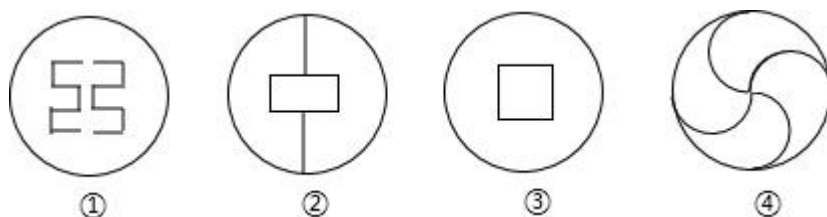


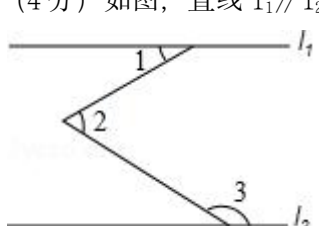
2019 年山东省泰安市中考数学试卷

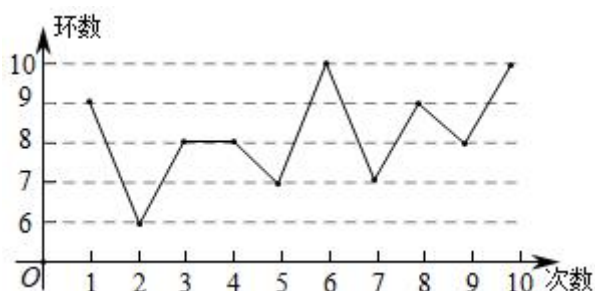
一、选择题（本大题共 12 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确的选项选出来，每小题选对得 4 分，选错、不选或选出的答案超过一个，均记零分）

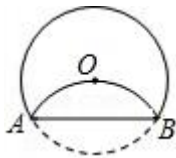
1. (4 分) 在实数 $|-3.14|$, -3 , $-\sqrt{3}$, π 中, 最小的数是 ()
 A. $-\sqrt{3}$ B. -3 C. $|-3.14|$ D. π
2. (4 分) 下列运算正确的是 ()
 A. $a^6 \div a^3 = a^3$ B. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ C. $(2a^2)^3 = 6a^6$ D. $a^2 + a^2 = a^4$
3. (4 分) 2018 年 12 月 8 日, 我国在西昌卫星发射中心成功发射“嫦娥四号”探测器, “嫦娥四号”进入近地点约 200 公里、远地点约 42 万公里的地月转移轨道, 将数据 42 万公里用科学记数法表示为 ()
 A. 4.2×10^9 米 B. 4.2×10^8 米 C. 42×10^7 米 D. 4.2×10^7 米
4. (4 分) 下列图形:



是轴对称图形且有两条对称轴的是 ()

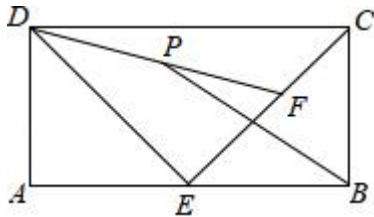
- A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ③④
5. (4 分) 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2$, $\angle 1 = 30^\circ$, 则 $\angle 2 + \angle 3 =$ ()

 A. 150° B. 180° C. 210° D. 240°
6. (4 分) 某射击运动员在训练中射击了 10 次, 成绩如图所示:





- A. $\frac{1}{2}\pi$ B. π C. 2π D. 3π

12. (4分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=4$, $AD=2$, E 为 AB 的中点, F 为 EC 上一动点, P 为 DF 中点, 连接 PB , 则 PB 的最小值是 ()

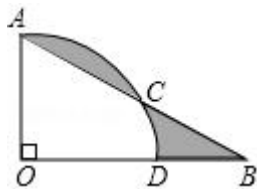


- A. 2 B. 4 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 满分 24 分, 只要求填写最后结果, 每小题填对得 4 分)

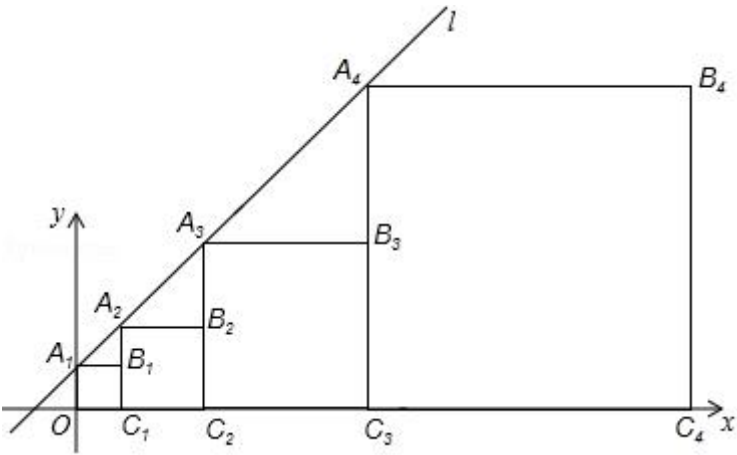
13. (4分) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k-1)x + k^2 + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 k 的取值范围是_____.
14. (4分) 《九章算术》是我国古代数学的经典著作, 书中有一个问题: “今有黄金九枚, 白银一十一枚, 称之重适等, 交易其一, 金轻十三两, 问金、银一枚各重几何?” 意思是: 甲袋中装有黄金 9 枚 (每枚黄金重量相同), 乙袋中装有白银 11 枚 (每枚白银重量相同), 称重两袋相等, 两袋互相交换 1 枚后, 甲袋比乙袋轻了 13 两 (袋子重量忽略不计), 问黄金、白银每枚各重多少两? 设每枚黄金重 x 两, 每枚白银重 y 两, 根据题意可列方程组为_____.

