

2019 年山东省潍坊市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把正确的选项选出来，每小题选对得 3 分，错选、不选或选出的答案超过一个均记 0 分）

1.（3 分）2019 的倒数的相反数是（ ）

- A. -2019 B. $-\frac{1}{2019}$ C. $\frac{1}{2019}$ D. 2019

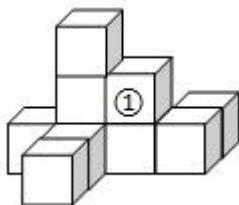
2.（3 分）下列运算正确的是（ ）

- A. $3a \times 2a = 6a$ B. $a^8 \div a^4 = a^2$
C. $-3(a-1) = 3-3a$ D. $(\frac{1}{3}a^3)^2 = \frac{1}{9}a^9$

3.（3 分）“十三五”以来，我国启动实施了农村饮水安全巩固提升工程．截止去年 9 月底，各地已累计完成投资 1.002×10^{11} 元．数据 1.002×10^{11} 可以表示为（ ）

- A. 10.02 亿 B. 100.2 亿 C. 1002 亿 D. 10020 亿

4.（3 分）如图是由 10 个同样大小的小正方体摆成的几何体．将小正方体①移走后，则关于新几何体的三视图描述正确的是（ ）



- A. 俯视图不变，左视图不变
B. 主视图改变，左视图改变
C. 俯视图不变，主视图不变
D. 主视图改变，俯视图改变

5.（3 分）利用教材中时计算器依次按键下：



则计算器显示的结果与下列各数中最接近的一个是（ ）

- A. 2.5 B. 2.6 C. 2.8 D. 2.9

6.（3 分）下列因式分解正确的是（ ）

- A. $3ax^2 - 6ax = 3(ax^2 - 2ax)$ B. $x^2 + y^2 = (-x+y)(-x-y)$

C. $a^2+2ab-4b^2=(a+2b)^2$

D. $-ax^2+2ax-a=-a(x-1)^2$

7. (3分) 小莹同学 10 个周综合素质评价成绩统计如下:

成绩(分)	94	95	97	98	100
周数(个)	1	2	2	4	1

这 10 个周的综合素质评价成绩的中位数和方差分别是 ()

A. 97.5 2.8

B. 97.5 3

C. 97 2.8

D. 97 3

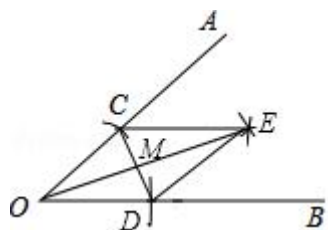
8. (3分) 如图, 已知 $\angle AOB$. 按照以下步骤作图:

①以点 O 为圆心, 以适当的长为半径作弧, 分别交 $\angle AOB$ 的两边于 C, D 两点, 连接 CD .

②分别以点 C, D 为圆心, 以大于线段 OC 的长为半径作弧, 两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 E , 连接 CE, DE .

③连接 OE 交 CD 于点 M .

下列结论中错误的是 ()



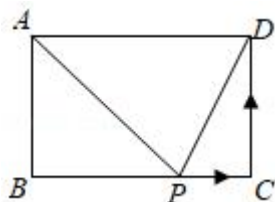
A. $\angle CEO = \angle DEO$

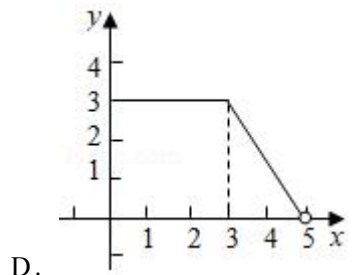
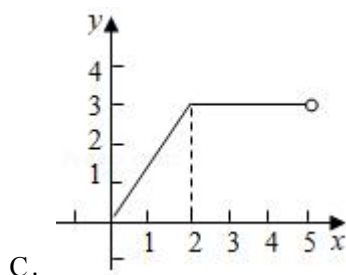
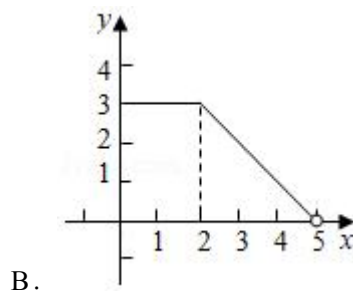
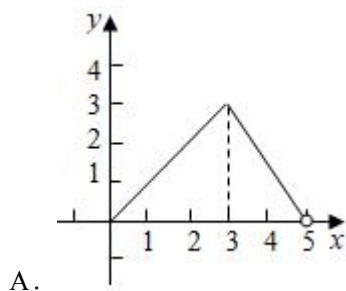
B. $CM = MD$

C. $\angle OCD = \angle ECD$

D. $S_{\text{四边形} OCED} = \frac{1}{2}CD \cdot OE$

9. (3分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, BC=3$, 动点 P 沿折线 BCD 从点 B 开始运动到点 D . 设运动的路程为 x , $\triangle ADP$ 的面积为 y , 那么 y 与 x 之间的函数关系的图象大致是 ()

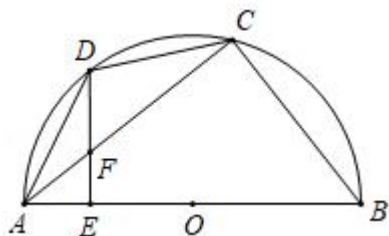




10. (3分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2mx + m^2 + m = 0$ 的两个实数根的平方和为 12, 则 m 的值为 ()

- A. $m = -2$ B. $m = 3$ C. $m = 3$ 或 $m = -2$ D. $m = -3$ 或 $m = 2$

11. (3分) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AB 为直径, $AD = CD$, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 连接 AC 交 DE 于点 F . 若 $\sin \angle CAB = \frac{3}{5}$, $DF = 5$, 则 BC 的长为 ()



- A. 8 B. 10 C. 12 D. 16

12. (3分) 抛物线 $y = x^2 + bx + 3$ 的对称轴为直线 $x = 1$. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + 3 - t = 0$ (t 为实数) 在 $-1 < x < 4$ 的范围内有实数根, 则 t 的取值范围是 ()

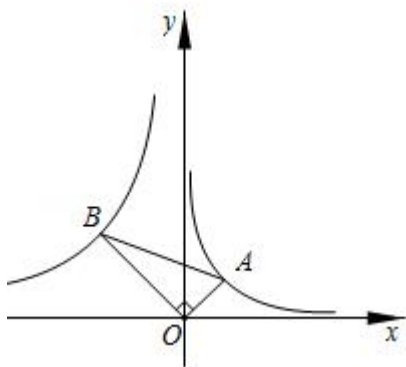
- A. $2 \leq t < 11$ B. $t \geq 2$ C. $6 < t < 11$ D. $2 \leq t < 6$

二、填空题 (本题共 6 小题, 满分 18 分。只要求填写最后结果, 每小题填对得 3 分。)

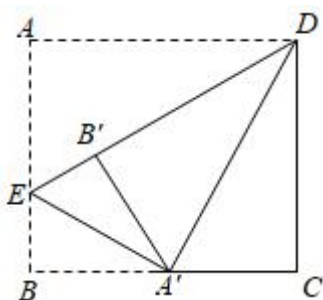
13. (3分) 若 $2^x = 3$, $2^y = 5$, 则 $2^{x+y} =$ _____.

14. (3分) 当直线 $y = (2 - 2k)x + k - 3$ 经过第二、三、四象限时, 则 k 的取值范围是_____.

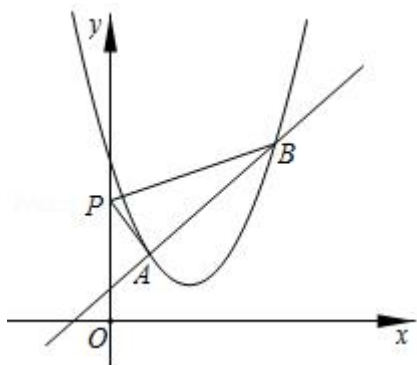
15. (3分) 如图, $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$, 顶点 A, B 分别在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 与 $y = \frac{-5}{x}$ ($x < 0$) 的图象上, 则 $\tan \angle BAO$ 的值为_____.



