

2019 年山东省济南市中考数学试卷数学试题卷

一、选择题：本大题共 12 个小题,每小题 4 分,共 48 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. -7 的相反数是 ()

A. 7

B. -7

C. $\frac{1}{7}$

D. $-\frac{1}{7}$

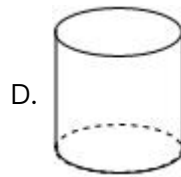
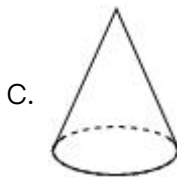
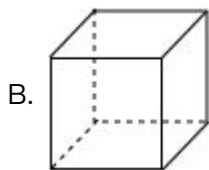
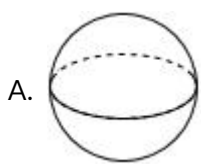
【答案】A

【解析】

【详解】根据概念, $(-7 \text{ 的相反数}) + (-7) = 0$, 则 -7 的相反数是 7.

故选 A.

2. 以下给出的几何体中, 主视图是矩形, 俯视图是圆的是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据几何体的正面看得到的图形, 可得答案.

【详解】A、主视图是圆, 俯视图是圆, 故 A 不符合题意;

B、主视图是矩形, 俯视图是矩形, 故 B 不符合题意;

C、主视图是三角形, 俯视图是圆, 故 C 不符合题意;

D、主视图是个矩形, 俯视图是圆, 故 D 符合题意;

故选 D.

【点睛】本题考查了简单几何体的三视图, 熟记简单几何的三视图是解题关键.

3. 2019 年 1 月 3 日, “嫦娥四号” 探测器成功着陆在月球背面东经 177.6° 、南纬 45.5° 附近, 实现了人类首次在月球背面软着陆. 数字 177.6 用科学记数法表示为 ()

A. 0.1776×10^3

B. 1.776×10^2

C. 1.776×10^3

D. 17.76×10^2

【答案】B

【解析】

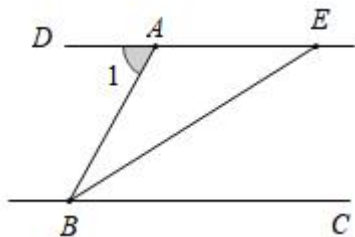
【分析】用科学记数法表示较大的数时，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，据此判断即可.

【详解】解： $177.6 = 1.776 \times 10^2$.

故选 B.

【点睛】本题考查用科学记数法表示较大的数，一般形式为 $a \times 10^n$ ，其中 $1 \leq |a| < 10$ ，确定 a 与 n 的值是解题的关键.

4. 如图， $DE \parallel BC$ ， BE 平分 $\angle ABC$ ，若 $\angle 1 = 70^\circ$ ，则 $\angle CBE$ 的度数为 ()



A. 20°

B. 35°

C. 55°

D. 70°

【答案】B

【解析】

【分析】根据平行线的性质可得 $\angle 1 = \angle ABC = 70^\circ$ ，再根据角平分线的定义可得答案.

【详解】解： $\because DE \parallel BC$

$$\therefore \angle 1 = \angle ABC = 70^\circ$$

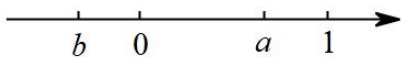
$\because BE$ 平分 $\angle ABC$

$$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \angle ABC = 35^\circ$$

故选 B.

【点睛】此题主要考查了平行线的性质，以及角平分线的定义，关键是掌握两直线平行，内错角相等.

5. 实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列关系式不成立的是 ()



A. $a - 5 > b - 5$

B. $6a > 6b$

C. $-a > -b$

D. $a - b > 0$

【答案】C

【解析】

【分析】根据数轴判断出 a, b 的正负情况以及绝对值的大小，然后解答即可.

【详解】由图可知， $b < 0 < a$ ，且 $|b| < |a|$ ，

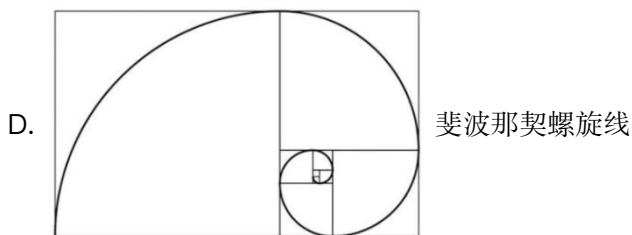
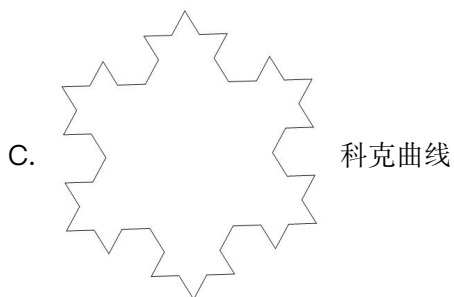
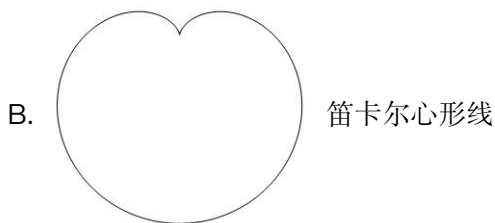
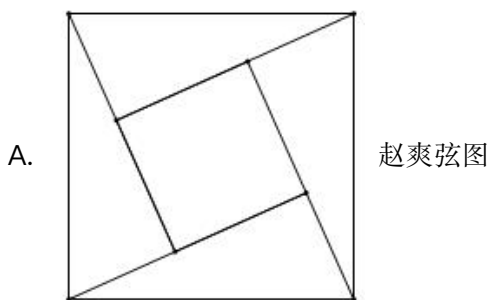
$\therefore a - 5 > b - 5$ ， $6a > 6b$ ， $-a < -b$ ， $a - b > 0$ ，

$\therefore$ 关系式不成立的是选项 C.

故选 C.

【点睛】本题考查了实数与数轴，实数的大小比较，利用了两个负数相比较，绝对值大的反而小.

6. 下面的图形是用数学家名字命名的，其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



【答案】C

【解析】

【分析】根据把一个图形绕某一点旋转 180° ，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点叫做对称中心；如果一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能够互相重合，这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴进行分析即可.

【详解】A. 不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项错误；

B. 是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

C. 是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项正确；

D. 不是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项错误；

故选 C.

【点睛】此题主要考查了轴对称图形和中心对称图形，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠

后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合.

7. 化简 $\frac{4}{x^2-4} + \frac{1}{x+2}$ 的结果是 ()

- A. $x-2$ B. $\frac{1}{x-2}$ C. $\frac{2}{x-2}$ D. $\frac{2}{x+2}$

【答案】B

【解析】

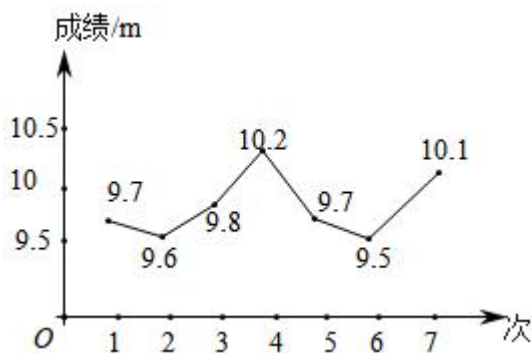
【分析】原式通分并利用同分母分式的加法法则计算即可求出值.