15. (4分) 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 以点 O 为圆心, OA 为半径作弧交 AB 于点 A , 点 C , 交 OB 于点 D , 若 $OA = 3$, 则阴影都部分的面积为_____.



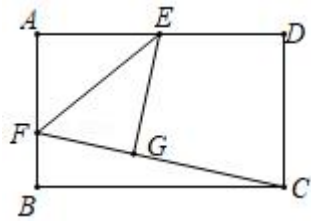
16. (4分) 若二次函数 $y = x^2 + bx - 5$ 的对称轴为直线 $x = 2$, 则关于 x 的方程 $x^2 + bx - 5 = 2x - 13$ 的解为_____.
17. (4分) 在平面直角坐标系中, 直线 $l: y = x + 1$ 与 y 轴交于点 A_1 , 如图所示, 依次作正方形 $OA_1B_1C_1$, 正方形 $C_1A_2B_2C_2$, 正方形 $C_2A_3B_3C_3$, 正方形 $C_3A_4B_4C_4$, $\dots$, 点 $A_1, A_2,$

$A_3, A_4, \dots$ 在直线 l 上, 点 $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$ 在 x 轴正半轴上, 则前 n 个正方形对



角线长的和是_____.

18. (4 分) 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB=3\sqrt{6}$, $BC=12$, E 为 AD 中点, F 为 AB 上一点, 将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折叠后, 点 A 恰好落到 CF 上的点 G 处, 则折痕 EF 的长是_____.



三、解答题 (本大题共 7 小题, 满分 78 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

19. (8 分) 先化简, 再求值: $(a-9+\frac{25}{a+1}) \div (a-1-\frac{4a-1}{a+1})$, 其中 $a=\sqrt{2}$.
20. (8 分) 为弘扬泰山文化, 某校举办了“泰山诗文大赛”活动, 从中随机抽取部分学生的比赛成绩, 根据成绩 (成绩都高于 50 分), 绘制了如下的统计图表 (不完整):

组别	分数	人数
第 1 组	$90 < x \leq 100$	8
第 2 组	$80 < x \leq 90$	a
第 3 组	$70 < x \leq 80$	10
第 4 组	$60 < x \leq 70$	b
第 5 组	$50 < x \leq 60$	3

请根据以上信息, 解答下列问题:

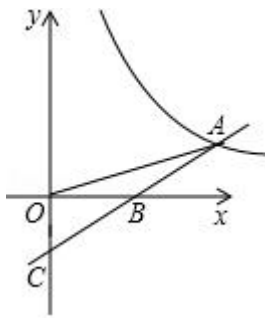
- (1) 求出 a, b 的值;

- (2) 计算扇形统计图中“第5组”所在扇形圆心角的度数；
- (3) 若该校共有1800名学生，那么成绩高于80分的共有多少人？



21. (11分) 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象交于点 A ，与 x 轴交于点 $B(5, 0)$ ，若 $OB=AB$ ，且 $S_{\triangle OAB}=\frac{15}{2}$ 。

- (1) 求反比例函数与一次函数的表达式；
- (2) 若点 P 为 x 轴上一点， $\triangle ABP$ 是等腰三角形，求点 P 的坐标。

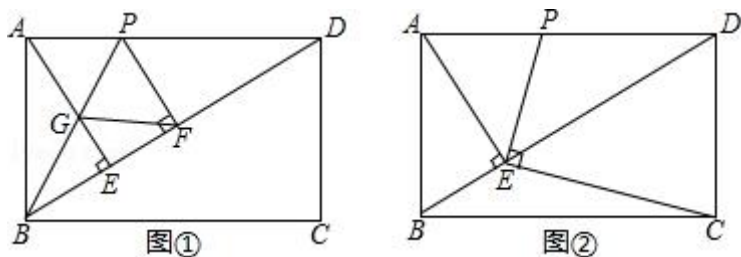


22. (11分) 端午节是我国的传统节日，人们素有吃粽子的习俗。某商场在端午节来临之际用3000元购进A、B两种粽子1100个，购买A种粽子与购买B种粽子的费用相同。已知A种粽子的单价是B种粽子单价的1.2倍。

- (1) 求A、B两种粽子的单价各是多少？
- (2) 若计划用不超过7000元的资金再次购进A、B两种粽子共2600个，已知A、B两种粽子的进价不变。求A种粽子最多能购进多少个？

23. (13分) 在矩形 $ABCD$ 中， $AE \perp BD$ 于点 E ，点 P 是边 AD 上一点。

- (1) 若 BP 平分 $\angle ABD$ ，交 AE 于点 G ， $PF \perp BD$ 于点 F ，如图①，证明四边形 $AGFP$ 是菱形；
- (2) 若 $PE \perp EC$ ，如图②，求证： $AE \cdot AB = DE \cdot AP$ ；
- (3) 在(2)的条件下，若 $AB=1$ ， $BC=2$ ，求 AP 的长。