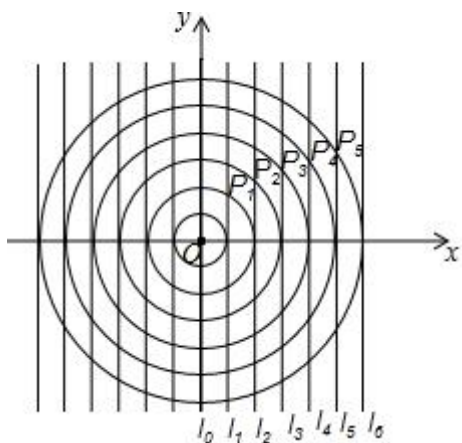
16. (3分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AD=2$. 将 $\angle A$ 向内翻折, 点 A 落在 BC 上, 记为 A' , 折痕为 DE . 若将 $\angle B$ 沿 EA' 向内翻折, 点 B 恰好落在 DE 上, 记为 B' , 则 $AB =$ _____.



17. (3分) 如图, 直线 $y=x+1$ 与抛物线 $y=x^2-4x+5$ 交于 A, B 两点, 点 P 是 y 轴上的一个动点, 当 $\triangle PAB$ 的周长最小时, $S_{\triangle PAB} =$ _____.



18. (3分) 如图所示, 在平面直角坐标系 xOy 中, 一组同心圆的圆心为坐标原点 O , 它们的半径分别为 $1, 2, 3, \dots$, 按照“加 1”依次递增; 一组平行线, $l_0, l_1, l_2, l_3, \dots$ 都与 x 轴垂直, 相邻两直线的间距为 l , 其中 l_0 与 y 轴重合若半径为 2 的圆与 l_1 在第一象限内交于点 P_1 , 半径为 3 的圆与 l_2 在第一象限内交于点 $P_2, \dots$, 半径为 $n+1$ 的圆与 l_n 在第一象限内交于点 P_n , 则点 P_n 的坐标为_____. (n 为正整数)



三、解答题（本题共 7 小题，共 66 分。解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤。）

19.（5 分）已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x-2y=k \end{cases}$ 的解满足 $x > y$ ，求 k 的取值范围.

20.（6 分）自开展“全民健身运动”以来，喜欢户外步行健身的人越来越多，为方便群众步行健身，某地政府决定对一段如图 1 所示的坡路进行改造. 如图 2 所示，改造前的斜坡 $AB = 200$ 米，坡度为 $1 : \sqrt{3}$ ；将斜坡 AB 的高度 AE 降低 $AC = 20$ 米后，斜坡 AB 改造为斜坡 CD ，其坡度为 $1 : 4$. 求斜坡 CD 的长.（结果保留根号）



图 1

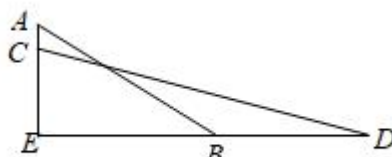


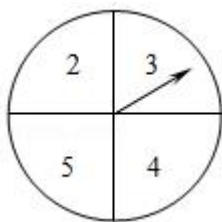
图 2

21.（9 分）如图所示，有一个可以自由转动的转盘，其盘面分为 4 等份，在每一等份分别标有对应的数字 2, 3, 4, 5. 小明打算自由转动转盘 10 次，现已经转动了 8 次，每一次停止后，小明将指针所指数字记录如下：

次数	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次	第 10 次
数字	3	5	2	3	3	4	3	5		

（1）求前 8 次的指针所指数字的平均数.

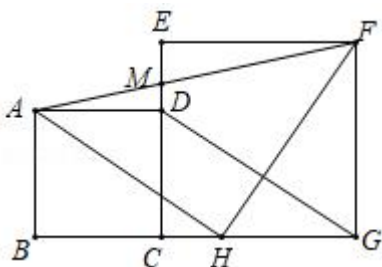
（2）小明继续自由转动转盘 2 次，判断是否可能发生“这 10 次的指针所指数字的平均数不小于 3.3，且不大于 3.5”的结果？若有可能，计算发生此结果的概率，并写出计算过程；若不可能，说明理由.（指针指向盘面等分线时为无效转次.）



22. (10分) 如图, 正方形 $ABCD$ 的边 CD 在正方形 $ECGF$ 的边 CE 上, 连接 DG , 过点 A 作 $AH \parallel DG$, 交 BG 于点 H . 连接 HF , AF , 其中 AF 交 EC 于点 M .

(1) 求证: $\triangle AHF$ 为等腰直角三角形.

(2) 若 $AB = 3$, $EC = 5$, 求 EM 的长.



23. (10分) 扶贫工作小组对果农进行精准扶贫, 帮助果农将一种有机生态水果拓宽了市场. 与去年相比, 今年这种水果的产量增加了 1000 千克, 每千克的平均批发价比去年降低了 1 元, 批发销售总额比去年增加了 20%.

(1) 已知去年这种水果批发销售总额为 10 万元, 求这种水果今年每千克的平均批发价是多少元?

(2) 某水果店从果农处直接批发, 专营这种水果. 调查发现, 若每千克的平均销售价为 41 元, 则每天可售出 300 千克; 若每千克的平均销售价每降低 3 元, 每天可多卖出 180 千克, 设水果店一天的利润为 w 元, 当每千克的平均销售价为多少元时, 该水果店一天的利润最大, 最大利润是多少? (利润计算时, 其它费用忽略不计.)

24. (13分) 如图 1, 菱形 $ABCD$ 的顶点 A, D 在直线上, $\angle BAD = 60^\circ$, 以点 A 为旋转中心将菱形 $ABCD$ 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 30^\circ$), 得到菱形 $AB'C'D'$, $B'C'$ 交对角线 AC 于点 M , $C'D'$ 交直线 l 于点 N , 连接 MN .

(1) 当 $MN \parallel B'D'$ 时, 求 α 的大小.

(2) 如图 2, 对角线 $B'D'$ 交 AC 于点 H , 交直线 l 于点 G , 延长 $C'B'$ 交 AB 于点 E , 连接 EH . 当 $\triangle HEB'$ 的周长为 2 时, 求菱形 $ABCD$ 的周长.

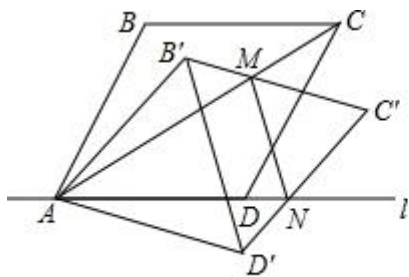


图1

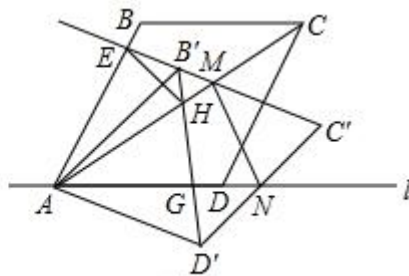


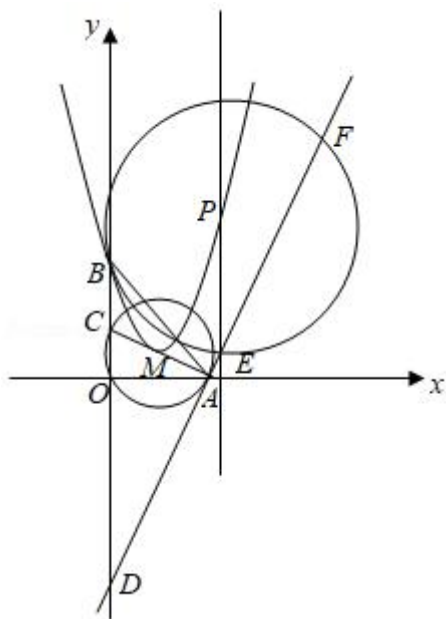
图2

25. (13分) 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, O 为坐标原点, 点 $A(4, 0)$, 点 $B(0, 4)$, $\triangle ABO$ 的中线 AC 与 y 轴交于点 C , 且 $\odot M$ 经过 O, A, C 三点.