【详解】原式 = $\frac{4}{(x+2)(x-2)} + \frac{x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

故选 B.

【点睛】本题考查分式的加减法；熟练掌握分式的运算法则，正确进行因式分解是解题的关键.

8. 在学校的体育训练中，小杰投掷实心球的 7 次成绩如统计图所示，则这 7 次成绩的中位数和平均数分别是 ()



- A. $9.7m$, $9.9m$ B. $9.7m$, $9.8m$ C. $9.8m$, $9.7m$ D. $9.8m$, $9.9m$

【答案】B

【解析】

【分析】将这 7 个数据从小到大排序后处在第 4 位的数是中位数，利用算术平均数的计算公式进行计算即可.

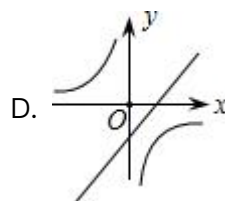
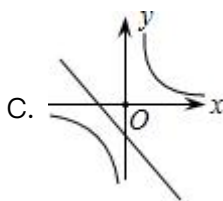
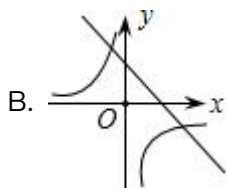
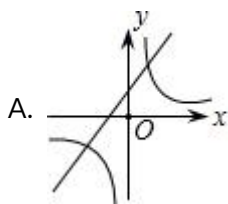
【详解】把这 7 个数据从小到大排列处于第 4 位的数是 $9.7m$ ，因此中位数是 $9.7m$ ，

平均数为： $(9.5+9.6+9.7+9.7+9.8+10.1+10.2) \div 7 = 9.8m$ ，

故选 B.

【点睛】考查中位数、算术平均数的计算方法，将一组数据从小到大排列后处在中间位置的一个数或两个数的平均数就是这组数据的中位数，平均数则是反映一组数据的集中水平.

9. 函数 $y = -ax + a$ 与 $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) 在同一坐标系中的图象可能是 ()



【答案】D

【解析】

【分析】根据反比例函数与一次函数的图象特点解答即可.

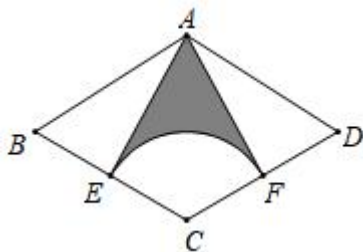
【详解】 $a > 0$ 时, $-a < 0$, $y = -ax + a$ 在一、二、四象限, $y = \frac{a}{x}$ 在一、三象限, 无选项符合.

$a < 0$ 时, $-a > 0$, $y = -ax + a$ 在一、三、四象限, $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$) 在二、四象限, 只有 D 符合;

故选 D.

【点睛】本题主要考查了反比例函数的图象性质和一次函数的图象性质, 关键是由 a 的取值确定函数所在的象限.

10. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, 点 E 是 BC 的中点, 以 C 为圆心、 CE 为半径作弧, 交 CD 于点 F , 连接 AE, AF . 若 $AB = 6$, $\angle B = 60^\circ$, 则阴影部分的面积为 ()



A. $9\sqrt{3} - 3\pi$

B. $9\sqrt{3} - 2\pi$

C. $18\sqrt{3} - 9\pi$

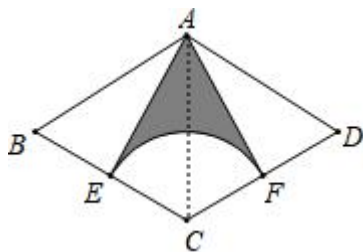
D. $18\sqrt{3} - 6\pi$

【答案】A

【解析】

【分析】连接 AC , 根据菱形的性质求出 $\angle BCD$ 和 $BC = AB = 6$, 求出 AE 长, 再根据三角形的面积和扇形的面积求出即可.

【详解】连接 AC ,



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$\therefore AB = BC = 6$,

$\because \angle B = 60^\circ$, E 为 BC 的中点,

$\therefore CE = BE = 3 = CF$, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB \parallel CD$,

$\because \angle B = 60^\circ$,

$\therefore \angle BCD = 180^\circ - \angle B = 120^\circ$,

由勾股定理得: $AE = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$,

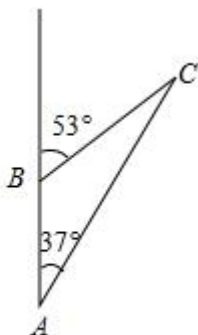
$\therefore S_{\triangle AEB} = S_{\triangle AEC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4.5\sqrt{3} = S_{\triangle AFC}$,

$\therefore$ 阴影部分的面积 $S = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle AFC} - S_{\text{扇形} CEF} = 4.5\sqrt{3} + 4.5\sqrt{3} - \frac{120\pi \times 3^2}{360} = 9\sqrt{3} - 3\pi$,

故选 A.

【点睛】 本题考查了等边三角形的性质和判定, 菱形的性质, 扇形的面积计算等知识点, 能求出 $\triangle AEC$ 、 $\triangle AFC$ 和扇形 ECF 的面积是解此题的关键.

11. 某数学社团开展实践性研究, 在大明湖南门 A 测得历下亭 C 在北偏东 37° 方向, 继续向北走 $105m$ 后到达游船码头 B, 测得历下亭 C 在游船码头 B 的北偏东 53° 方向. 请计算一下南门 A 与历下亭 C 之间的距离约为 () (参考数据: $\tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}$, $\tan 53^\circ \approx \frac{4}{3}$)



A. $225m$

B. $275m$

C. $300m$

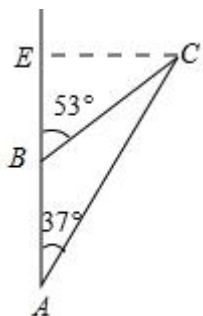
D. $315m$

【答案】 C

【解析】

【分析】如图，作 $CE \perp BA$ 于 E ．设 $EC = x \text{ m}$ ， $BE = y \text{ m}$ ．构建方程组求出 x ， y 即可解决问题．

【详解】如图，作 $CE \perp BA$ 于 E ．设 $EC = x \text{ m}$ ， $BE = y \text{ m}$ ．



在 $Rt\triangle ECB$ 中， $\tan 53^\circ = \frac{EC}{EB}$ ，即 $\frac{4}{3} = \frac{x}{y}$ ，

在 $Rt\triangle AEC$ 中， $\tan 37^\circ = \frac{EC}{AE}$ ，即 $\frac{3}{4} = \frac{x}{105 + y}$ ，

解得 $x = 180$ ， $y = 135$ ，

$\therefore AC = \sqrt{EC^2 + AE^2} = \sqrt{180^2 + 240^2} = 300 \text{ (m)}$ ，

故选 C．

【点睛】本题考查解直角三角形的应用－方向角等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造直角三角形解决问题，学会利用参数构建方程组解决问题，属于中考常考题型．

12. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + \frac{1}{2} = 0$ 有一个根是 -1 ，若二次函数 $y = ax^2 + bx + \frac{1}{2}$ 的图象的顶点在第一象限，设 $t = 2a + b$ ，则 t 的取值范围是 ()

- A. $\frac{1}{4} < t < \frac{1}{2}$ B. $-1 < t \leq \frac{1}{4}$ C. $-\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2}$ D. $-1 < t < \frac{1}{2}$