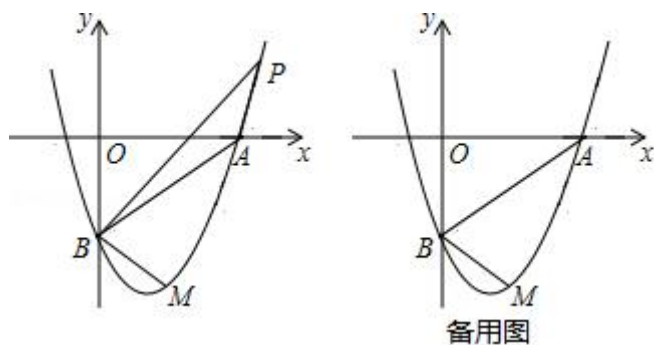


24. (13 分) 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, -2)$ ，且过点 $C(2, -2)$ 。

(1) 求二次函数表达式；

(2) 若点 P 为抛物线上第一象限内的点，且 $S_{\triangle PBA} = 4$ ，求点 P 的坐标；

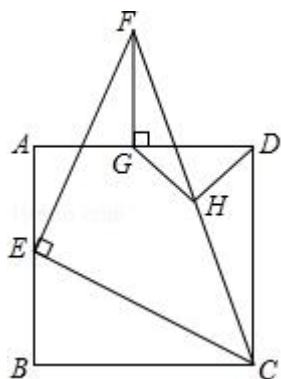
(3) 在抛物线上 (AB 下方) 是否存在点 M ，使 $\angle ABO = \angle ABM$ ？若存在，求出点 M 到 y 轴的距离；若不存在，请说明理由。



25. (14 分) 如图，四边形 $ABCD$ 是正方形， $\triangle EFC$ 是等腰直角三角形，点 E 在 AB 上，且 $\angle CEF = 90^\circ$ ， $FG \perp AD$ ，垂足为点 G 。

(1) 试判断 AG 与 FG 是否相等？并给出证明；

(2) 若点 H 为 CF 的中点， GH 与 DH 垂直吗？若垂直，给出证明；若不垂直，说明理由。



2019 年山东省泰安市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确的选项选出来，每小题选对得 4 分，选错、不选或选出的答案超过一个，均记零分）

1. (4 分) 在实数 $| - 3.14 |$, $- 3$, $-\sqrt{3}$, π 中, 最小的数是 ()

- A. $-\sqrt{3}$ B. $- 3$ C. $| - 3.14 |$ D. π

【分析】根据绝对值的大小进行比较即可，两负数比较大小，绝对值大的反尔小.

【解答】解:

$$\because | - \sqrt{3} | = \sqrt{3} < | - 3 | = 3$$

$$\therefore - \sqrt{3} < (- 3)$$

C、D 项为正数，A、B 项为负数，

正数大于负数，

故选: B.

【点评】此题主要考查利用绝对值来比较实数的大小，此题要掌握性质“两负数比较大小时，绝对值大的反尔小，正数大于负数，负数的绝对值为正数”.

2. (4 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^6 \div a^3 = a^3$ B. $a^4 \cdot a^2 = a^8$ C. $(2a^2)^3 = 6a^6$ D. $a^2 + a^2 = a^4$

【分析】直接利用合并同类项法则以及积的乘方运算法则、同底数幂的乘除运算法则分别计算得出答案.

【解答】解: A、 $a^6 \div a^3 = a^3$ ，故此选项正确；

B、 $a^4 \cdot a^2 = a^6$ ，故此选项错误；

C、 $(2a^2)^3 = 8a^6$ ，故此选项错误；

D、 $a^2 + a^2 = 2a^2$ ，故此选项错误；

故选: A.

【点评】此题主要考查了合并同类项以及积的乘方运算、同底数幂的乘除运算，正确掌握相关运算法则是解题关键.

3. (4 分) 2018 年 12 月 8 日，我国在西昌卫星发射中心成功发射“嫦娥四号”探测器，“嫦娥四号”进入近地点约 200 公里、远地点约 42 万公里的地月转移轨道，将数据 42 万公里用科学记数法表示为 ()

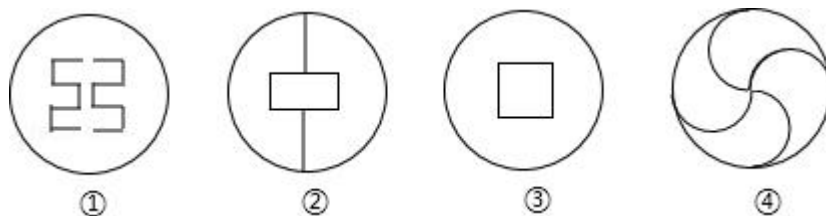
- A. 4.2×10^9 米 B. 4.2×10^8 米 C. 42×10^7 米 D. 4.2×10^7 米