(1) 求圆心 M 的坐标;

(2) 若直线 AD 与 $\odot M$ 相切于点 A , 交 y 轴于点 D , 求直线 AD 的函数表达式;

(3) 在过点 B 且以圆心 M 为顶点的抛物线上有一动点 P , 过点 P 作 $PE \parallel y$ 轴, 交直线 AD 于点 E . 若以 PE 为半径的 $\odot P$ 与直线 AD 相交于另一点 F . 当 $EF = 4\sqrt{5}$ 时, 求点 P 的坐标.



2019 年山东省潍坊市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，共 36 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把正确的选项选出来，每小题选对得 3 分，错选、不选或选出的答案超过一个均记 0 分）

1.（3 分）2019 的倒数的相反数是（ ）

- A. -2019 B. $-\frac{1}{2019}$ C. $\frac{1}{2019}$ D. 2019

【分析】先求 2019 的倒数，再求倒数的相反数即可；

【解答】解：2019 的倒数是 $\frac{1}{2019}$ ，再求 $\frac{1}{2019}$ 的相反数为 $-\frac{1}{2019}$ ；

故选：B.

【点评】本题考查倒数和相反数；熟练掌握倒数和相反数的求法是解题的关键.

2.（3 分）下列运算正确的是（ ）

- A. $3a \times 2a = 6a$ B. $a^8 \div a^4 = a^2$
C. $-3(a-1) = 3-3a$ D. $(\frac{1}{3}a^3)^2 = \frac{1}{9}a^9$

【分析】根据单项式乘法法则，同底数幂的除法的性质，去括号法则，积的乘方的性质，对各选项分析判断后利用排除法求解.

【解答】解：A、 $3a \times 2a = 6a^2$ ，故本选项错误；

B、 $a^8 \div a^4 = a^4$ ，故本选项错误；

C、 $-3(a-1) = 3-3a$ ，正确；

D、 $(\frac{1}{3}a^3)^2 = \frac{1}{9}a^6$ ，故本选项错误.

故选：C.

【点评】本题考查了单项式乘法法则，同底数幂的除法的性质，去括号法则，积的乘方的性质. 熟练掌握法则是解题的关键.

3.（3 分）“十三五”以来，我国启动实施了农村饮水安全巩固提升工程. 截止去年 9 月底，各地已累计完成投资 1.002×10^{11} 元. 数据 1.002×10^{11} 可以表示为（ ）

- A. 10.02 亿 B. 100.2 亿 C. 1002 亿 D. 10020 亿

【分析】利用科学记数法的表示形式展开即可

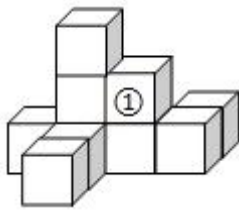
【解答】解：

$$1.002 \times 10^{11} = 1\,002\,000\,000\,00 = 1002 \text{ 亿}$$

故选：C.

【点评】本题主要考查科学记数法的展开，科学记数法是指把一个数表示成 $a \times 10^n$ 的 n 次幂的形式（ $1 \leq a < 10$ ， n 为正整数.）

- 4.（3分）如图是由10个同样大小的小正方体摆成的几何体. 将小正方体①移走后，则关于新几何体的三视图描述正确的是（ ）



- A. 俯视图不变，左视图不变
B. 主视图改变，左视图改变
C. 俯视图不变，主视图不变
D. 主视图改变，俯视图改变

【分析】利用结合体的形状，结合三视图可得出俯视图和左视图没有发生变化；

【解答】解：将正方体①移走后，

新几何体的三视图与原几何体的三视图相比，俯视图和左视图没有发生改变；

故选：A.

【点评】此题主要考查了简单组合体的三视图，根据题意正确掌握三视图的观察角度是解题关键.

- 5.（3分）利用教材中时计算器依次按键下：



则计算器显示的结果与下列各数中最接近的一个是（ ）

- A. 2.5 B. 2.6 C. 2.8 D. 2.9

【分析】利用计算器得到 $\sqrt{7}$ 的近似值即可作出判断.

【解答】解： $\because \sqrt{7} \approx 2.646$,

$\therefore$ 与 $\sqrt{7}$ 最接近的是2.6,

故选：B.

【点评】 本题主要考查计算器 - 基础知识，解题的关键是掌握计算器上常用按键的功能和使用顺序.

6. (3 分) 下列因式分解正确的是 ()

A. $3ax^2 - 6ax = 3(ax^2 - 2ax)$

B. $x^2 + y^2 = (-x + y)(-x - y)$

C. $a^2 + 2ab - 4b^2 = (a + 2b)^2$

D. $-ax^2 + 2ax - a = -a(x - 1)^2$

【分析】 直接利用提取公因式法以及公式法分解因式进而判断即可.

【解答】 解: A、 $3ax^2 - 6ax = 3ax(x - 2)$, 故此选项错误;

B、 $x^2 + y^2$, 无法分解因式, 故此选项错误;

C、 $a^2 + 2ab - 4b^2$, 无法分解因式, 故此选项错误;

D、 $-ax^2 + 2ax - a = -a(x - 1)^2$, 正确.

故选: D.

【点评】 此题主要考查了提取公因式法以及公式法分解因式, 正确应用公式是解题关键.

7. (3 分) 小莹同学 10 个周综合素质评价成绩统计如下:

成绩(分)	94	95	97	98	100
周数(个)	1	2	2	4	1

这 10 个周的综合素质评价成绩的中位数和方差分别是 ()

A. 97.5 2.8

B. 97.5 3

C. 97 2.8

D. 97 3

【分析】 根据中位数和方差的定义计算可得.

【解答】 解: 这 10 个周的综合素质评价成绩的中位数是 $\frac{97+98}{2} = 97.5$ (分),

平均成绩为 $\frac{1}{10} \times (94 + 95 \times 2 + 97 \times 2 + 98 \times 4 + 100) = 97$ (分),

$\therefore$ 这组数据的方差为 $\frac{1}{10} \times [(94 - 97)^2 + (95 - 97)^2 \times 2 + (97 - 97)^2 \times 2 + (98 - 97)^2 \times 4 + (100 - 97)^2] = 3$ (分²),

故选: B.

【点评】 本题主要考查中位数和方差, 解题的关键是掌握中位数和方差的定义.

8. (3 分) 如图, 已知 $\angle AOB$. 按照以下步骤作图:

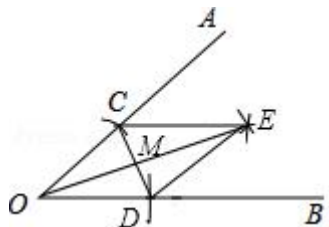
①以点 O 为圆心, 以适当的长为半径作弧, 分别交 $\angle AOB$ 的两边于 C, D 两点, 连接 CD.

②分别以点 C, D 为圆心, 以大于线段 OC 的长为半径作弧, 两弧在 $\angle AOB$ 内交于点 E,

连接 CE , DE .

③连接 OE 交 CD 于点 M .

下列结论中错误的是 ()



A. $\angle CEO = \angle DEO$

B. $CM = MD$

C. $\angle OCD = \angle ECD$

D. $S_{\text{四边形} OCED} = \frac{1}{2}CD \cdot OE$

【分析】利用基本作图得出角平分线的作图，进而解答即可.

【解答】解：由作图步骤可得： OE 是 $\angle AOB$ 的角平分线，

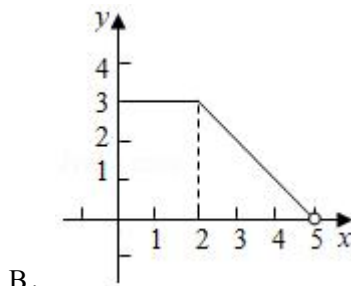
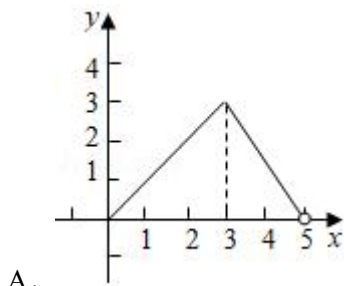
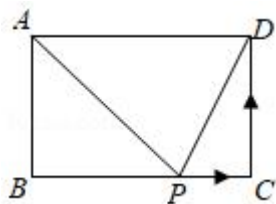
$$\therefore \angle CEO = \angle DEO, CM = MD, S_{\text{四边形} OCED} = \frac{1}{2}CD \cdot OE,$$

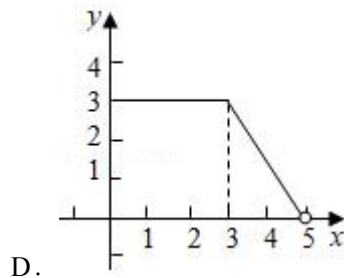
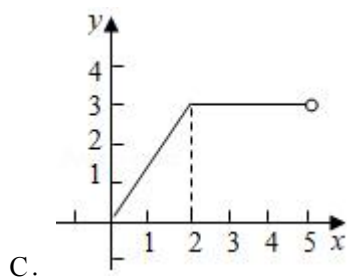
但不能得出 $\angle OCD = \angle ECD$,

故选：C.