【答案】D

【解析】

【分析】二次函数的图象过点 $(-1, 0)$ ，则 $a - b + \frac{1}{2} = 0$ ，而 $t = 2a + b$ ，则 $a = \frac{2t-1}{6}$ ， $b = \frac{2t+2}{6}$ ，二次函数的图象的顶点在第一象限，则 $-\frac{b}{2a} > 0$ ， $\frac{1}{2} - \frac{b^2}{4a} > 0$ ，即可求解．

【详解】 $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + \frac{1}{2} = 0$ 有一个根是 -1 ，
 $\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + \frac{1}{2}$ 的图象过点 $(-1, 0)$ ，

$$\therefore a - b + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\therefore b = a + \frac{1}{2}, \quad t = 2a + b,$$

$$\text{则 } a = \frac{2t-1}{6}, \quad b = \frac{2t+2}{6},$$

$\therefore$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + \frac{1}{2}$ 的图象的顶点在第一象限,

$$\therefore -\frac{b}{2a} > 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{b^2}{4a} > 0,$$

将 $a = \frac{2t-1}{6}$, $b = \frac{2t+2}{6}$ 代入上式得:

$$\frac{\frac{2t+2}{6}}{2 \times \frac{2t-1}{6}} > 0, \quad \text{解得: } -1 < t < \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{2t+2}{6}\right)^2}{4\left(\frac{2t-1}{6}\right)} > 0, \quad \text{解得: } t < \frac{1}{2} \text{ 或 } 1 < t < 3,$$

$$\text{故: } -1 < t < \frac{1}{2},$$

故选 D.

【点睛】主要考查图象与二次函数系数之间的关系，会利用对称轴的范围求 $2a$ 与 b 的关系，以及二次函数与方程之间的转换，根的判别式的熟练运用

二、填空题（本大题共 6 个小题，每题 4 分，共 24 分，将答案填在答题纸上）

13. 分解因式: $a^2 - 4a + 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

【答案】 $(a-2)^2$.

【解析】

【分析】根据完全平方公式的特点：两项平方项的符号相同，另一项是两底数积的 2 倍，本题可用完全平方公式分解因式.

【详解】解: $a^2 - 4a + 4 = (a-2)^2$.

故答案为: $(a-2)^2$.

14. 如图，一个可以自由转动的转盘，被分成了 6 个相同的扇形，转动转盘，转盘停止时，指针落在红色区域的概率等于_____.



【答案】 $\frac{1}{3}$.

【解析】

【分析】首先确定在图中红色区域的面积在整个面积中占的比例，根据这个比例即可求出指针落在红色区域的概率.

【详解】由于一个圆平均分成 6 个相等的扇形，而转动的转盘又是自由停止的，所以指针指向每个扇形的可能性相等，

即有 6 种等可能的结果，在这 6 种等可能结果中，指针指向红色部分区域的有 2 种可能结果，

所以指针落在红色区域的概率是 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ；

故答案为 $\frac{1}{3}$.

【点睛】此题考查了概率公式，用到的知识点为：概率 = 相应的面积与总面积之比.

15. 如果一个正多边形的内角和是 720° ，则这个正多边形是正_____边形.

【答案】 六

【解析】

【分析】根据多边形的内角和公式求解即可.

【详解】设这个正多边形是正 n 边形，

则 $(n-2) \times 180^\circ = 720^\circ$ ，

解得： $n = 6$.

$\therefore$ 这个正多边形是正六边形.

故答案为： 六.

【点睛】本题考查多边形的内角和公式. 掌握 n 边形的内角和为 $(n-2) \times 180^\circ$ 是解题关键.

16. 代数式 $\frac{2x-1}{3}$ 与代数式 $3-2x$ 的和为 4，则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 -1.

【解析】

【分析】根据题意列出方程，求出方程的解即可得到 x 的值.

【详解】根据题意得： $\frac{2x-1}{3}+3-2x=4$ ，

去分母得： $2x-1+9-6x=12$ ，

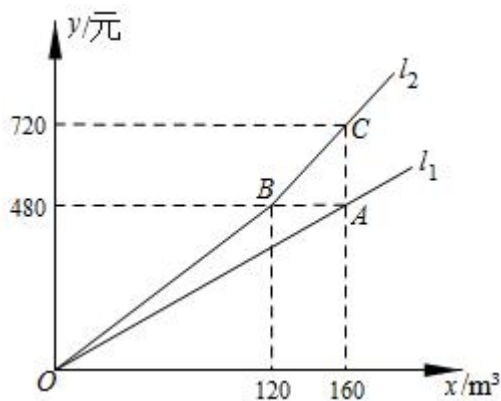
移项合并得： $-4x=4$ ，

解得： $x=-1$ ，

故答案为-1.

【点睛】此题考查了解一元一次方程，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

17. 某市为提倡居民节约用水，自今年1月1日起调整居民用水价格. 图中 l_1 、 l_2 分别表示去年、今年水费 y （元）与用水量 x （ m^3 ）之间的关系. 小雨家去年用水量为 $150 m^3$ ，若今年用水量与去年相同，水费将比去年多_____元.



【答案】210.

【解析】

【分析】根据函数图象中的数据可以求得 $x > 120$ 时， l_2 对应的函数解析式，从而可以求得 $x = 150$ 时对应的函数值，由 l_1 的图象可以求得 $x = 150$ 时对应的函数值，从而可以计算出题目中所求问题的答案，本题得以解决.

【详解】设当 $x > 120$ 时， l_2 对应的函数解析式为 $y = kx + b$ ，

$$\begin{cases} 120k + b = 480 \\ 160k + b = 720 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} k = 6 \\ b = -240 \end{cases},$$

即当 $x > 120$ 时， l_2 对应的函数解析式为 $y = 6x - 240$ ，

当 $x = 150$ 时， $y = 6 \times 150 - 240 = 660$ ，

由图象可知，去年的水价是 $480 \div 160 = 3$ （元/ m^3 ），故小雨家去年用水量为 $150 m^3$ ，需要缴费： $150 \times 3 = 450$ （元），

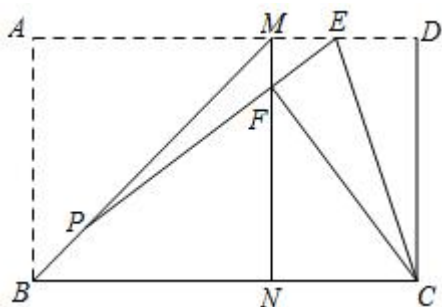
$$660 - 450 = 210 \text{ (元)},$$

即小雨家去年用水量为 $150 m^3$ ，若今年用水量与去年相同，水费将比去年多 210 元，

故答案为 210.

【点睛】本题考查一次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，利用一次函数的性质和数形结合的思想解答.

18. 如图，在矩形纸片 $ABCD$ 中，将 AB 沿 BM 翻折，使点 A 落在 BC 上的点 N 处， BM 为折痕，连接 MN ；再将 CD 沿 CE 翻折，使点 D 恰好落在 MN 上的点 F 处， CE 为折痕，连接 EF 并延长交 BM 于点 P ，若 $AD = 8$ ， $AB = 5$ ，则线段 PE 的长等于_____.



【答案】 $\frac{20}{3}$.