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

【解答】解：42 万公里 = 420000000m 用科学记数法表示为： 4.2×10^8 米，
故选：B．

【点评】此题考查了科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

4. (4 分) 下列图形：



是轴对称图形且有两条对称轴的是 ()

- A. ①② B. ②③ C. ②④ D. ③④

【分析】根据轴对称图形的概念分别确定出对称轴的条数，从而得解．

【解答】解：①是轴对称图形且有两条对称轴，故本选项正确；

②是轴对称图形且有两条对称轴，故本选项正确；

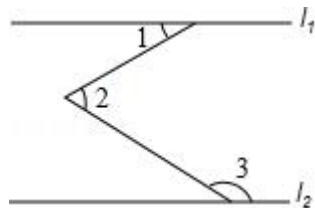
③是轴对称图形且有 4 条对称轴，故本选项错误；

④不是轴对称图形，故本选项错误．

故选：A．

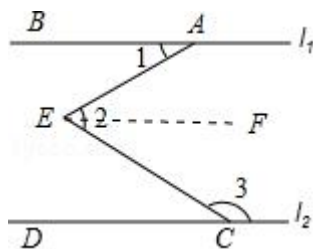
【点评】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合．

5. (4 分) 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ， $\angle 1 = 30^\circ$ ，则 $\angle 2 + \angle 3 =$ ()



- A. 150° B. 180° C. 210° D. 240°

【分析】过点 E 作 $EF \parallel l_1$ ，利用平行线的性质解答即可．



【解答】解：过点 E 作 $EF \parallel l_1$,

$$\because l_1 \parallel l_2, EF \parallel l_1,$$

$$\therefore EF \parallel l_1 \parallel l_2,$$

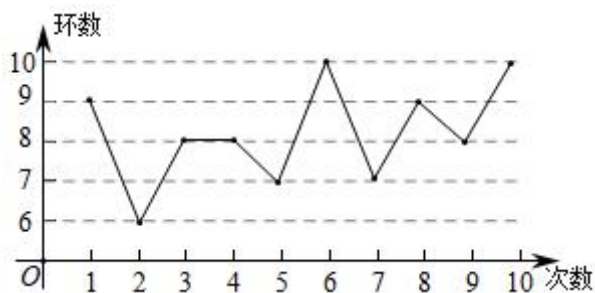
$$\therefore \angle 1 = \angle AEF = 30^\circ, \angle FEC + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = \angle AEF + \angle FEC + \angle 3 = 30^\circ + 180^\circ = 210^\circ,$$

故选：C.

【点评】此题考查平行线的性质，关键是根据平行线的性质解答.

6. (4分) 某射击运动员在训练中射击了10次，成绩如图所示：



下列结论不正确的是 ()

A. 众数是 8

B. 中位数是 8

C. 平均数是 8.2

D. 方差是 1.2

【分析】根据众数、中位数、平均数以及方差的算法进行计算，即可得到不正确的选项.

【解答】解：由图可得，数据 8 出现 3 次，次数最多，所以众数为 8，故 A 选项正确；

10 次成绩排序后为：6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10，所以中位数是 $\frac{1}{2}(8+8) = 8$,

故 B 选项正确；

平均数为 $\frac{1}{10}(6+7 \times 2+8 \times 3+9 \times 2+10 \times 2) = 8.2$ ，故 C 选项正确；

方差为 $\frac{1}{10}[(6-8.2)^2 + (7-8.2)^2 + (7-8.2)^2 + (8-8.2)^2 + (8-8.2)^2 + (8-8.2)^2 + (9-8.2)^2 + (9-8.2)^2 + (10-8.2)^2 + (10-8.2)^2] = 1.56$ ，故 D 选项错误；

故选：D.

【点评】本题主要考查了众数、中位数、平均数以及方差，用“先平均，再求差，然后

平方，最后再平均”得到的结果表示一组数据偏离平均值的情况，这个结果叫方差.

7. (4分) 不等式组 $\begin{cases} 5x+4 \geq 2(x-1), \\ \frac{2x+5}{3} - \frac{3x-2}{2} > 1 \end{cases}$ 的解集是 ()

A. $x \leq 2$

B. $x \geq -2$

C. $-2 < x \leq 2$

D. $-2 \leq x < 2$

【分析】先求出两个不等式的解集，再求其公共解.

【解答】解: $\begin{cases} 5x+4 \geq 2(x-1) \textcircled{1} \\ \frac{2x+5}{3} - \frac{3x-2}{2} > 1 \textcircled{2} \end{cases}$

由①得, $x \geq -2$,

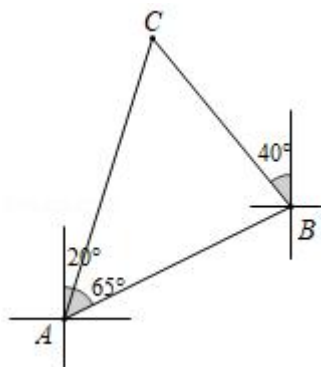
由②得, $x < 2$,

所以不等式组的解集是 $-2 \leq x < 2$.

故选: D.

【点评】本题主要考查了一元一次不等式组解集的求法，其简便求法就是用口诀求解. 求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）.