【点评】本题考查了作图 - 基本作图：熟练掌握 5 种基本作图（作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的角平分线；过一点作已知直线的垂线）.

9. (3 分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 2$ ， $BC = 3$ ，动点 P 沿折线 BCD 从点 B 开始运动到点 D . 设运动的路程为 x ， $\triangle ADP$ 的面积为 y ，那么 y 与 x 之间的函数关系的图象大致是 ()





【分析】由题意当 $0 \leq x \leq 3$ 时, $y = 3$, 当 $3 < x < 5$ 时, $y = \frac{1}{2} \times 3 \times (5 - x) = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$. 由此即可判断.

【解答】解: 由题意当 $0 \leq x \leq 3$ 时, $y = 3$,
当 $3 < x < 5$ 时, $y = \frac{1}{2} \times 3 \times (5 - x) = -\frac{3}{2}x + \frac{15}{2}$.

故选: D.

【点评】本题考查动点问题的函数图象, 解题的关键是理解题意, 学会用分类讨论是扇形思考问题, 属于中考常考题型.

10. (3 分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2mx + m^2 + m = 0$ 的两个实数根的平方和为 12, 则 m 的值为 ()

A. $m = -2$ B. $m = 3$ C. $m = 3$ 或 $m = -2$ D. $m = -3$ 或 $m = 2$

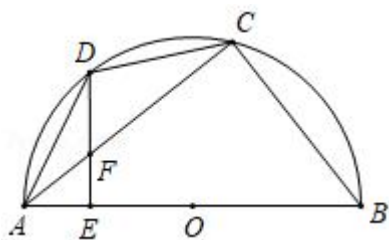
【分析】设 x_1, x_2 是 $x^2 + 2mx + m^2 + m = 0$ 的两个实数根, 由根与系数的关系得 $x_1 + x_2 = -2m$, $x_1 \cdot x_2 = m^2 + m$, 再由 $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$ 代入即可;

【解答】解: 设 x_1, x_2 是 $x^2 + 2mx + m^2 + m = 0$ 的两个实数根,
 $\therefore \Delta = -4m \geq 0$,
 $\therefore m \leq 0$,
 $\therefore x_1 + x_2 = -2m, x_1 \cdot x_2 = m^2 + m$,
 $\therefore x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = 4m^2 - 2m^2 - 2m = 2m^2 - 2m = 12$,
 $\therefore m = 3$ 或 $m = -2$;
 $\therefore m = -2$;

故选: A.

【点评】本题考查一元二次方程根与系数的关系; 牢记韦达定理, 灵活运用完全平方公式是解题的关键.

11. (3 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AB 为直径, $AD = CD$, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 连接 AC 交 DE 于点 F . 若 $\sin \angle CAB = \frac{3}{5}$, $DF = 5$, 则 BC 的长为 ()



A. 8

B. 10

C. 12

D. 16

【分析】连接 BD ，如图，先利用圆周角定理证明 $\angle ADE = \angle DAC$ 得到 $FD = FA = 5$ ，再根据正弦的定义计算出 $EF = 3$ ，则 $AE = 4$ ， $DE = 8$ ，接着证明 $\triangle ADE \sim \triangle DBE$ ，利用相似比得到 $BE = 16$ ，所以 $AB = 20$ ，然后在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中利用正弦定义计算出 BC 的长。

【解答】解：连接 BD ，如图，

$\because AB$ 为直径，

$\therefore \angle ADB = \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\because \angle AD = CD$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle DCA$ ，

而 $\angle DCA = \angle ABD$ ，

$\therefore \angle DAC = \angle ABD$ ，

$\because DE \perp AB$ ，

$\therefore \angle ABD + \angle BDE = 90^\circ$ ，

而 $\angle ADE + \angle BDE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle ABD = \angle ADE$ ，

$\therefore \angle ADE = \angle DAC$ ，

$\therefore FD = FA = 5$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AEF$ 中， $\because \sin \angle CAB = \frac{EF}{AF} = \frac{3}{5}$ ，

$\therefore EF = 3$ ，

$\therefore AE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ， $DE = 5 + 3 = 8$ ，

$\because \angle ADE = \angle DBE$ ， $\angle AED = \angle BED$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle DBE$ ，

$\therefore DE : BE = AE : DE$ ，即 $8 : BE = 4 : 8$ ，

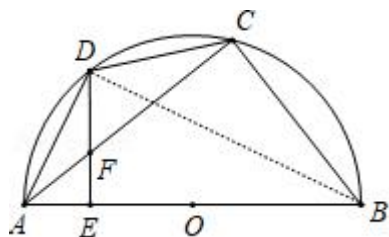
$\therefore BE = 16$ ，

$\therefore AB = 4 + 16 = 20$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\because \sin \angle CAB = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{5}$,

$$\therefore BC = 20 \times \frac{3}{5} = 12.$$

故选: C.



【点评】 本题考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半. 推论: 半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径. 也考查了解直角三角形.

12. (3 分) 抛物线 $y = x^2 + bx + 3$ 的对称轴为直线 $x = 1$. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + 3 - t = 0$ (t 为实数) 在 $-1 < x < 4$ 的范围内有实数根, 则 t 的取值范围是 ()

A. $2 \leq t < 11$ B. $t \geq 2$ C. $6 < t < 11$ D. $2 \leq t < 6$

【分析】 根据给出的对称轴求出函数解析式为 $y = x^2 - 2x + 3$, 将一元二次方程 $x^2 + bx + 3 - t = 0$ 的实数根可以看做 $y = x^2 - 2x + 3$ 与函数 $y = t$ 的有交点, 再由 $-1 < x < 4$ 的范围确定 y 的取值范围即可求解;

【解答】 解: $\because y = x^2 + bx + 3$ 的对称轴为直线 $x = 1$,

$$\therefore b = -2,$$

$$\therefore y = x^2 - 2x + 3,$$

$\therefore$ 一元二次方程 $x^2 + bx + 3 - t = 0$ 的实数根可以看做 $y = x^2 - 2x + 3$ 与函数 $y = t$ 的有交点,

$\therefore$ 方程在 $-1 < x < 4$ 的范围内有实数根,

当 $x = -1$ 时, $y = 6$;

当 $x = 4$ 时, $y = 11$;

函数 $y = x^2 - 2x + 3$ 在 $x = 1$ 时有最小值 2;

$$\therefore 2 \leq t < 11;$$

故选: A.

【点评】 本题考查二次函数的图象及性质; 能够将方程的实数根问题转化为二次函数与直线的交点问题, 借助数形结合解题是关键.

二、填空题 (本题共 6 小题, 满分 18 分. 只要求填写最后结果, 每小题填对得 3 分.)

13. (3分) 若 $2^x = 3$, $2^y = 5$, 则 $2^{x+y} = \underline{15}$.

【分析】由 $2^x = 3$, $2^y = 5$, 根据同底数幂的乘法可得 $2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y$, 继而可求得答案.

【解答】解: $\because 2^x = 3$, $2^y = 5$,

$$\therefore 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = 3 \times 5 = 15.$$

故答案为: 15.

【点评】此题考查了同底数幂的乘法. 此题比较简单, 注意掌握公式的逆运算.

14. (3分) 当直线 $y = (2 - 2k)x + k - 3$ 经过第二、三、四象限时, 则 k 的取值范围是 1
 $< k < 3$.

