

除以 45% 得到五届艺术节参加班级表演的总数；接着求出第四届和第五届参加班级数，利用中位数的定义得到班数的中位数；在扇形统计图中，第四届班级数的扇形圆心角的度数为 $360^{\circ} \times 22.5\%$ ；

(2) 补全折线统计图；

(3) 画树状图展示所有 12 种等可能的结果数，找出该班选择 A 和 D 两项的结果数，然后概率公式计算。

【解答】解：(1) 第一届、第二届和第三届参加班级所占的百分比为 $1 - 22.5\% - \frac{117}{360} = 45\%$ ，

所以五届艺术节参加班级表演的总数为 $(5+7+6) \div 45\% = 40$ (个)；

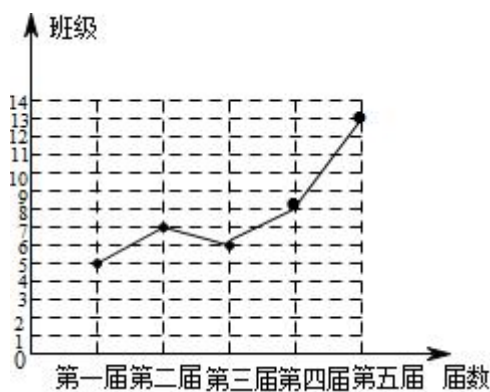
第四届参加班级数为 $40 \times 22.5\% = 9$ (个)，第五届参加班级数为 $40 - 18 - 9 = 13$ (个)，

所以班数的中位数为 7 (个)

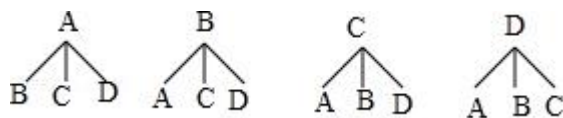
在扇形统计图中，第四届班级数的扇形圆心角的度数为 $360^{\circ} \times 22.5\% = 81^{\circ}$ ；

故答案为 40，7， 81° ；

(2) 如图，



(3) 画树状图为：



共有 12 种等可能的结果数，其中该班选择 A 和 D 两项的结果数为 2，

所以该班选择 A 和 D 两项的概率 $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ 。

【点评】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率。也考查了统计图。

21. (9分) 亚洲文明对话大会召开期间, 大批的大学生志愿者参与服务工作. 某大学计划组织本校全体志愿者统一乘车去会场, 若单独调配 36 座新能源客车若干辆, 则有 2 人没有座位; 若只调配 22 座新能源客车, 则用车数量将增加 4 辆, 并空出 2 个座位.

(1) 计划调配 36 座新能源客车多少辆? 该大学共有多少名志愿者?

(2) 若同时调配 36 座和 22 座两种车型, 既保证每人有座, 又保证每车不空座, 则两种车型各需多少辆?

【分析】(1) 设计计划调配 36 座新能源客车 x 辆, 该大学共有 y 名志愿者, 则需调配 22 座新能源客车 $(x+4)$ 辆, 根据志愿者人数 = $36 \times$ 调配 36 座客车的数量 + 2 及志愿者人数 = $22 \times$ 调配 22 座客车的数量 - 2, 即可得出关于 x, y 的二元一次方程组, 解之即可得出结论;

(2) 设需调配 36 座客车 m 辆, 22 座客车 n 辆, 根据志愿者人数 = $36 \times$ 调配 36 座客车的数量 + $22 \times$ 调配 22 座客车的数量, 即可得出关于 m, n 的二元一次方程, 结合 m, n 均为正整数即可求出结论.

【解答】解: (1) 设计计划调配 36 座新能源客车 x 辆, 该大学共有 y 名志愿者, 则需调配 22 座新能源客车 $(x+4)$ 辆,

依题意, 得:
$$\begin{cases} 36x+2=y \\ 22(x+4)-2=y \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} x=6 \\ y=218 \end{cases}.$$

答: 计划调配 36 座新能源客车 6 辆, 该大学共有 218 名志愿者.

(2) 设需调配 36 座客车 m 辆, 22 座客车 n 辆,

依题意, 得: $36m+22n=218$,

$$\therefore n = \frac{109-18m}{11}.$$

又 $\because m, n$ 均为正整数,

$$\therefore \begin{cases} m=3 \\ n=5 \end{cases}.$$

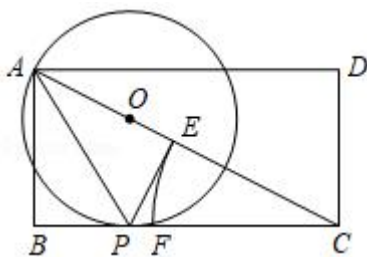
答: 需调配 36 座客车 3 辆, 22 座客车 5 辆.