8. (4分) 如图，一艘船由 A 港沿北偏东 65° 方向航行 $30\sqrt{2} \text{ km}$ 至 B 港，然后再沿北偏西 40° 方向航行至 C 港，C 港在 A 港北偏东 20° 方向，则 A, C 两港之间的距离为 () km.



A. $30+30\sqrt{3}$

B. $30+10\sqrt{3}$

C. $10+30\sqrt{3}$

D. $30\sqrt{3}$

【分析】根据题意得, $\angle CAB = 65^\circ - 20^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$, $AB = 30\sqrt{2}$, 过 B 作 $BE \perp AC$ 于 E, 解直角三角形即可得到结论.

【解答】解: 根据题意得, $\angle CAB = 65^\circ - 20^\circ$, $\angle ACB = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$, $AB = 30\sqrt{2}$, 过 B 作 $BE \perp AC$ 于 E,

$\therefore \angle AEB = \angle CEB = 90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $\because \angle ABE = 45^\circ$, $AB = 30\sqrt{2}$,

$$\therefore AE = BE = \frac{\sqrt{2}}{2} AB = 30 \text{ km},$$

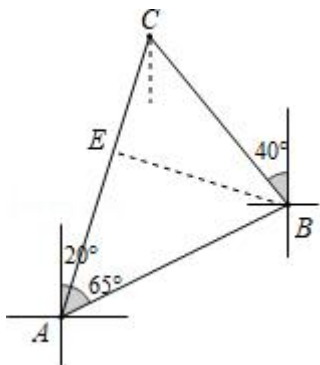
在 $\text{Rt}\triangle CBE$ 中, $\because \angle ACB = 60^\circ$,

$$\therefore CE = \frac{\sqrt{3}}{3} BE = 10\sqrt{3} \text{ km},$$

$$\therefore AC = AE + CE = 30 + 10\sqrt{3},$$

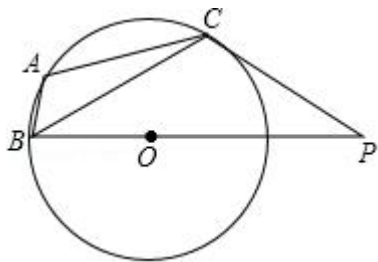
$\therefore A, C$ 两港之间的距离为 $(30 + 10\sqrt{3}) \text{ km}$,

故选: B .



【点评】 本题考查了解直角三角形的应用, 方向角问题, 三角形的内角和, 是基础知识比较简单.

9. (4 分) 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, $\angle A = 119^\circ$, 过点 C 的圆的切线交 BO 于点 P , 则 $\angle P$ 的度数为 ()



- A. 32° B. 31° C. 29° D. 61°

【分析】 连接 OC 、 CD , 由切线的性质得出 $\angle OCP = 90^\circ$, 由圆内接四边形的性质得出 $\angle ODC = 180^\circ - \angle A = 61^\circ$, 由等腰三角形的性质得出 $\angle OCD = \angle ODC = 61^\circ$, 求出 $\angle DOC = 58^\circ$, 由直角三角形的性质即可得出结果.

【解答】 解: 如图所示: 连接 OC 、 CD ,

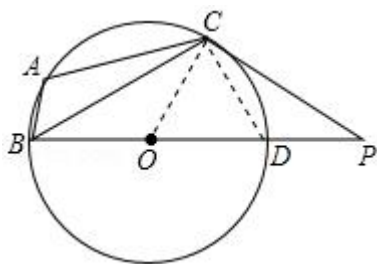
$\because PC$ 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore PC \perp OC$,

$\therefore \angle OCP = 90^\circ$,

$$\begin{aligned}
&\because \angle A = 119^\circ, \\
&\therefore \angle ODC = 180^\circ - \angle A = 61^\circ, \\
&\because OC = OD, \\
&\therefore \angle OCD = \angle ODC = 61^\circ, \\
&\therefore \angle DOC = 180^\circ - 2 \times 61^\circ = 58^\circ, \\
&\therefore \angle P = 90^\circ - \angle DOC = 32^\circ;
\end{aligned}$$

故选: A.



【点评】 本题考查了切线的性质、等腰三角形的性质、直角三角形的性质、三角形内角和定理; 熟练掌握切线的性质是解题的关键.

10. (4 分) 一个盒子中装有标号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个小球, 这些球除标号外都相同, 从中随机摸出两个小球, 则摸出的小球标号之和大于 5 的概率为 ()

A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

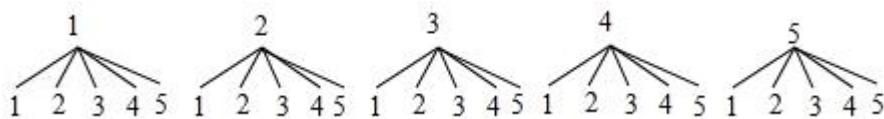
【分析】 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果与两次摸出的小球的标号之和大于 5 的情况, 再利用概率公式即可求得答案.

【解答】 解: 画树状图如图所示:

$\therefore$ 共有 25 种等可能的结果, 两次摸出的小球的标号之和大于 5 的有 15 种结果,

$\therefore$ 两次摸出的小球的标号之和大于 5 的概率为 $\frac{15}{25} = \frac{3}{5}$;

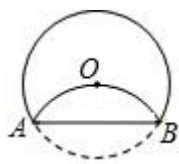
故选: C.