【分析】根据一次函数 $y = kx + b$, $k < 0$, $b < 0$ 时图象经过第二、三、四象限, 可得 $2 - 2k < 0$, $k - 3 < 0$, 即可求解;

【解答】解: $y = (2 - 2k)x + k - 3$ 经过第二、三、四象限,

$$\therefore 2 - 2k < 0, \quad k - 3 < 0,$$

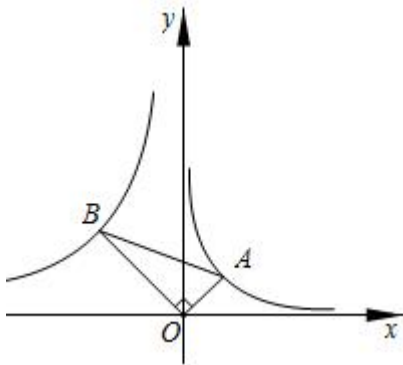
$$\therefore k > 1, \quad k < 3,$$

$$\therefore 1 < k < 3;$$

故答案为 $1 < k < 3$;

【点评】本题考查一次函数图象与系数的关系; 掌握一次函数 $y = kx + b$, k 与 b 对函数图象的影响是解题的关键.

15. (3分) 如图, $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle AOB = 90^\circ$, 顶点 A, B 分别在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 与 $y = \frac{-5}{x}$ ($x < 0$) 的图象上, 则 $\tan \angle BAO$ 的值为 $\sqrt{5}$.



【分析】过 A 作 $AC \perp x$ 轴, 过 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D , 于是得到 $\angle BDO = \angle ACO = 90^\circ$, 根

据反比例函数的性质得到 $S_{\triangle BDO} = \frac{5}{2}$, $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2}$, 根据相似三角形的性质得到 $\frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle OAC}} =$

$$\left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5, \text{ 求得 } \frac{OB}{OA} = \sqrt{5}, \text{ 根据三角函数的定义即可得到结论.}$$

【解答】解：过 A 作 $AC \perp x$ 轴，过 B 作 $BD \perp x$ 轴于 D ，

则 $\angle BDO = \angle ACO = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 顶点 A, B 分别在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) 与 $y = \frac{-5}{x}$ ($x < 0$) 的图象上，

$$\therefore S_{\triangle BDO} = \frac{5}{2}, S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2},$$

$\therefore \angle AOB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BOD + \angle DBO = \angle BOD + \angle AOC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle DBO = \angle AOC$ ，

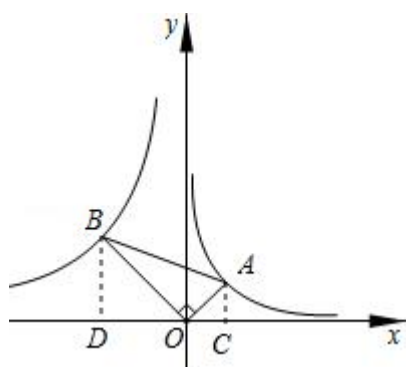
$\therefore \triangle BDO \sim \triangle OCA$ ，

$$\therefore \frac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle OAC}} = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}} = 5,$$

$$\therefore \frac{OB}{OA} = \sqrt{5},$$

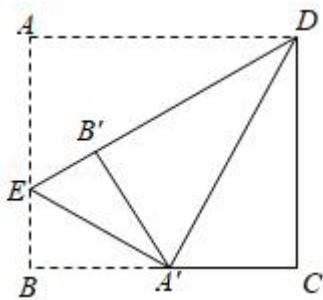
$$\therefore \tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = \sqrt{5},$$

故答案为： $\sqrt{5}$ 。



【点评】此题考查了相似三角形的判定与性质、反比例函数的性质以及直角三角形的性质．解题时注意掌握数形结合思想的应用，注意掌握辅助线的作法．

16. (3分) 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AD = 2$ ．将 $\angle A$ 向内翻折，点 A 落在 BC 上，记为 A' ，折痕为 DE ．若将 $\angle B$ 沿 EA' 向内翻折，点 B 恰好落在 DE 上，记为 B' ，则 $AB = \underline{\sqrt{3}}$ ．



【分析】利用矩形的性质，证明 $\angle ADE = \angle A'DE = \angle A'DC = 30^\circ$ ， $\angle C = \angle A'B'D = 90^\circ$ ，推出 $\triangle DB'A' \cong \triangle DCA'$ ， $CD = B'D$ ，设 $AB = DC = x$ ，在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中，通过勾股定理可求出 AB 的长度．

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，
 $\therefore \angle ADC = \angle C = \angle B = 90^\circ$ ， $AB = DC$ ，
 由翻折知， $\triangle AED \cong \triangle A'ED$ ， $\triangle A'BE \cong \triangle A'B'E$ ， $\angle A'B'E = \angle B = \angle A'B'D = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle AED = \angle A'ED$ ， $\angle A'EB = \angle A'EB'$ ， $BE = B'E$ ，
 $\therefore \angle AED = \angle A'ED = \angle A'EB = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ADE = 90^\circ - \angle AED = 30^\circ$ ， $\angle A'DE = 90^\circ - \angle A'EB = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle ADE = \angle A'DE = \angle A'DC = 30^\circ$ ，
 又 $\because \angle C = \angle A'B'D = 90^\circ$ ， $DA' = DA'$ ，
 $\therefore \triangle DB'A' \cong \triangle DCA'$ (AAS)，
 $\therefore DC = DB'$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AED$ 中，

$$\angle ADE = 30^\circ，AD = 2，$$

$$\therefore AE = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}，$$

$$\text{设 } AB = DC = x，\text{ 则 } BE = B'E = x - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\because AE^2 + AD^2 = DE^2，$$

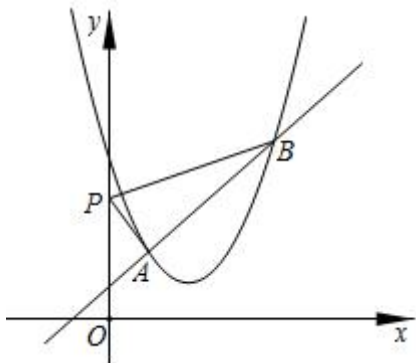
$$\therefore \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2^2 = \left(x + x - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2，$$

$$\text{解得，} x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ (负值舍去)，} x_2 = \sqrt{3}，$$

故答案为： $\sqrt{3}$ ．

【点评】本题考查了矩形的性质，轴对称的性质等，解题关键是通过轴对称的性质证明 $\angle AED = \angle A'ED = \angle A'EB = 60^\circ$ ．

17. (3分) 如图, 直线 $y=x+1$ 与抛物线 $y=x^2-4x+5$ 交于 A, B 两点, 点 P 是 y 轴上的一个动点, 当 $\triangle PAB$ 的周长最小时, $S_{\triangle PAB} = \frac{12}{5}$.



【分析】根据轴对称, 可以求得使得 $\triangle PAB$ 的周长最小时点 P 的坐标, 然后求出点 P 到直线 AB 的距离和 AB 的长度, 即可求得 $\triangle PAB$ 的面积, 本题得以解决.