【点评】本题考查了二元一次方程组的应用以及二元一次方程的应用, 解题的关键是: (1) 找准等量关系, 正确列出二元一次方程组; (2) 找准等量关系, 正确列出二元一次方程.

22. (9分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $CD=2$, $AD=4$, 点 P 在 BC 上, 将 $\triangle ABP$ 沿 AP 折叠, 点 B 恰好落在对角线 AC 上的 E 点, O 为 AC 上一点, $\odot O$ 经过点 A, P

(1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

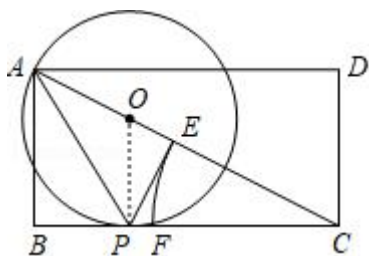
(2) 在边 CB 上截取 $CF = CE$, 点 F 是线段 BC 的黄金分割点吗? 请说明理由.



【分析】(1) 通过“连直径、证垂直”的方法, 证明 $\angle BAP = \angle OPA$, 即可求解;

(2) $CF = CE = AC - AE = \sqrt{20} - 4 = 2\sqrt{5} - 2$, 即可求解.

【解答】解: (1) 连接 OP , 则 $\angle PAO = \angle APO$,



而 $\triangle AEP$ 是由 $\triangle ABP$ 沿 AP 折叠而得:

故 $AE = AB = 4$, $\angle OAP = \angle PAB$,

$\therefore \angle BAP = \angle OPA$,

$\therefore AB \parallel OP$, $\therefore \angle OPC = 90^\circ$,

$\therefore BC$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) $CF = CE = AC - AE = \sqrt{20} - 4 = 2\sqrt{5} - 2$,

$$\frac{CF}{BC} = \frac{2\sqrt{5}-2}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

故: 点 F 是线段 BC 的黄金分割点.

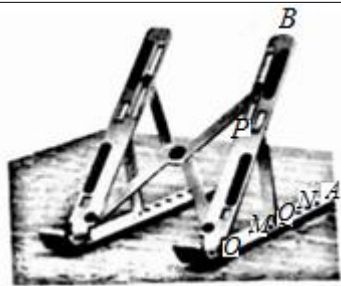
【点评】 本题考查了圆的切线的性质与证明、黄金分割的应用, 题目的关键是明确黄金分割所涉及的线段的比.

23. (10 分) 如图所示, 一种适用于笔记本电脑的铝合金支架, 边 OA , OB 可绕点 O 开合, 在 OB 边上有一固定点 P , 支柱 PQ 可绕点 P 转动, 边 OA 上有六个卡孔, 其中离点 O 最近的卡孔为 M , 离点 O 最远的卡孔为 N . 当支柱端点 Q 放入不同卡孔内, 支架的倾斜角发生变化. 将电脑放在支架上, 电脑台面的角度可达到六档调节, 这样更有利于工作和身体健康, 现测得 OP 的长为 12cm , OM 为 10cm , 支柱 PQ 为 8m .

- (1) 当支柱的端点 Q 放在卡孔 M 处时, 求 $\angle AOB$ 的度数;
- (2) 当支柱的端点 Q 放在卡孔 N 处时, $\angle AOB = 20.5^\circ$, 若相邻两个卡孔的距离相同, 求此间距. (结果精确到十分位)

参考数据表

计算器按键顺序	计算结果 (已取近似值)
$\sqrt{\quad} \quad 7 \quad =$	2.65
$\sqrt{\quad} \quad 4 \quad 6 \quad \cdot \quad 3 \quad 6 \quad =$	6.8
$\sqrt{\quad} \quad 1 \quad 2 \quad 6 \quad \cdot \quad 3 \quad 6 \quad =$	11.24
$\sin \quad 2 \quad 0 \quad \cdot \quad 5 \quad =$	0.35
$\cos \quad 2 \quad 0 \quad \cdot \quad 5 \quad =$	0.937
$2\text{ndF} \quad \sin \quad 0 \quad \cdot \quad 6 \quad 6 \quad =$	41
$2\text{ndF} \quad \cos \quad 0 \quad \cdot \quad 6 \quad 6 \quad =$	49
$2\text{ndF} \quad \sin \quad 0 \quad \cdot \quad 7 \quad 5 \quad =$	49
$2\text{ndF} \quad \cos \quad 0 \quad \cdot \quad 7 \quad 5 \quad =$	41