【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 注意列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

11. (4 分) 如图, 将 $\odot O$ 沿弦 AB 折叠, $\widehat{AB}$ 恰好经过圆心 O , 若 $\odot O$ 的半径为 3, 则 $\widehat{AB}$ 的

长为 ()



- A. $\frac{1}{2}\pi$ B. π C. 2π D. 3π

【分析】 连接 OA 、 OB ，作 $OC \perp AB$ 于 C ，根据翻转变换的性质得到 $OC = \frac{1}{2}OA$ ，根据等腰三角形的性质、三角形内角和定理求出 $\angle AOB$ ，根据弧长公式计算即可.

【解答】 解：连接 OA 、 OB ，作 $OC \perp AB$ 于 C ，

由题意得， $OC = \frac{1}{2}OA$ ，

$\therefore \angle OAC = 30^\circ$ ，

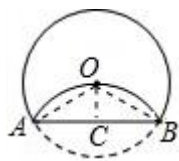
$\because OA = OB$ ，

$\therefore \angle OBA = \angle OAC = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle AOB = 120^\circ$ ，

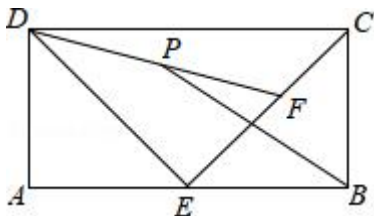
$\therefore \widehat{AB}$ 的长 $= \frac{120\pi \times 3}{180} = 2\pi$ ，

故选：C.



【点评】 本题考查的是弧长的计算、直角三角形的性质、翻转变换的性质，掌握弧长公式是解题的关键.

12. (4分) 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=2$ ， E 为 AB 的中点， F 为 EC 上一动点， P 为 DF 中点，连接 PB ，则 PB 的最小值是 ()

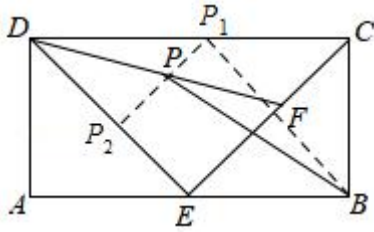


- A. 2 B. 4 C. $\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{2}$

【分析】 根据中位线定理可得出点 P 的运动轨迹是线段 P_1P_2 ，再根据垂线段最短可得当 $BP \perp P_1P_2$ 时， PB 取得最小值；由矩形的性质以及已知的数据即可知 $BP_1 \perp P_1P_2$ ，故 BP

的最小值为 BP_1 的长，由勾股定理求解即可.

【解答】解：如图：



当点 F 与点 C 重合时，点 P 在 P_1 处， $CP_1 = DP_1$ ，

当点 F 与点 E 重合时，点 P 在 P_2 处， $EP_2 = DP_2$ ，

$$\therefore P_1P_2 \parallel CE \text{ 且 } P_1P_2 = \frac{1}{2}CE$$

当点 F 在 EC 上除点 C 、 E 的位置处时，有 $DP = FP$

由中位线定理可知： $P_1P \parallel CE$ 且 $P_1P = \frac{1}{2}CF$

$\therefore$ 点 P 的运动轨迹是线段 P_1P_2 ，

$\therefore$ 当 $BP \perp P_1P_2$ 时， BP 取得最小值

$\therefore$ 矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $AD=2$ ， E 为 AB 的中点，

$\therefore \triangle CBE$ 、 $\triangle ADE$ 、 $\triangle BCP_1$ 为等腰直角三角形， $CP_1=2$

$\therefore \angle ADE = \angle CDE = \angle CP_1B = 45^\circ$ ， $\angle DEC = 90^\circ$

$\therefore \angle DP_2P_1 = 90^\circ$

$\therefore \angle DP_1P_2 = 45^\circ$

$\therefore \angle P_2P_1B = 90^\circ$ ， 即 $BP_1 \perp P_1P_2$ ，

$\therefore BP$ 的最小值为 BP_1 的长

在等腰直角 BCP_1 中， $CP_1 = BC = 2$

$$\therefore BP_1 = 2\sqrt{2}$$

$\therefore BP$ 的最小值是 $2\sqrt{2}$

故选： D 。

【点评】 本题考查轨迹问题、矩形的性质等知识，解题的关键是学会利用特殊位置解决问题，有难度。

二、填空题（本大题共 6 小题，满分 24 分，只要求填写最后结果，每小题填对得 4 分）

13. （4 分） 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - (2k-1)x + k^2 + 3 = 0$ 有两个不相等的实数根，

则实数 k 的取值范围是 $k < -\frac{11}{4}$.

【分析】 根据方程有两个不相等的实数根可得 $\Delta = (2k-1)^2 - 4(k^2+3) > 0$, 求出 k 的取值范围;

【解答】 解: $\because$ 原方程有两个不相等的实数根,

$$\therefore \Delta = (2k-1)^2 - 4(k^2+3) = -4k+1-12 > 0,$$

$$\text{解得 } k < -\frac{11}{4};$$

$$\text{故答案为: } k < -\frac{11}{4}.$$

【点评】 本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$) 的根与 $\Delta = b^2 - 4ac$ 有如下关系:

①当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的两个实数根; ②当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的两个实数根; ③当 $\Delta < 0$ 时, 方程无实数根.