【解答】解:
$$\begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-4x+5 \end{cases},$$

解得, $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=4 \\ y=5 \end{cases}$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(1, 2)$, 点 B 的坐标为 $(4, 5)$,

$$\therefore AB = \sqrt{(5-2)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2},$$

作点 A 关于 y 轴的对称点 A' , 连接 $A'B$ 与 y 轴的交于 P , 则此时 $\triangle PAB$ 的周长最小,

点 A' 的坐标为 $(-1, 2)$, 点 B 的坐标为 $(4, 5)$,

设直线 $A'B$ 的函数解析式为 $y=kx+b$,

$$\begin{cases} -k+b=2 \\ 4k+b=5 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k=\frac{3}{5} \\ b=\frac{13}{5} \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 $A'B$ 的函数解析式为 $y=\frac{3}{5}x+\frac{13}{5}$,

当 $x=0$ 时, $y=\frac{13}{5}$,

即点 P 的坐标为 $(0, \frac{13}{5})$,

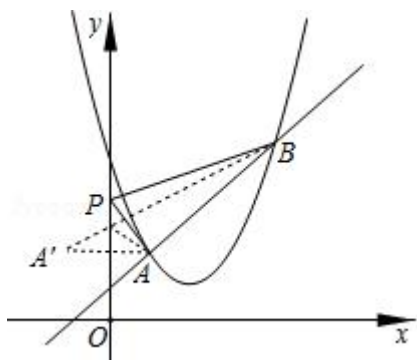
将 $x=0$ 代入直线 $y=x+1$ 中, 得 $y=1$,

$\therefore$ 直线 $y=x+1$ 与 y 轴的夹角是 45° ,

$$\therefore \text{点 } P \text{ 到直线 } AB \text{ 的距离是: } (\frac{13}{5} - 1) \times \sin 45^\circ = \frac{8}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5},$$

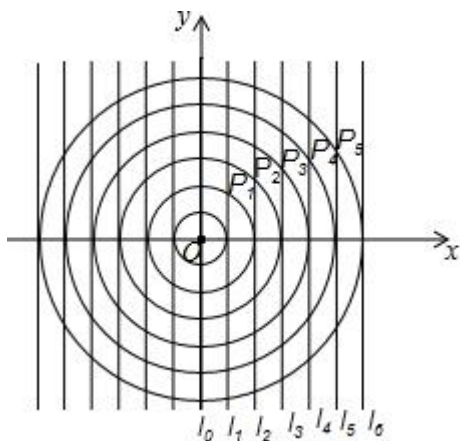
$$\therefore \triangle PAB \text{ 的面积是: } \frac{3\sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{5}}{2} = \frac{12}{5},$$

故答案为: $\frac{12}{5}$.



【点评】 本题考查二次函数的性质、一次函数的性质、轴对称 - 最短路径问题，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

18. (3分) 如图所示，在平面直角坐标系 xOy 中，一组同心圆的圆心为坐标原点 O ，它们的半径分别为 $1, 2, 3, \dots$ ，按照“加1”依次递增；一组平行线 $l_0, l_1, l_2, l_3, \dots$ 都与 x 轴垂直，相邻两直线的间距为 l ，其中 l_0 与 y 轴重合若半径为 2 的圆与 l_1 在第一象限内交于点 P_1 ，半径为 3 的圆与 l_2 在第一象限内交于点 P_2 ， $\dots$ ，半径为 $n+1$ 的圆与 l_n 在第一象限内交于点 P_n ，则点 P_n 的坐标为 $(n, \sqrt{2n+1})$. (n 为正整数)



【分析】 连 OP_1, OP_2, OP_3 ， l_1, l_2, l_3 与 x 轴分别交于 A_1, A_2, A_3 ，在 $\text{Rt}\triangle OA_1P_1$ 中， $OA_1 = 1, OP_1 = 2$ ，由勾股定理得出 $A_1P_1 = \sqrt{OP_1^2 - OA_1^2} = \sqrt{3}$ ，同理： $A_2P_2 = \sqrt{5}, A_3P_3 = \sqrt{7}, \dots$ ，得出 P_1 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$ ， P_2 的坐标为 $(2, \sqrt{5})$ ， P_3 的坐标为 $(3, \sqrt{7})$ ， $\dots$ ，得出规律，即可得出结果.

【解答】 解：连接 OP_1, OP_2, OP_3 ， l_1, l_2, l_3 与 x 轴分别交于 A_1, A_2, A_3 ，如图所示：

在 $\text{Rt}\triangle OA_1P_1$ 中, $OA_1 = 1$, $OP_1 = 2$,

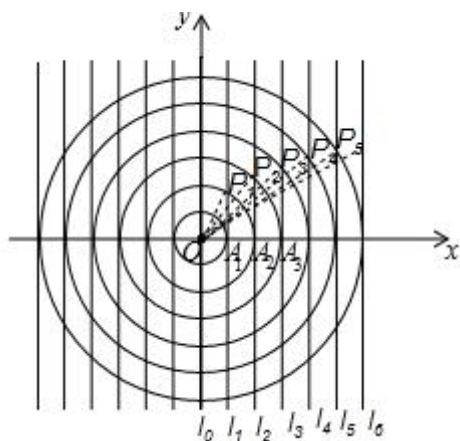
$$\therefore A_1P_1 = \sqrt{OP_1^2 - OA_1^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

同理: $A_2P_2 = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$, $A_3P_3 = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$, $\dots\dots$,

$\therefore P_1$ 的坐标为 $(1, \sqrt{3})$, P_2 的坐标为 $(2, \sqrt{5})$, P_3 的坐标为 $(3, \sqrt{7})$, $\dots\dots$,

$\dots$ 按照此规律可得点 P_n 的坐标是 $(n, \sqrt{(n+1)^2 - n^2})$, 即 $(n, \sqrt{2n+1})$

故答案为: $(n, \sqrt{2n+1})$.



【点评】 本题考查了切线的性质: 圆的切线垂直于过切点的半径. 也考查了勾股定理; 由题意得出规律是解题的关键.

三、解答题 (本题共 7 小题, 共 66 分. 解答应写出文字说明、证明过程或推演步骤.)

19. (5 分) 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x-2y=k \end{cases}$ 的解满足 $x > y$, 求 k 的取值范围.

【分析】 先用加减法求得 $x - y$ 的值 (用含 k 的式子表示), 然后再列不等式求解即可.

【解答】 解: $\begin{cases} 2x-3y=5 \text{ ①} \\ x-2y=k \text{ ②} \end{cases}$

① - ② 得: $x - y = 5 - k$,

$\because x > y$,

$\therefore x - y > 0$.

$\therefore 5 - k > 0$.

解得: $k < 5$.

【点评】 本题主要考查的是二元一次方程组的解, 求得 $x - y$ 的值 (用含 k 的式子表示) 是解题的关键.

20. (6 分) 自开展“全民健身运动”以来, 喜欢户外步行健身的人越来越多, 为方便群众步行健身, 某地政府决定对一段如图 1 所示的坡路进行改造. 如图 2 所示, 改造前的斜

坡 $AB = 200$ 米，坡度为 $1: \sqrt{3}$ ；将斜坡 AB 的高度 AE 降低 $AC = 20$ 米后，斜坡 AB 改造为斜坡 CD ，其坡度为 $1: 4$ 。求斜坡 CD 的长。（结果保留根号）

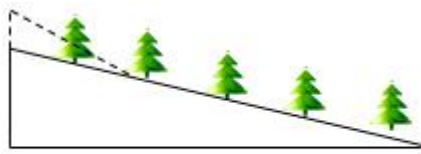


图 1

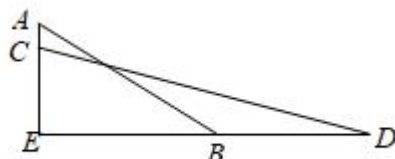


图 2

【分析】根据题意和锐角三角函数可以求得 AE 的长，进而得到 CE 的长，再根据锐角三角函数可以得到 ED 的长，最后用勾股定理即可求得 CD 的长。

【解答】解： $\because \angle AEB = 90^\circ$ ， $AB = 200$ ，坡度为 $1: \sqrt{3}$ ，

$$\therefore \tan \angle ABE = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle ABE = 30^\circ,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AB = 100,$$

$$\because AC = 20,$$

$$\therefore CE = 80,$$

$$\because \angle CED = 90^\circ, \text{ 斜坡 } CD \text{ 的坡度为 } 1: 4,$$

$$\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{1}{4},$$

$$\text{即 } \frac{80}{ED} = \frac{1}{4},$$

$$\text{解得, } ED = 320,$$

$$\therefore CD = \sqrt{80^2 + 320^2} = 80\sqrt{17} \text{ 米},$$

答：斜坡 CD 的长是 $80\sqrt{17}$ 米。

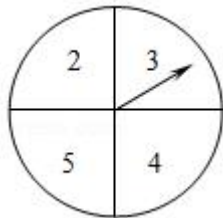
【点评】本题考查解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，解答本题的关键是明确题意，利用锐角三角函数和数形结合的思想解答。

- 21.（9 分）如图所示，有一个可以自由转动的转盘，其盘面分为 4 等份，在每一等份分别标有对应的数字 2, 3, 4, 5. 小明打算自由转动转盘 10 次，现已经转动了 8 次，每一次停止后，小明将指针所指数字记录如下：