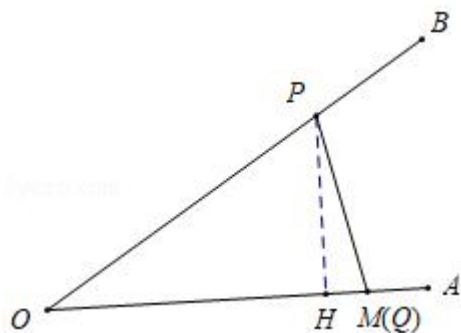
【分析】(1) 如图, 过点 P 作 $PH \perp OA$ 于点 H . 设 $OH = x$, 则 $HM = 10 - x$, 由勾股定理得 $12^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2$, 解得 $x = 9$, 即 $OH = 9$ (cm), $\cos \angle AOB = \frac{OH}{OP} = \frac{9}{12} = 0.75$, 由表可知, $\angle AOB$ 为 41° ;

(2) 过点 P 作 $PH \perp OA$ 于点 H . 在 $\text{Rt} \triangle OPH$ 中, $\frac{OH}{OP} = \cos \angle AOB = \cos 20.5^\circ = 0.937$, $OH = 11.244$ (cm), $\frac{PH}{OP} = \sin \angle AOB = \sin 20.5^\circ = 0.35$, $PH = 4.2$ (cm), $HN =$

$$\sqrt{8^2 - 4.2^2} = \sqrt{46.36} = 6.8 \text{ (cm)}, ON = OH + HN = 11.244 + 6.8 = 18.044 \text{ (cm)}, MN =$$

$ON - OM = 18.044 - 10 = 8.044 \text{ (cm)}$ 电脑台面的角度可达到六档调节, 相邻两个卡孔的距离相同, 相邻两个卡孔的距离为 $8.044 \div (6 - 1) \approx 1.6 \text{ (cm)}$.

【解答】解: (1) 如图, 过点 P 作 $PH \perp OA$ 于点 H .



设 $OH = x$, 则 $HM = 10 - x$,

由勾股定理得

$$OP^2 - OH^2 = PH^2, MP^2 - HM^2 = PH^2,$$

$$\therefore OP^2 - OH^2 = MP^2 - HM^2,$$

$$\text{即 } 12^2 - x^2 = 8^2 - (10 - x)^2,$$

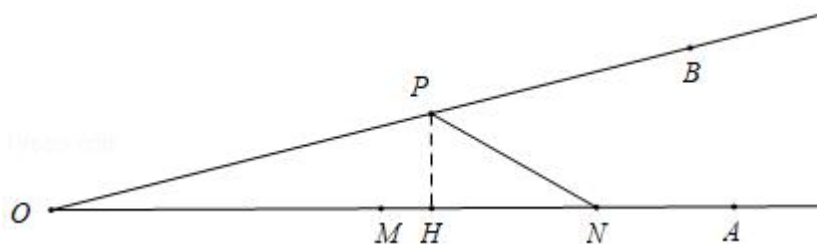
解得 $x = 9$,

即 $OH = 9 \text{ (cm)}$,

$$\therefore \cos \angle AOB = \frac{OH}{OP} = \frac{9}{12} = 0.75,$$

由表可知, $\angle AOB$ 为 41° ;

(2) 过点 P 作 $PH \perp OA$ 于点 H .



在 $\text{Rt}\triangle OPH$ 中,

$$\frac{OH}{OP} = \cos \angle AOB = \cos 20.5^\circ = 0.93,$$

$OH = 11.244 \text{ (cm)}$,

$$\frac{PH}{OP} = \sin \angle AOB = \sin 20.5^\circ = 0.35.$$

$$\therefore PH = 4.2 \text{ (cm)},$$

$$\therefore HN = \sqrt{8^2 - 4.2^2} = \sqrt{46.36} = 6.8 \text{ (cm)},$$

$$\therefore ON = OH + HN = 11.244 + 6.8 = 18.044 \text{ (cm)},$$

$$\therefore MN = ON - OM = 18.044 - 10 = 8.044 \text{ (cm)}$$

$\therefore$ 电脑台面的角度可达到六档调节，相邻两个卡孔的距离相同，

$$\therefore \text{相邻两个卡孔的距离为 } 8.044 \div (6 - 1) \approx 1.6 \text{ (cm)}$$

答：相邻两个卡孔的距离约为 1.6cm.