【解析】

【分析】根据折叠可得 $ABNM$ 是正方形， $CD = CF = 5$ ， $\angle D = \angle CFE = 90^\circ$ ， $ED = EF$ ，可求出三角形 FNC 的三边为 3，4，5，在 $Rt\triangle MEF$ 中，由勾股定理可以求出三边的长，通过作辅助线，可证 $\triangle FNC \sim \triangle PGF$ ，三边占比为 3: 4: 5，设未知数，通过 $PG = HN$ ，列方程求出待定系数，进而求出 PF 的长，然后求 PE 的长.

【详解】过点 P 作 $PG \perp FN$ ， $PH \perp BN$ ，垂足为 G 、 H ，
由折叠得： $ABNM$ 是正方形， $AB = BN = NM = MA = 5$ ，

$$CD = CF = 5, \angle D = \angle CFE = 90^\circ, ED = EF,$$

$$\therefore NC = MD = 8 - 5 = 3,$$

$$\text{在 } Rt\triangle FNC \text{ 中, } FN = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4,$$

$$\therefore MF = 5 - 4 = 1,$$

在 $Rt\triangle MEF$ 中，设 $EF = x$ ，则 $ME = 3 - x$ ，由勾股定理得，

$$1^2 + (3 - x)^2 = x^2,$$

理数运算一样，要从高级到低级，即先算乘方、开方，再算乘除，最后算加减，有括号的要先算括号里面的，同级运算要按照从左到右的顺序进行．另外，有理数的运算律在实数范围内仍然适用．

20. 解不等式组
$$\begin{cases} 5x-3 \leq 2x+9 \\ 3x > \frac{x+10}{2} \end{cases}$$
，并写出它的所有整数解．

【答案】不等式组的解集为 $2 < x \leq 4$ ；所有整数解为 3、4．

【解析】

【分析】先求出不等式的解集，再求出不等式组的解集，即可得出答案．

【详解】解不等式组如下：

$$\begin{cases} 5x-3 \leq 2x+9 \text{ ①} \\ 3x > \frac{x+10}{2} \text{ ②} \end{cases}$$

解①得： $x \leq 4$ ；

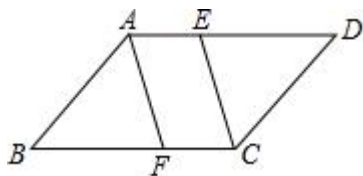
解②得： $x > 2$ ；

$\therefore$ 原不等式组的解集为 $2 < x \leq 4$ ；

$\therefore$ 原不等式组的所有整数解为 3、4．

【点睛】本题考查了解一元一次不等式组，一元一次不等式的应用，解此题的关键是能根据不等式的解集求出不等式组的解集．

21. 如图，在 $ABCD$ 中， E, F 分别是 AD 和 BC 上的点， $\angle DAF = \angle BCE$ ．求证： $BF = DE$ ．



【答案】见解析

【解析】

【分析】由平行四边形的性质得出 $\angle B = \angle D$ ， $\angle BAD = \angle BCD$ ， $AB = CD$ ，证出 $\angle BAF = \angle DCE$ ，证明 $\triangle ABF \cong \triangle CDE$ （ASA），即可得出 $BF = DE$ ．

【详解】证明： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$\therefore \angle B = \angle D$ ， $\angle BAD = \angle BCD$ ， $AB = CD$ ，

$\because \angle DAF = \angle BCE$ ，

$\therefore \angle BAF = \angle DCE$ ，

在 $\triangle ABF$ 和 $\triangle CDE$ 中，

$$\begin{cases} \angle B = \angle D \\ AB = CD \\ \angle BAF = \angle DCE \end{cases},$$

$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CDE$ (ASA),

$\therefore BF = DE$.

【点睛】本题考查了平行四边形的性质、全等三角形的判定与性质；解题的关键是熟练掌握平行四边形的性质，证明三角形全等.

22. 为提高学生的阅读兴趣，某学校建立了共享书架，并购买了一批书籍. 其中购买 A 种图书花费了 3000 元，购买 B 种图书花费了 1600 元，A 种图书的单价是 B 种图书的 1.5 倍，购买 A 种图书的数量比 B 种图书多 20 本.

(1) 求 A 和 B 两种图书的单价；

(2) 书店在“世界读书日”进行打折促销活动，所有图书都按 8 折销售学校当天购买了 A 种图书 20 本和 B 种图书 25 本，共花费多少元？

【答案】(1) A 种图书的单价为 30 元，B 种图书的单价为 20 元；(2) 共花费 880 元.

【解析】

【分析】(1) 设 B 种图书的单价为 x 元，则 A 种图书的单价为 $1.5x$ 元，根据数量 = 总价 $\div$ 单价结合花 3000 元购买的 A 种图书比花 1600 元购买的 B 种图书多 20 本，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论；

(2) 根据总价 = 单价 $\times$ 数量，即可求出结论.

【详解】(1) 设 B 种图书的单价为 x 元，则 A 种图书的单价为 $1.5x$ 元，

依题意，得：
$$\frac{3000}{1.5x} - \frac{1600}{x} = 20,$$

解得： $x = 20$,

经检验， $x = 20$ 是所列分式方程的解，且符合题意，

$\therefore 1.5x = 30$.

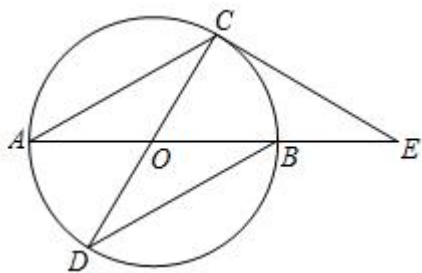
答：A 种图书的单价为 30 元，B 种图书的单价为 20 元.

(2) $30 \times 0.8 \times 20 + 20 \times 0.8 \times 25 = 880$ (元).

答：共花费 880 元.

【点睛】本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

23. 如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的两条直径，过点 C 的 $\odot O$ 的切线交 AB 的延长线于点 E，连接 AC、BD.



(1) 求证: $\angle ABD = \angle CAB$;

(2) 若 B 是 OE 的中点, $AC = 12$, 求 $\odot O$ 的半径.

【答案】 (1) 见解析; (2) $\odot O$ 的半径为 $4\sqrt{3}$.

【解析】

【分析】 (1) 根据半径相等可知 $\angle OAC = \angle OCA$, $\angle ODB = \angle OBD$, 再根据对顶角相等和三角形内角和定理证明 $\angle ABD = \angle CAB$;

(2) 连接 BC . 由 CE 为 $\odot O$ 的切线, 可得 $\angle OCE = 90^\circ$, 因为 B 是 OE 的中点, 得 $BC = OB$, 又 $OB = OC$, 可知 $\triangle OBC$ 为等边三角形, $\angle ABC = 60^\circ$, 所以 $BC = \frac{\sqrt{3}}{3} AC = 4\sqrt{3}$, 即 $\odot O$ 的半径为 $4\sqrt{3}$.

【详解】 (1) 证明: $\because AB$ 、 CD 是 $\odot O$ 的两条直径,

$\therefore OA = OC = OB = OD$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$, $\angle ODB = \angle OBD$,

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA = \angle ODB = \angle OBD$,

即 $\angle ABD = \angle CAB$;

(2) 连接 BC .