次数	第 1 次	第 2 次	第 3 次	第 4 次	第 5 次	第 6 次	第 7 次	第 8 次	第 9 次	第 10 次
数字	3	5	2	3	3	4	3	5		

（1）求前 8 次的指针所指数字的平均数。

(2) 小明继续自由转动转盘 2 次，判断是否可能发生“这 10 次的指针所指数字的平均数不小于 3.3，且不大于 3.5”的结果？若有可能，计算发生此结果的概率，并写出计算过程；若不可能，说明理由。（指针指向盘面等分线时为无效转次。）



【分析】 (1) 根据平均数的定义求解可得；

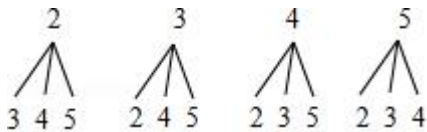
(2) 由这 10 次的指针所指数字的平均数不小于 3.3，且不大于 3.5 知后两次指正所指数和要满足不小于 5 且不大于 7，再画树状图求解可得．

【解答】 解：(1) 前 8 次的指针所指数字的平均数为 $\frac{1}{8} \times (3+5+2+3+3+4+3+5) = 3.5$ ；

(2) $\because$ 这 10 次的指针所指数字的平均数不小于 3.3，且不大于 3.5，

$\therefore$ 后两次指正所指数和要满足不小于 5 且不大于 7，

画树状图如下：



由树状图知共有 12 种等可能结果，其中符合条件的有 8 种结果，

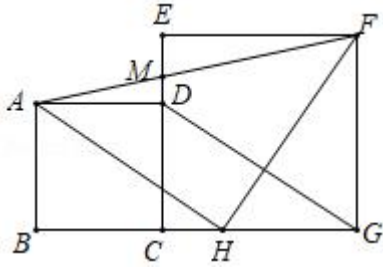
所以此结果的概率为 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ ．

【点评】 本题考查的是利用树状图求概率．用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

22. (10 分) 如图，正方形 $ABCD$ 的边 CD 在正方形 $ECGF$ 的边 CE 上，连接 DG ，过点 A 作 $AH \parallel DG$ ，交 BG 于点 H ．连接 HF ， AF ，其中 AF 交 EC 于点 M ．

(1) 求证： $\triangle AHF$ 为等腰直角三角形．

(2) 若 $AB = 3$ ， $EC = 5$ ，求 EM 的长．



【分析】(1) 通过证明四边形 $AHGD$ 是平行四边形, 可得 $AH = DG$, $AD = HG = CD$, 由“ SAS ”可证 $\triangle DCG \cong \triangle HGF$, 可得 $DG = HF$, $\angle HFG = \angle HGD$, 可证 $AH \perp HF$, $AH = HF$, 即可得结论;

(2) 由题意可得 $DE = 2$, 由平行线分线段成比例可得 $\frac{EM}{DM} = \frac{EF}{AD} = \frac{5}{3}$, 即可求 EM 的长.

【解答】证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$, 四边形 $ECGF$ 都是正方形

$$\therefore DA \parallel BC, AD = CD, FG = CG, \angle B = \angle CGF = 90^\circ$$

$$\therefore AD \parallel BC, AH \parallel DG$$

$\therefore$ 四边形 $AHGD$ 是平行四边形

$$\therefore AH = DG, AD = HG = CD$$

$$\therefore CD = HG, \angle ECG = \angle CGF = 90^\circ, FG = CG$$

$$\therefore \triangle DCG \cong \triangle HGF (SAS)$$

$$\therefore DG = HF, \angle HFG = \angle HGD$$

$$\therefore AH = HF,$$

$$\therefore \angle HGD + \angle DGF = 90^\circ$$

$$\therefore \angle HFG + \angle DGF = 90^\circ$$

$$\therefore DG \perp HF, \text{ 且 } AH \parallel DG$$

$$\therefore AH \perp HF, \text{ 且 } AH = HF$$

$\therefore \triangle AHF$ 为等腰直角三角形.

$$(2) \because AB = 3, EC = 5,$$

$$\therefore AD = CD = 3, DE = 2, EF = 5$$

$$\therefore AD \parallel EF$$

$$\therefore \frac{EM}{DM} = \frac{EF}{AD} = \frac{5}{3}, \text{ 且 } DE = 2$$

$$\therefore EM = \frac{5}{4}$$

【点评】 本题考查了正方形的性质, 平行四边形的判定和性质, 全等三角形的判定和性

质，平行线分线段成比例等知识点，灵活运用这些知识进行推理是本题的关键.

23. (10分) 扶贫工作小组对果农进行精准扶贫，帮助果农将一种有机生态水果拓宽了市场. 与去年相比，今年这种水果的产量增加了 1000 千克，每千克的平均批发价比去年降低了 1 元，批发销售总额比去年增加了 20%.

(1) 已知去年这种水果批发销售总额为 10 万元，求这种水果今年每千克的平均批发价是多少元?

(2) 某水果店从果农处直接批发，专营这种水果. 调查发现，若每千克的平均销售价为 41 元，则每天可售出 300 千克；若每千克的平均销售价每降低 3 元，每天可多卖出 180 千克，设水果店一天的利润为 w 元，当每千克的平均销售价为多少元时，该水果店一天的利润最大，最大利润是多少？（利润计算时，其它费用忽略不计.）

【分析】 (1) 由去年这种水果批发销售总额为 10 万元，可得今年的批发销售总额为 $10(1 - 20\%) = 12$ 万元，设这种水果今年每千克的平均批发价是 x 元，则去年的批发价为 $(x+1)$ 元，可列出方程：
$$\frac{120000}{x} - \frac{100000}{x+1} = 1000$$
，求得 x 即可

(2) 根据总利润 = (售价 - 成本) × 数量列出方程，根据二次函数的单调性即可求最大值.

【解答】 解：

(1) 由题意，设这种水果今年每千克的平均批发价是 x 元，则去年的批发价为 $(x+1)$ 元

今年的批发销售总额为 $10(1 - 20\%) = 12$ 万元

$$\therefore \frac{120000}{x} - \frac{100000}{x+1} = 1000$$

整理得 $x^2 - 19x - 120 = 0$

解得 $x = 24$ 或 $x = -5$ (不合题意，舍去)

故这种水果今年每千克的平均批发价是 24 元.

(2) 设每千克的平均售价为 m 元，依题意

由 (1) 知平均批发价为 24 元，则有

$$w = (m - 24) \left(\frac{41 - m}{3} \times 180 + 300 \right) = -60m^2 + 4200m - 66240$$

整理得 $w = -60(m - 35)^2 + 7260$

$$\because a = -60 < 0$$

$\therefore$ 抛物线开口向下

∴当 $m = 35$ 元时， w 取最大值

即每千克的平均销售价为 35 元时，该水果店一天的利润最大，最大利润是 7260 元

【点评】 本题考查了二次函数的性质在实际生活中的应用．最大销售利润的问题常利用函数的增减性来解答，我们首先要吃透题意，确定变量，建立函数模型，根据每天的利润 = 一件的利润 × 销售件数，建立函数关系式，此题为数学建模题，借助二次函数解决实际问题．

24. (13 分) 如图 1，菱形 $ABCD$ 的顶点 A, D 在直线 l 上， $\angle BAD = 60^\circ$ ，以点 A 为旋转中心将菱形 $ABCD$ 顺时针旋转 α ($0^\circ < \alpha < 30^\circ$)，得到菱形 $AB'C'D'$ ， $B'C'$ 交对角线 AC 于点 M ， $C'D'$ 交直线 l 于点 N ，连接 MN ．

(1) 当 $MN \parallel B'D'$ 时，求 α 的大小．

(2) 如图 2，对角线 $B'D'$ 交 AC 于点 H ，交直线 l 于点 G ，延长 $C'B'$ 交 AB 于点 E ，连接 EH ．当 $\triangle HEB'$ 的周长为 2 时，求菱形 $ABCD$ 的周长．