【点评】 本题考查了直角三角形边角关系，熟练运用三角函数是解题的关键.

24. (11 分) 【问题探究】

(1) 如图 1, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 均为等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, 点 B, D, E 在同一直线上, 连接 AD, BD .

①请探究 AD 与 BD 之间的位置关系: $AD \perp BD$;

②若 $AC = BC = \sqrt{10}$, $DC = CE = \sqrt{2}$, 则线段 AD 的长为 4;

【拓展延伸】

(2) 如图 2, $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 均为直角三角形, $\angle ACB = \angle DCE = 90^\circ$, $AC = \sqrt{21}$, $BC = \sqrt{7}$, $CD = \sqrt{3}$, $CE = 1$. 将 $\triangle DCE$ 绕点 C 在平面内顺时针旋转, 设旋转角 $\angle BCD$ 为 α ($0^\circ \leq \alpha < 360^\circ$), 作直线 BD , 连接 AD , 当点 B, D, E 在同一直线上时, 画出图形, 并求线段 AD 的长.

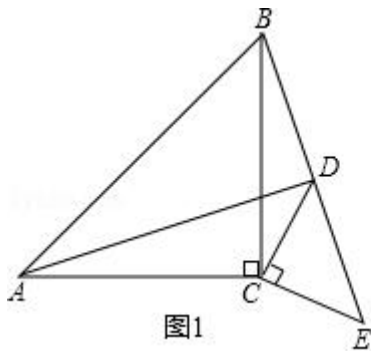


图1

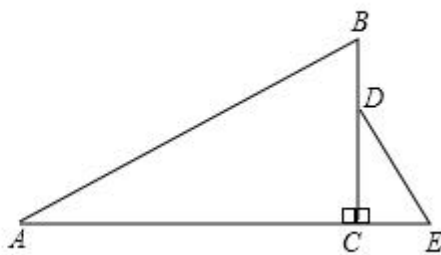


图2

【分析】 【问题探究】

(1) ①由 “SAS” 可证 $\triangle ACD \cong \triangle BCE$, 可得 $\angle ADC = \angle BEC = 45^\circ$, 可得 $AD \perp BD$;

②过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F , 由勾股定理可求 DF, CF, AF 的长, 即可求 AD 的长;

【拓展延伸】

(2) 分点 D 在 BC 左侧和 BC 右侧两种情况讨论, 根据勾股定理和相似三角形的性质可

求解.

【解答】解：【问题探究】

(1) $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle DEC$ 均为等腰直角三角形,

$$\therefore AC = BC, CE = CD, \angle ABC = \angle DEC = 45^\circ = \angle CDE$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE, \text{ 且 } AC = BC, CE = CD$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle BCE \text{ (SAS)}$$

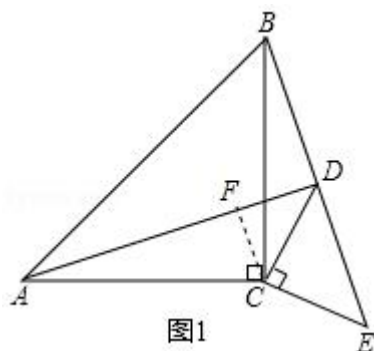
$$\therefore \angle ADC = \angle BEC = 45^\circ$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ADC + \angle CDE = 90^\circ$$

$$\therefore AD \perp BD$$

故答案为: $AD \perp BD$

②如图, 过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F ,



$$\therefore \angle ADC = 45^\circ, CF \perp AD, CD = \sqrt{2}$$

$$\therefore DF = CF = 1$$

$$\therefore AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = 3$$

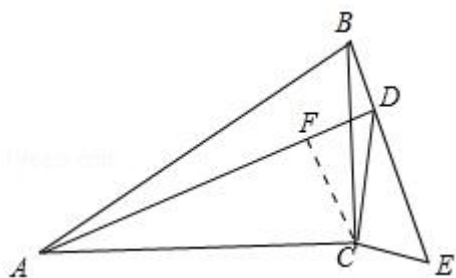
$$\therefore AD = AF + DF = 4$$

故答案为: 4

【拓展延伸】

(2) 若点 D 在 BC 右侧,

如图, 过点 C 作 $CF \perp AD$ 于点 F ,



$$\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ, \quad AC = \sqrt{21}, \quad BC = \sqrt{7}, \quad CD = \sqrt{3}, \quad CE = 1.$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE, \quad \frac{AC}{BC} = \sqrt{3} = \frac{CD}{CE}$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC,$$

$$\because CD = \sqrt{3}, \quad CE = 1$$

$$\therefore DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = 2$$

$$\because \angle ADC = \angle BEC, \quad \angle DCE = \angle CFD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \frac{DE}{DC} = \frac{DC}{CF} = \frac{CE}{DF}$$