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的两条直径,

$\therefore \angle ACB = 90^\circ$,

$\because CE$ 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OCE = 90^\circ$,

$\because B$ 是 OE 的中点,

$\therefore BC = OB$,

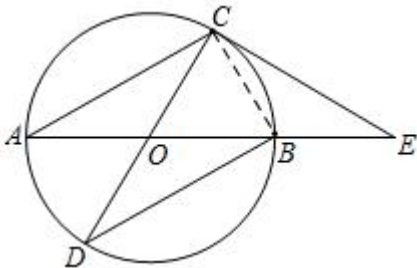
$\because OB = OC$,

$\therefore \triangle OBC$ 为等边三角形,

$\therefore \angle ABC = 60^\circ$,

$\therefore \angle A = 30^\circ,$
 $\therefore BC = \frac{\sqrt{3}}{3} AC = 4\sqrt{3},$
 $\therefore OB = 4\sqrt{3},$

即⊙O 的半径为 $4\sqrt{3}.$



【点睛】 本题考查了切线的性质、圆周角定理、含 30° 角的直角三角形的性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

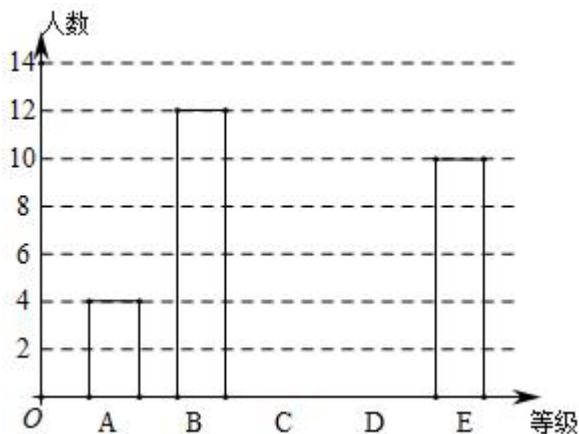
24. 某学校八年级共 400 名学生，为了解该年级学生的视力情况，从中随机抽取 40 名学生的视力数据作为样本，数据统计如下：

4.2 4.1 4.7 4.1 4.3 4.3 4.4 4.6 4.1 5.2
 5.2 4.5 5.0 4.5 4.3 4.4 4.8 5.3 4.5 5.2
 4.4 4.2 4.3 5.3 4.9 5.2 4.9 4.8 4.6 5.1
 4.2 4.4 4.5 4.1 4.5 5.1 4.4 5.0 5.2 5.3

根据数据绘制了如下的表格和统计图：

等 级	视 力 (x)	频数	频率
A	$x < 4.2$	4	0.1
B	$4.2 \leq x \leq 4.4$	12	0.3
C	$4.5 \leq x \leq 4.7$	a	
D	$4.8 \leq x \leq 5.0$		b
E	$5.1 \leq x \leq 5.3$	10	0.25

合计	40	1
----	----	---



根据上面提供的信息，回答下列问题：

- (1) 统计表中的 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- (2) 请补全条形统计图；
- (3) 根据抽样调查结果，请估计该校八年级学生视力为“E级”的有多少人？
- (4) 该年级学生会宣传部有 2 名男生和 2 名女生，现从中随机挑选 2 名同学参加“防控近视，爱眼护眼”宣传活动，请用树状图法或列表法求出恰好选中“1 男 1 女”的概率。

【答案】 (1) 8、0.15；(2) 补全图形见解析；(3) 估计该校八年级学生视力为“E级”的有 100 人；(4) 恰好选到 1 名男生和 1 名女生的概率 $\frac{2}{3}$ 。

【解析】

【分析】 (1) 由所列数据得出 a 的值，继而求出 C 组对应的频率，再根据频率之和等于 1 求出 b 的值；

(2) 总人数乘以 b 的值求出 D 组对应的频数，从而补全图形；

(3) 利用样本估计总体思想求解可得；

(4) 列表得出所有等可能的情况数，找出刚好抽到一男一女的情况数，即可求出所求的概率。

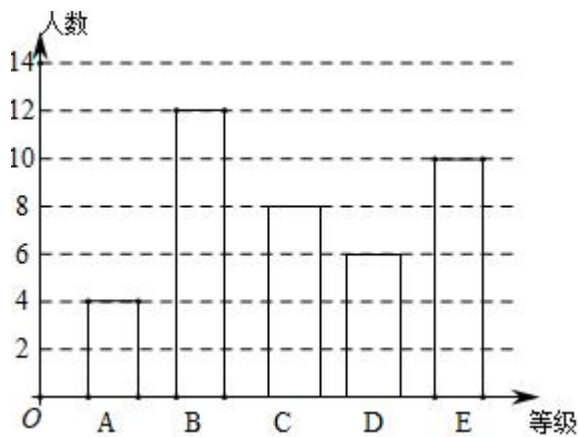
【详解】 (1) 由题意知 C 等级的频数 $a = 8$ ，
则 C 组对应的频率为 $8 \div 40 = 0.2$ ，

$$\therefore b = 1 - (0.1 + 0.3 + 0.2 + 0.25) = 0.15,$$

故答案为 8、0.15；

(2) D 组对应的频数为 $40 \times 0.15 = 6$ ，

补全图形如下：



(3) 估计该校八年级学生视力为“E级”的有 $400 \times 0.25 = 100$ (人)；

(4) 列表如下：

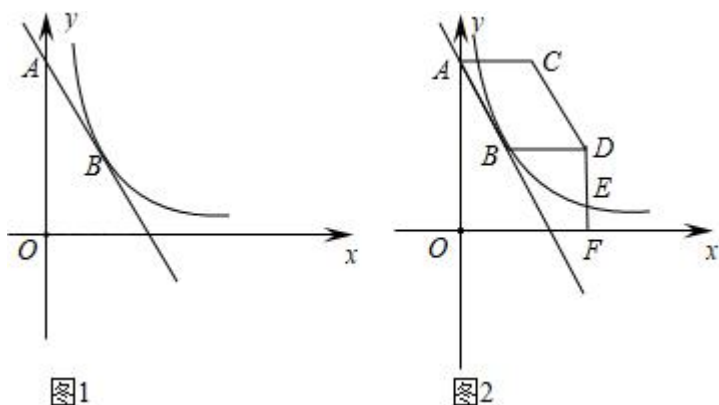
	男	男	女	女
男		(男, 男)	(女, 男)	(女, 男)
男	(男, 男)		(女, 男)	(女, 男)
女	(男, 女)	(男, 女)		(女, 女)
女	(男, 女)	(男, 女)	(女, 女)	

得到所有等可能的情况有 12 种，其中恰好抽中一男一女的情况有 8 种，

所以恰好选到 1 名男生和 1 名女生的概率 $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ 。

【点睛】 本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率．也考查了统计图．

25. 如图 1，点 $A(0,8)$ 、点 $B(2,a)$ 在直线 $y = -2x + b$ 上，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象经过点 B．



(1) 求 a 和 k 的值;

(2) 将线段 AB 向右平移 m 个单位长度 ($m > 0$), 得到对应线段 CD , 连接 AC 、 BD .

①如图 2, 当 $m = 3$ 时, 过 D 作 $DF \perp x$ 轴于点 F , 交反比例函数图象于点 E , 求 $\frac{DE}{EF}$ 的值;

②在线段 AB 运动过程中, 连接 BC , 若 $\triangle BCD$ 是以 BC 为腰的等腰三角形, 求所有满足条件的 m 的值.

【答案】 (1) $a = 4$, $k = 8$; (2) ① $\frac{DE}{EF} = \frac{3}{2}$; ② $\triangle BCD$ 是以 BC 为腰的等腰三角形, 满足条件的 m 的值为 4 或 5.