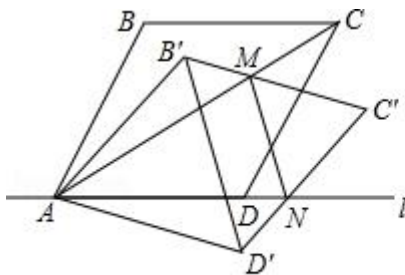


图1

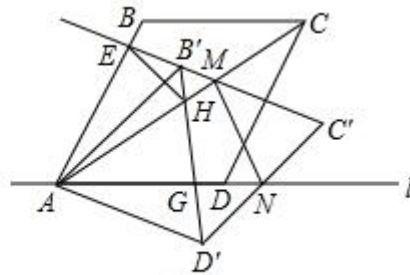


图2

【分析】 (1) 证明 $\triangle AB'M \cong \triangle AD'N$ (SAS)，推出 $\angle B'AM = \angle D'AN$ ，即可解决问题．

(2) 证明 $\triangle AEB' \cong \triangle AGD'$ (AAS)，推出 $EB' = GD'$ ， $AE = AG$ ，再证明 $\triangle AHE \cong \triangle AHG$ (SAS)，推出 $EH = GH$ ，推出 $B'D' = 2$ ，即可解决问题．

【解答】 解：(1) ∵ 四边形 $AB'C'D'$ 是菱形，

$$\therefore AB' = B'C' = C'D' = AD' ,$$

$$\therefore \angle B'AD' = \angle B'C'D' = 60^\circ ,$$

∴ $\triangle AB'D'$ ， $\triangle B'C'D'$ 是等边三角形，

$$\therefore MN \parallel B'C' ,$$

$$\therefore \angle C'MN = \angle C'B'D' = 60^\circ , \angle CNM = \angle C'D'B' = 60^\circ ,$$

∴ $\triangle C'MN$ 是等边三角形，

$$\therefore C'M = C'N ,$$

$\therefore MB' = ND'$,
 $\because \angle AB' M = \angle AD' N = 120^\circ$, $AB' = AD'$,
 $\therefore \triangle AB' M \cong \triangle AD' N$ (SAS),
 $\therefore \angle B' AM = \angle D' AN$,
 $\because \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAD = 30^\circ$,
 $\angle DAD' = 15^\circ$,
 $\therefore \alpha = 15^\circ$.

(2) $\because \angle C' B' D' = 60^\circ$,
 $\therefore \angle EB' G = 120^\circ$,
 $\because \angle EAG = 60^\circ$,
 $\therefore \angle EAG + \angle EB' G = 180^\circ$,
 $\therefore$ 四边形 $EAGB'$ 四点共圆,
 $\therefore \angle AEB' = \angle AGD'$,
 $\because \angle EAB' = \angle GAD'$, $AB' = AD'$,
 $\therefore \triangle AEB' \cong \triangle AGD'$ (AAS),
 $\therefore EB' = GD'$, $AE = AG$,
 $\because AH = AH$, $\angle HAE = \angle HAG$,
 $\therefore \triangle AHE \cong \triangle AHG$ (SAS),
 $\therefore EH = GH$,
 $\because \triangle EHB'$ 的周长为 2 ,
 $\therefore EH + EB' + HB' = B' H + HG + GD' = B' D' = 2$,
 $\therefore AB' = AB = 2$,
 $\therefore$ 菱形 $ABCD$ 的周长为 8 .

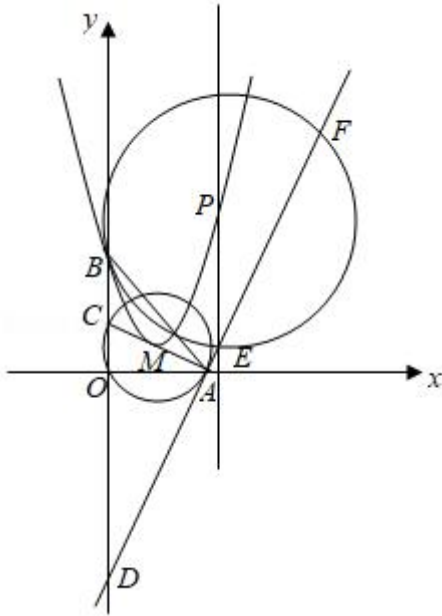
【点评】 本题考查旋转的性质，等边三角形的判定和性质，菱形的性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型．

25. (13 分) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中， O 为坐标原点，点 $A(4, 0)$ ，点 $B(0, 4)$ ， $\triangle ABO$ 的中线 AC 与 y 轴交于点 C ，且 $\odot M$ 经过 O, A, C 三点．

(1) 求圆心 M 的坐标；

(2) 若直线 AD 与 $\odot M$ 相切于点 A , 交 y 轴于点 D , 求直线 AD 的函数表达式;

(3) 在过点 B 且以圆心 M 为顶点的抛物线上有一动点 P , 过点 P 作 $PE \parallel y$ 轴, 交直线 AD 于点 E . 若以 PE 为半径的 $\odot P$ 与直线 AD 相交于另一点 F . 当 $EF = 4\sqrt{5}$ 时, 求点 P 的坐标.



【分析】(1) 利用中点公式即可求解;

(2) 设: $\angle CAO = \alpha$, 则 $\angle CAO = \angle ODA = \angle PEH = \alpha$, $\tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2} = \tan \alpha$, 则 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $AC = \sqrt{10}$, 则 $CD = \frac{AC}{\sin \angle CDA} = \frac{\sqrt{10}}{\sin \alpha} = 10$, 即可求解;

(3) 利用 $\cos \angle PEH = \frac{EH}{PE} = \frac{2\sqrt{5}}{PE} = \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, 求出 $PE = 5$, 即可求解.

【解答】解: (1) 点 $B(0, 4)$, 则点 $C(0, 2)$,

$\therefore$ 点 $A(4, 0)$, 则点 $M(2, 1)$;

(2) $\because \odot P$ 与直线 AD , 则 $\angle CAD = 90^\circ$,

设: $\angle CAO = \alpha$, 则 $\angle CAO = \angle ODA = \angle PEH = \alpha$,

$\tan \angle CAO = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{2} = \tan \alpha$, 则 $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$AC = \sqrt{10}$, 则 $CD = \frac{AC}{\sin \angle CDA} = \frac{\sqrt{10}}{\sin \alpha} = 10$,

则点 $D(0, -8)$,

将点 A 、 D 的坐标代入一次函数表达式: $y = mx + n$ 并解得:

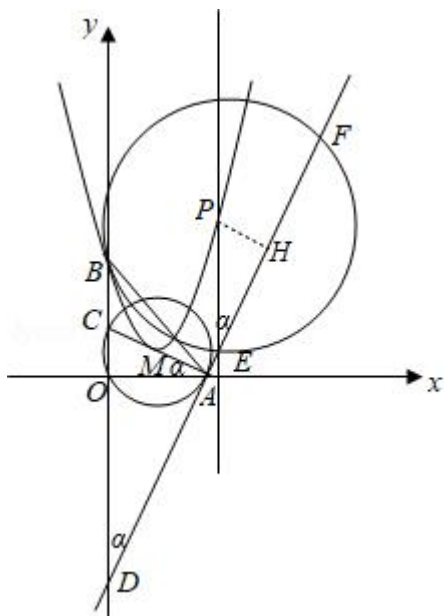
直线 AD 的表达式为: $y = 2x - 8$;

(3) 抛物线的表达式为: $y = a(x - 2)^2 + 1$,

将点 B 坐标代入上式并解得: $a = \frac{3}{4}$,

故抛物线的表达式为: $y = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4$,

过点 P 作 $PH \perp EF$, 则 $EH = \frac{1}{2}EF = 2\sqrt{5}$,



$$\cos \angle PEH = \frac{EH}{PE} = \frac{2\sqrt{5}}{PE} = \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

解得: $PE = 5$,

设点 $P(x, \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4)$, 则点 $E(x, 2x - 8)$,

$$\text{则 } PE = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 4 - 2x + 8 = 5,$$

解得 $x = \frac{14}{3}$ 或 2 (舍去 2),

则点 $P(\frac{14}{3}, \frac{19}{3})$.

【点评】 主要考查了二次函数的解析式的求法和与几何图形结合的综合能力的培养. 要会利用数形结合的思想把代数和几何图形结合起来, 利用点的坐标的意义表示线段的长度, 从而求出线段之间的关系.