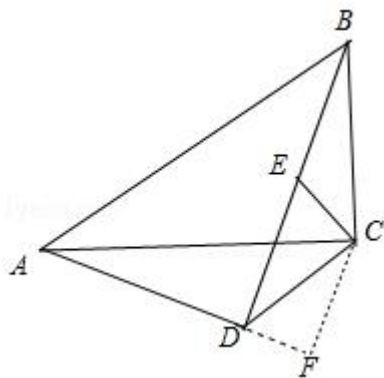
$$\text{即 } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{CF} = \frac{1}{DF}$$

$$\therefore CF = \frac{3}{2}, \quad DF = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AD = DF + AF = 3\sqrt{3}$$

若点 D 在 BC 左侧,



$$\because \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ, \quad AC = \sqrt{21}, \quad BC = \sqrt{7}, \quad CD = \sqrt{3}, \quad CE = 1.$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BCE, \quad \frac{AC}{BC} = \sqrt{3} = \frac{CD}{CE}$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle BCE$$

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC,$$

$$\therefore \angle CED = \angle CDF$$

$$\because CD = \sqrt{3}, CE = 1$$

$$\therefore DE = \sqrt{DC^2 + CE^2} = 2$$

$$\because \angle CED = \angle CDF, \angle DCE = \angle CFD = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle DCE \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \frac{DE}{DC} = \frac{DC}{CF} = \frac{CE}{DF}$$

$$\text{即 } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{CF} = \frac{1}{DF}$$

$$\therefore CF = \frac{3}{2}, DF = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AF = \sqrt{AC^2 - CF^2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore AD = AF - DF = 2\sqrt{3}$$

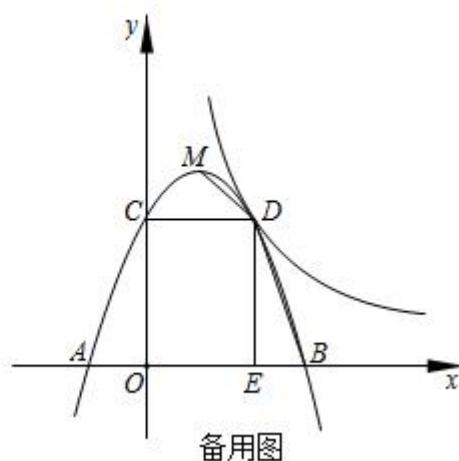
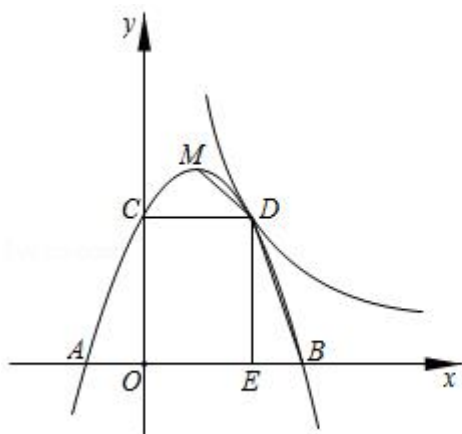
【点评】 本题是几何变换综合题，考查了全等三角形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，勾股定理，等腰三角形的性质等知识点，关键是添加恰当辅助线。

25. (13分) 如图，顶点为 M 的抛物线 $y = ax^2 + bx + 3$ 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, B 两点，与 y 轴交于点 C ，过点 C 作 $CD \perp y$ 轴交抛物线于另一点 D ，作 $DE \perp x$ 轴，垂足为点 E ，双曲线 $y = \frac{6}{x}$ ($x > 0$) 经过点 D ，连接 MD , BD 。

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 点 N , F 分别是 x 轴, y 轴上的两点，当以 M , D , N , F 为顶点的四边形周长最小时，求出点 N , F 的坐标；

(3) 动点 P 从点 O 出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿 OC 方向运动，运动时间为 t 秒，当 t 为何值时， $\angle BPD$ 的度数最大？（请直接写出结果）