14. (4分) 《九章算术》是我国古代数学的经典著作, 书中有一个问题: “今有黄金九枚, 白银一十一枚, 称之重适等, 交易其一, 金轻十三两, 问金、银一枚各重几何?” 意思是: 甲袋中装有黄金 9 枚 (每枚黄金重量相同), 乙袋中装有白银 11 枚 (每枚白银重量相同), 称重两袋相等, 两袋互相交换 1 枚后, 甲袋比乙袋轻了 13 两 (袋子重量忽略不计), 问黄金、白银每枚各重多少两? 设每枚黄金重 x 两, 每枚白银重 y 两, 根据题意可列方程组为
$$\begin{cases} 9x=11y \\ (10y+x)-(8x+y)=13 \end{cases}.$$

【分析】 根据题意可得等量关系: ① 9 枚黄金的重量 = 11 枚白银的重量; ② (10 枚白银的重量 + 1 枚黄金的重量) - (1 枚白银的重量 + 8 枚黄金的重量) = 13 两, 根据等量关系列出方程组即可.

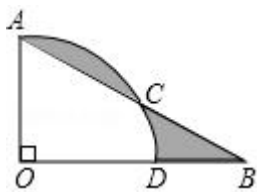
【解答】 解: 设每枚黄金重 x 两, 每枚白银重 y 两, 由题意得:

$$\begin{cases} 9x=11y \\ (10y+x)-(8x+y)=13 \end{cases}$$

$$\text{故答案为: } \begin{cases} 9x=11y \\ (10y+x)-(8x+y)=13 \end{cases}$$

【点评】 此题主要考查了由实际问题抽象出二元一次方程组, 关键是正确理解题意, 找出题目中的等量关系.

15. (4分) 如图, $\angle AOB = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, 以点 O 为圆心, OA 为半径作弧交 AB 于点 A 、点 C , 交 OB 于点 D , 若 $OA = 3$, 则阴影部分的面积为 $-\frac{3}{4}\pi$.



【分析】连接 OC ，作 $CH \perp OB$ 于 H ，根据直角三角形的性质求出 AB ，根据勾股定理求出 BD ，证明 $\triangle AOC$ 为等边三角形，得到 $\angle AOC = 60^\circ$ ， $\angle COB = 30^\circ$ ，根据扇形面积公式、三角形面积公式计算即可。

【解答】解：连接 OC ，作 $CH \perp OB$ 于 H ，

$$\because \angle AOB = 90^\circ, \angle B = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle OAB = 60^\circ, AB = 2OA = 6,$$

$$\text{由勾股定理得, } OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = 3\sqrt{3},$$

$$\because OA = OC, \angle OAB = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOC \text{ 为等边三角形,}$$

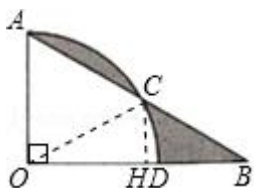
$$\therefore \angle AOC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle COB = 30^\circ,$$

$$\therefore CO = CB, CH = \frac{1}{2}OC = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = \frac{60\pi \times 3^2}{360} - \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times \frac{3}{2} - \frac{30\pi \times 3^2}{360} = \frac{3}{4}\pi,$$

故答案为： $\frac{3}{4}\pi$.



【点评】本题考查的是扇形面积计算、等边三角形的判定和性质，掌握扇形面积公式、三角形的面积公式是解题的关键。

16. (4 分) 若二次函数 $y = x^2 + bx - 5$ 的对称轴为直线 $x = 2$ ，则关于 x 的方程 $x^2 + bx - 5 = 2x - 13$ 的解为 $x_1 = 2, x_2 = 4$.

【分析】根据对称轴方程求得 b ，再解一元二次方程得解。

【解答】解： $\because$ 二次函数 $y = x^2 + bx - 5$ 的对称轴为直线 $x = 2$,

$$\therefore -\frac{b}{2} = 2,$$

得 $b = -4$,

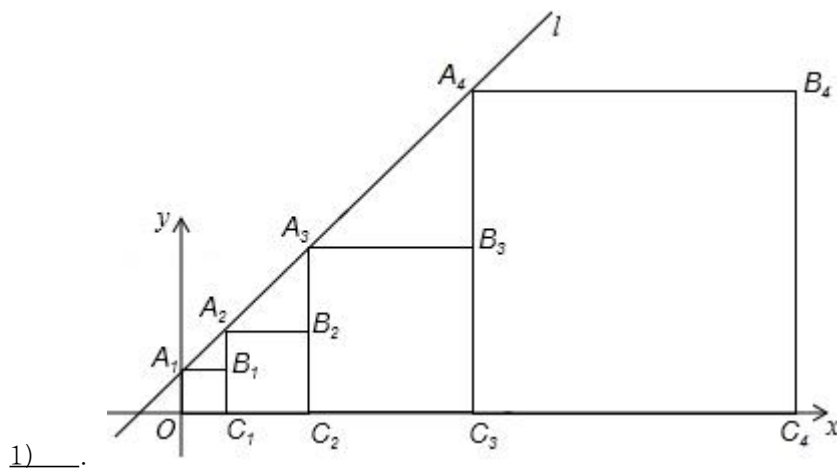
则 $x^2 + bx - 5 = 2x - 13$ 可化为: $x^2 - 4x - 5 = 2x - 13$,

解得, $x_1 = 2, x_2 = 4$.