【解析】

【分析】 (1) 先将点 A 坐标代入直线 AB 的解析式中, 求出 a , 进而求出点 B 坐标, 再将点 B 坐标代入反比例函数解析式中即可得出结论;

(2) ①先确定出点 $D(5, 4)$, 进而求出点 E 坐标, 进而求出 DE , EF , 即可得出结论;

②先表示出点 C , D 坐标, 再分两种情况: I、当 $BC = CD$ 时, 判断出点 B 在 AC 的垂直平分线上, 即可得出结论;

II、当 $BC = BD$ 时, 先表示出 BC , 用 $BC = BD$ 建立方程求解即可得出结论.

【详解】 (1) $\because$ 点 $A(0, 8)$ 在直线 $y = 2x + b$ 上,

$$\therefore -2 \times 0 + b = 8,$$

$$\therefore b = 8,$$

$$\therefore \text{直线 } AB \text{ 的解析式为 } y = -2x + 8,$$

$$\text{将点 } B(2, a) \text{ 代入直线 } AB \text{ 的解析式 } y = -2x + 8 \text{ 中, 得 } -2 \times 2 + 8 = a,$$

$$\therefore a = 4,$$

$$\therefore B(2, 4),$$

$$\text{将 } B(2, 4) \text{ 在反比例函数解析式 } y = \frac{k}{x} \text{ (} x > 0 \text{) 中, 得 } k = xy = 2 \times 4 = 8;$$

(2) ①由 (1) 知, $B(2,4)$, $k=8$, $\therefore$ 反比例函数解析式为 $y=\frac{8}{x}$,

当 $m=3$ 时,

$\therefore$ 将线段 AB 向右平移 3 个单位长度, 得到对应线段 CD ,

$\therefore D(2+3,4)$,

即: $D(5,4)$,

$\because DF \perp x$ 轴于点 F , 交反比例函数 $y=\frac{8}{x}$ 的图象于点 E ,

$\therefore E(5,\frac{8}{5})$,

$\therefore DE=4-\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$, $EF=\frac{8}{5}$,

$\therefore \frac{DE}{EF}=\frac{\frac{12}{5}}{\frac{8}{5}}=\frac{3}{2}$;

②如图, $\because$ 将线段 AB 向右平移 m 个单位长度 ($m>0$), 得到对应线段 CD ,

$\therefore CD=AB$, $AC=BD=m$,

$\because A(0,8)$, $B(2,4)$,

$\therefore C(m,8)$, $D((m+2),4)$,

$\because \triangle BCD$ 是以 BC 腰的等腰三角形,

$\therefore$ I、当 $BC=CD$ 时,

$\therefore BC=AB$,

$\therefore$ 点 B 在线段 AC 的垂直平分线上,

$\therefore m=2 \times 2=4$,

II、当 $BC=BD$ 时,

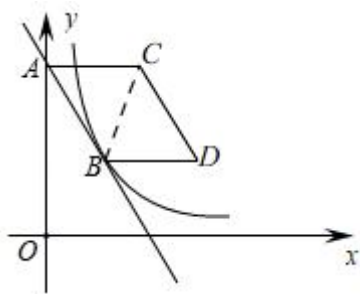
$\because B(2,4)$, $C(m,8)$,

$\therefore BC=\sqrt{(m-2)^2+(8-4)^2}$,

$\therefore \sqrt{(m-2)^2+(8-4)^2}=m$,

$\therefore m=5$,

即: $\triangle BCD$ 是以 BC 为腰的等腰三角形, 满足条件的 m 的值为 4 或 5.



【点睛】此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，平移的性质，等腰三角形的性质，线段的垂直平分线的性质，用方程的思想解决问题是解本题的关键.

26. 小圆同学对图形旋转前后的线段之间、角之间的关系进行了拓展探究.

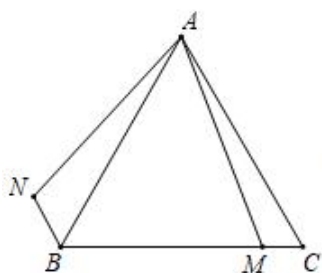


图1

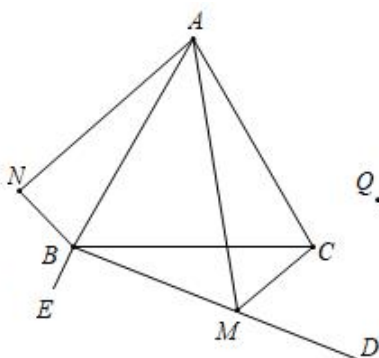


图2

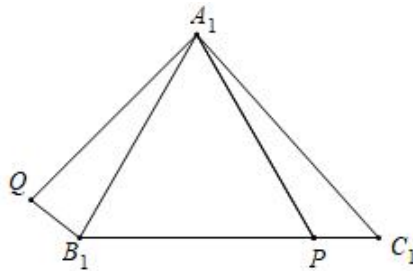


图3

(一) 猜测探究

在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， M 是平面内任意一点，将线段 AM 绕点 A 按顺时针方向旋转与 $\angle BAC$ 相等的角度，得到线段 AN ，连接 NB .

(1) 如图1，若 M 是线段 BC 上的任意一点，请直接写出 $\angle NAB$ 与 $\angle MAC$ 的数量关系是_____， NB 与 MC 的数量关系是_____；

(2) 如图2，点 E 是 AB 延长线上点，若 M 是 $\angle CBE$ 内部射线 BD 上任意一点，连接 MC ，(1)中结论是否仍然成立？若成立，请给予证明，若不成立，请说明理由.

(二) 拓展应用

如图3，在 $\triangle A_1B_1C_1$ 中， $A_1B_1 = 8$ ， $\angle A_1B_1C_1 = 60^\circ$ ， $\angle B_1A_1C_1 = 75^\circ$ ， P 是 B_1C_1 上的任意点，连接 A_1P ，将 A_1P 绕点 A_1 按顺时针方向旋转 75° ，得到线段 A_1Q ，连接 B_1Q . 求线段 B_1Q 长度的最小值.

【答案】(一) (1) 结论： $\angle NAB = \angle MAC$ ， $BN = MC$. 理由见解析；(2) 如图2中，①中结论仍然成立. 理由见解析；(二) QB_1 的最小值为 $4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$.

【解析】

【分析】(一) ①结论： $\angle NAB = \angle MAC$ ， $BN = MC$. 根据 SAS 证明 $\triangle NAB \cong \triangle MAC$ 即可.

②①中结论仍然成立. 证明方法类似.

(二) 如图 3 中, 在 A_1C_1 上截取 $A_1N = A_1Q$, 连接 PN , 作 $NH \perp B_1C_1$ 于 H , 作 $A_1M \perp B_1C_1$ 于 M . 理由全等三角形的性质证明 $B_1Q = PN$, 推出当 PN 的值最小时, QB_1 的值最小, 求出 HN 的值即可解决问题.

【详解】(一) (1) 结论: $\angle NAB = \angle MAC$, $BN = MC$.