【分析】(1) 由已知求出 D 点坐标, 将点 $A(-1, 0)$ 和 $D(2, 3)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 3$ 即可;

(2) 作 M 关于 y 轴的对称点 M' , 作 D 关于 x 轴的对称点 D' , 连接 $M'D'$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 N 、 F , 则以 M, D, N, F 为顶点的四边形周长最小即为 $M'D' + MD$ 的长;

(3) 设 $P(0, t)$, 则有 $\tan \angle CDP = \frac{3-t}{2}$, $\tan \angle PBO = \frac{t}{3}$, 令 $y = \frac{\frac{3-t}{2} + \frac{t}{3}}{1 - \frac{3-t}{2} \cdot \frac{t}{3}}$, 利用判别式 $\Delta = 0$ 可求 y 的最大值为 $\frac{15+4\sqrt{15}}{15}$, 进而求出 $t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{y}$;

【解答】解:(1) $C(0, 3)$

$\because CD \perp y$,

$\therefore D$ 点纵坐标是 3,

$\because D$ 在 $y = \frac{6}{x}$ 上,

$\therefore D(2, 3)$,

将点 $A(-1, 0)$ 和 $D(2, 3)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 3$,

$\therefore a = -1, b = 2$,

$\therefore y = -x^2 + 2x + 3$;

(2) $M(1, 4), B(3, 0)$,

作 M 关于 y 轴的对称点 M' , 作 D 关于 x 轴的对称点 D' , 连接 $M'D'$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 N 、 F ,

则以 M, D, N, F 为顶点的四边形周长最小即为 $M'D' + MD$ 的长;

$\therefore M'(-1, 4), D'(2, -3)$,

$$\therefore MD' \text{ 直线的解析式为 } y = -\frac{7}{3}x + \frac{5}{3},$$

$$\therefore N\left(\frac{5}{7}, 0\right), F\left(0, \frac{5}{3}\right);$$

(3) 设 $P(0, t)$,

$\because \triangle PBO$ 和 $\triangle CDP$ 都是直角三角形,

$$\tan \angle CDP = \frac{3-t}{2}, \tan \angle PBO = \frac{t}{3},$$

$$\text{令 } y = \tan \angle BPD = \frac{\frac{3-t}{2} + \frac{t}{3}}{1 - \frac{3-t}{2} \cdot \frac{t}{3}},$$

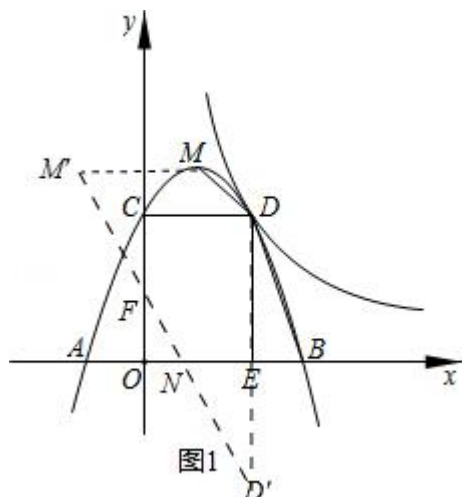
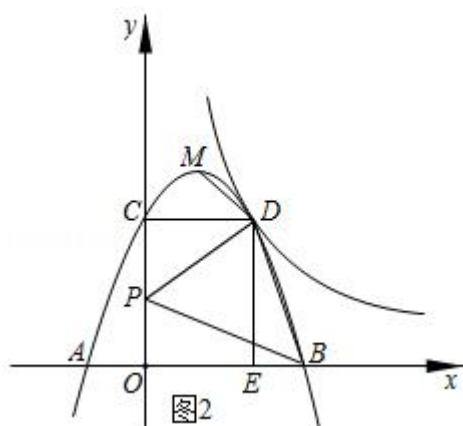
$$\therefore yt^2 + t - 3yt + 6y - 9 = 0,$$

$$\Delta = -15y^2 + 30y + 1 = 0 \text{ 时, } y = \frac{-15+4\sqrt{15}}{-15} \text{ (舍) 或 } y = \frac{15+4\sqrt{15}}{15},$$

$$\therefore t = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{y},$$

$$\therefore t = 9 - 2\sqrt{15},$$

$$\therefore P(0, 9 - 2\sqrt{15});$$



【点评】 本题考查二次函数的图象及性质；熟练掌握二次函数的图象及性质，利用轴对称求最短距离，将所求角利用直角三角形转化为三角函数值是解题的关键．