理由: 如图 1 中,

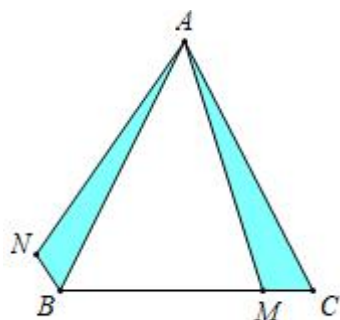


图1

$$\because \angle MAN = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle NAB + \angle BAM = \angle BAM + \angle MAC,$$

$$\therefore \angle NAB = \angle MAC,$$

$$\because AB = AC, AN = AM,$$

$$\therefore \triangle NAB \cong \triangle MAC \quad (SAS),$$

$$\therefore BN = CM.$$

故答案为 $\angle NAB = \angle MAC$, $BN = CM$.

(2) 如图 2 中, ①中结论仍然成立.

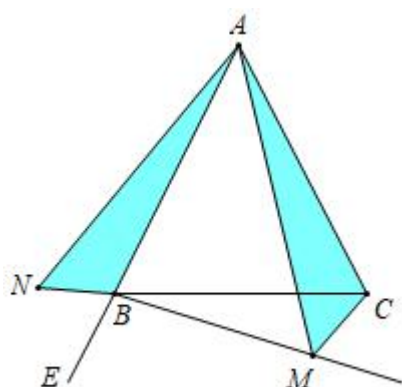


图2

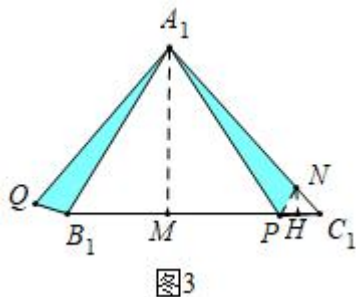
$$\text{理由: } \because \angle MAN = \angle CAB,$$

$$\therefore \angle NAB + \angle BAM = \angle BAM + \angle MAC,$$

$$\therefore \angle NAB = \angle MAC,$$

$\because AB = AC, AN = AM,$
 $\therefore \triangle NAB \cong \triangle MAC \text{ (SAS)},$
 $\therefore BN = CM.$

(二) 如图 3 中, 在 A_1C_1 上截取 $A_1N = A_1B_1$, 连接 PN , 作 $NH \perp B_1C_1$ 于 H , 作 $A_1M \perp B_1C_1$ 于 M .



$\because \angle C_1A_1B_1 = \angle PA_1Q,$
 $\therefore \angle QA_1B_1 = \angle PA_1N,$
 $\because A_1Q = A_1P, A_1B_1 = AN,$
 $\therefore \triangle QA_1B_1 \cong \triangle PA_1N \text{ (SAS)},$
 $\therefore B_1Q = PN,$

$\therefore$ 当 PN 的值最小时, QB_1 的值最小,

在 $Rt\triangle A_1B_1M$ 中, $\because \angle A_1B_1M = 60^\circ, A_1B_1 = 8,$

$$\therefore A_1M = A_1B_1 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3},$$

$$\because \angle MA_1C_1 = \angle B_1A_1C_1 - \angle B_1A_1M = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore A_1C_1 = 4\sqrt{6},$$

$$\therefore NC_1 = A_1C_1 - A_1N = 4\sqrt{6} - 8,$$

在 $Rt\triangle NHC_1$, $\because \angle C_1 = 45^\circ,$

$$\therefore NH = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2},$$

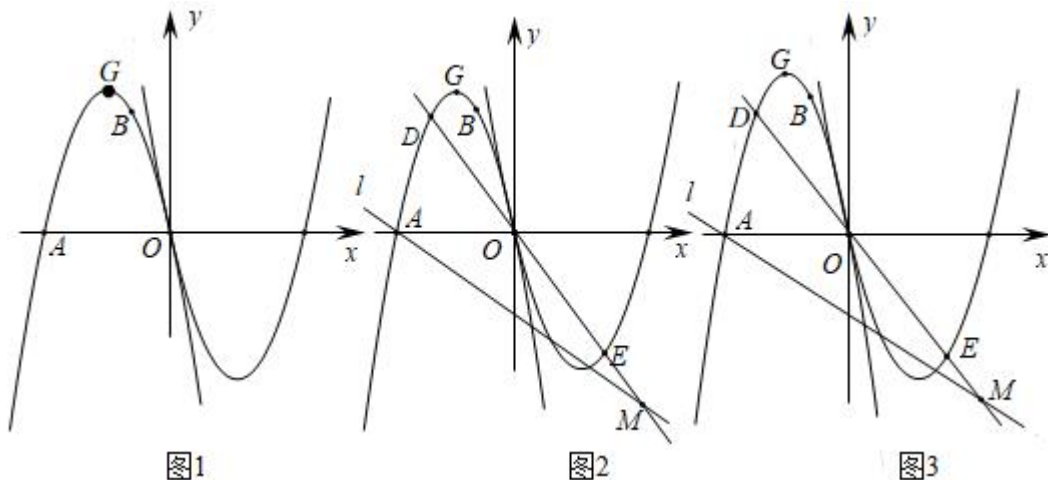
根据垂线段最短可知, 当点 P 与 H 重合时, PN 的值最小,

$$\therefore QB_1 \text{ 的最小值为 } 4\sqrt{3} - 4\sqrt{2}.$$

【点睛】 本题属于几何变换综合题, 考查了全等三角形的判定和性质, 等腰三角形的性质, 解直角三角形,

垂线段最短等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，学会利用垂线段最短解决最值问题，属于中考压轴题.

27. 如图 1，抛物线 $C: y = ax^2 + bx$ 经过点 $A(-4, 0)$ 、 $B(-1, 3)$ 两点， G 是其顶点，将抛物线 C 绕点 O 旋转 180° ，得到新的抛物线 C' .



(1) 求抛物线 C 的函数解析式及顶点 G 的坐标;

(2) 如图 2，直线 $l: y = kx - \frac{12}{5}$ 经过点 A ， D 是抛物线 C 上的一点，设 D 点的横坐标为 m ($m < -2$),

连接 DO 并延长，交抛物线 C' 于点 E ，交直线 l 于点 M ， $DE = 2EM$ ，求 m 的值;

(3) 如图 3，在 (2) 的条件下，连接 AG 、 AB ，在直线 DE 下方的抛物线 C 上是否存在点 P ，使得 $\angle DEP = \angle GAB$ ？若存在，求出点 P 的横坐标；若不存在，请说明理由.

【答案】 (1) $y = -x^2 - 4x$ ，顶点为： $G(-2, 4)$ ；(2) m 的值为 -3 ；(3) 存在，点 P 的横坐标为： $-\frac{7+\sqrt{73}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{73}-7}{4}$.

【解析】

【分析】 (1) 运用待定系数法将 $A(-4, 0)$ 、 $B(-1, 3)$ 代入 $y = ax^2 + bx$ 中，即可求得 a 和 b 的值和抛物线 C 解析式，再利用配方法将抛物线 C 解析式化为顶点式即可求得顶点 G 的坐标;

(2) 根据抛物线 C 绕点 O 旋转 180° ，可求得新抛物线 C' 的解析式，再将 $A(-4, 0)$ 代入 $y = kx - \frac{12}{5}$ 中，即可求得直线 l 解析式，根据对称性可得点 E 坐标，过点 D 作 $DH \parallel y$ 轴交直线 l 于 H ，过 E 作 $EK \parallel y$ 轴交直线 l 于 K ，由 $DE = 2EM$ ，即可得 $\frac{ME}{MD} = \frac{1}{3}$ ，再证明 $\triangle MEK \sim \triangle MDH$ ，即可得 $DH = 3EK$ ，建立方程求解即可;

(3) 连接 BG ，易证 $\triangle ABG$ 是 $Rt\triangle$ ， $\angle ABG = 90^\circ$ ，可得 $\tan \angle DEP = \tan \angle GAB = \frac{1}{3}$ ，在 x 轴下方过点 O 作 $OH \perp OE$ ，在 OH 上截取 $OH = \frac{1}{3}OE = \sqrt{2}$ ，过点 E 作 $ET \perp y$ 轴于 T ，连接 EH 交抛物线 C 于点 P ，点 P 即为所求的点；通过建立方程组求解即可。

【详解】(1) 将 $A(-4, 0)$ 、 $B(-1, 3)$ 代入 $y = ax^2 + bx$ 中，得 $\begin{cases} 16a - 4b = 0 \\ a - b = 3 \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} a = -1 \\ b = -4 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线 C 解析式为： $y = -x^2 - 4x$ ，

配方，得： $y = -x^2 - 4x = -(x+2)^2 + 4$ ， $\therefore$ 顶点为： $G(-2, 4)$ ；

(2) $\therefore$ 抛物线 C 绕点 O 旋转 180° ，得到新的抛物线 C' 。

$\therefore$ 新抛物线 C' 的顶点为： $G'(2, -4)$ ，二次项系数为： $a' = 1$

$\therefore$ 新抛物线 C' 的解析式为： $y = (x-2)^2 - 4 = x^2 - 4x$

将 $A(-4, 0)$ 代入 $y = kx - \frac{12}{5}$ 中，得 $0 = -4k - \frac{12}{5}$ ，解得 $k = -\frac{3}{5}$ ，

$\therefore$ 直线 l 解析式为 $y = -\frac{3}{5}x - \frac{12}{5}$ ，

$\therefore D(m, -m^2 - 4m)$ ，

$\therefore$ 直线 DO 的解析式为 $y = -(m+4)x$ ，

由抛物线 C 与抛物线 C' 关于原点对称，可得点 D 、 E 关于原点对称，

$\therefore E(-m, m^2 + 4m)$

如图 2，过点 D 作 $DH \parallel y$ 轴交直线 l 于 H ，过 E 作 $EK \parallel y$ 轴交直线 l 于 K ，

则 $H(m, -\frac{3}{5}m - \frac{12}{5})$ ， $K(-m, \frac{3}{5}m - \frac{12}{5})$ ，

$\therefore DH = -m^2 - 4m - (-\frac{3}{5}m - \frac{12}{5}) = -m^2 - \frac{17}{5}m + \frac{12}{5}$ ， $EK = m^2 + 4m - (\frac{3}{5}m - \frac{12}{5}) = m^2 + \frac{17}{5}m + \frac{12}{5}$ ，

$\therefore DE = 2EM$

$\therefore \frac{ME}{MD} = \frac{1}{3}$ ，

$\therefore DH \parallel y$ 轴， $EK \parallel y$ 轴

$\therefore DH \parallel EK$

$$\therefore \triangle MEK \sim \triangle MDH$$

$$\therefore \frac{EK}{DH} = \frac{ME}{MD} = \frac{1}{3}, \text{ 即 } DH = 3EK$$

$$\therefore -m^2 - \frac{17}{5}m + \frac{12}{5} = 3(m^2 + \frac{17}{5}m + \frac{12}{5})$$

$$\text{解得: } m_1 = -3, \quad m_2 = -\frac{2}{5},$$

$$\therefore m < -2$$

$$\therefore m \text{ 的值为: } -3;$$

$$(3) \text{ 由 (2) 知: } m = -3,$$

$$\therefore D(-3, 3), \quad E(3, -3), \quad OE = 3\sqrt{2},$$

$$\text{如图 3, 连接 } BG, \text{ 在 } \triangle ABG \text{ 中, } \because AB^2 = (-1+4)^2 + (3-0)^2 = 18, \quad BG^2 = 2, \quad AG^2 = 20$$

$$\therefore AB^2 + BG^2 = AG^2$$

$$\therefore \triangle ABG \text{ 是直角三角形, } \angle ABG = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle GAB = \frac{BG}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \angle DEP = \angle GAB$$

$$\therefore \tan \angle DEP = \tan \angle GAB = \frac{1}{3},$$

$$\text{在 } x \text{ 轴下方过点 } O \text{ 作 } OH \perp OE, \text{ 在 } OH \text{ 上截取 } OH = \frac{1}{3}OE = \sqrt{2},$$

过点 E 作 $ET \perp y$ 轴于 T , 连接 EH 交抛物线 C 于点 P , 点 P 即为所求的点;

$$\therefore E(3, -3),$$

$$\therefore \angle EOT = 45^\circ$$

$$\therefore \angle EOH = 90^\circ$$

$$\therefore \angle HOT = 45^\circ$$

$$\therefore H(-1, -1), \text{ 设直线 } EH \text{ 解析式为 } y = px + q,$$

$$\text{则 } \begin{cases} 3p + q = -3 \\ -p + q = -1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ q = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

∴ 直线 EH 解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$,

解方程组 $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \\ y = -x^2 - 4x \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x_1 = \frac{-7-\sqrt{73}}{4} \\ y_1 = \frac{\sqrt{73}-5}{8} \end{cases}$, $\begin{cases} x_2 = \frac{-7+\sqrt{73}}{4} \\ y_2 = -\frac{\sqrt{73}+5}{8} \end{cases}$,

∴ 点 P 的横坐标为: $-\frac{7+\sqrt{73}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{73}-7}{4}$.

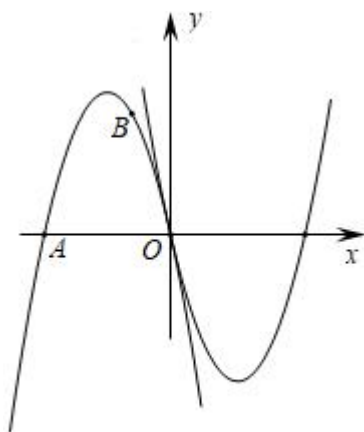


图1

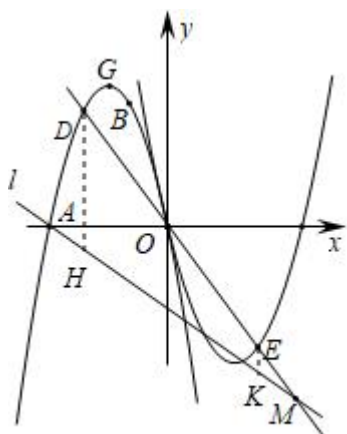


图2

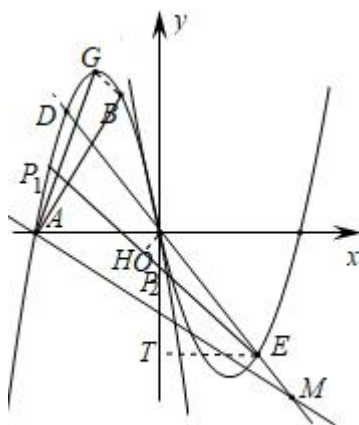


图3

【点睛】 本题考查了二次函数图象和性质，待定系数法求函数解析式，旋转变换，相似三角形判定和性质，直线与抛物线交点，解直角三角形等知识点；属于中考压轴题型，综合性强，难度较大.