故意答案为: $x_1 = 2, x_2 = 4$.

【点评】 本题主要考查的是抛物线与 x 轴的交点, 利用抛物线的对称性求得 b 的值是解题的关键.

17. (4 分) 在平面直角坐标系中, 直线 $l: y = x + 1$ 与 y 轴交于点 A_1 , 如图所示, 依次作正方形 $OA_1B_1C_1$, 正方形 $C_1A_2B_2C_2$, 正方形 $C_2A_3B_3C_3$, 正方形 $C_3A_4B_4C_4$, $\dots$, 点 $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$ 在直线 l 上, 点 $C_1, C_2, C_3, C_4, \dots$ 在 x 轴正半轴上, 则前 n 个正方形对角线长的和是 $\sqrt{2}$ (2^n -



【分析】 根据题意和函数图象可以求得点 A_1, A_2, A_3, A_4 的坐标, 从而可以得到前 n 个正方形对角线长的和, 本题得以解决.

【解答】 解: 由题意可得,

点 A_1 的坐标为 $(0, 1)$, 点 A_2 的坐标为 $(1, 2)$, 点 A_3 的坐标为 $(3, 4)$, 点 A_4 的坐标为 $(7, 8)$, $\dots$,

$\therefore OA_1 = 1, C_1A_2 = 2, C_2A_3 = 4, C_3A_4 = 8, \dots$,

$\therefore$ 前 n 个正方形对角线长的和是: $\sqrt{2} (OA_1 + C_1A_2 + C_2A_3 + C_3A_4 + \dots + C_{n-1}A_n) = \sqrt{2} (1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1})$,

设 $S = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1}$, 则 $2S = 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$,

则 $2S - S = 2^n - 1$,

$\therefore S = 2^n - 1$,

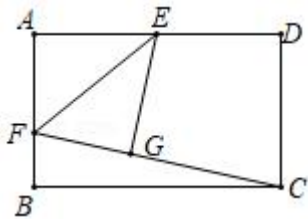
$$\therefore 1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}=2^n-1,$$

$$\therefore \text{前 } n \text{ 个正方形对角线长的和是: } \sqrt{2} \times (2^n-1),$$

$$\text{故答案为: } \sqrt{2} (2^n-1),$$

【点评】 本题考查一次函数图象上点的坐标特征、规律型：点的坐标，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答.

18. (4分) 如图，矩形 $ABCD$ 中， $AB=3\sqrt{6}$ ， $BC=12$ ， E 为 AD 中点， F 为 AB 上一点，将 $\triangle AEF$ 沿 EF 折叠后，点 A 恰好落到 CF 上的点 G 处，则折痕 EF 的长是 $2\sqrt{15}$.



【分析】 连接 EC ，利用矩形的性质，求出 EG ， DE 的长度，证明 EC 平分 $\angle DCF$ ，再证 $\angle FEC=90^\circ$ ，最后证 $\triangle FEC \sim \triangle EDC$ ，利用相似的性质即可求出 EF 的长度.

【解答】 解：如图，连接 EC ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形，

$$\therefore \angle A = \angle D = 90^\circ, \quad BC = AD = 12, \quad DC = AB = 3\sqrt{6},$$

$\because E$ 为 AD 中点，

$$\therefore AE = DE = \frac{1}{2}AD = 6$$

由翻折知， $\triangle AEF \cong \triangle GEF$ ，

$$\therefore AE = GE = 6, \quad \angle AEF = \angle GEF, \quad \angle EGF = \angle EAF = 90^\circ = \angle D,$$

$$\therefore GE = DE,$$

$\therefore EC$ 平分 $\angle DCG$ ，

$$\therefore \angle DCE = \angle GCE,$$

$$\because \angle GEC = 90^\circ - \angle GCE, \quad \angle DEC = 90^\circ - \angle DCE,$$

$$\therefore \angle GEC = \angle DEC,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle FEG + \angle GEC = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ,$$

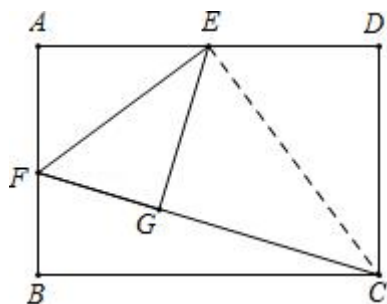
$$\therefore \angle FEC = \angle D = 90^\circ,$$

又 $\because \angle DCE = \angle GCE$ ，

$$\therefore \triangle FEC \sim \triangle EDC,$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{FE}{DE} &= \frac{EC}{DC}, \\ \therefore EC &= \sqrt{DE^2 + DC^2} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{6})^2} = 3\sqrt{10}, \\ \therefore \frac{FE}{6} &= \frac{3\sqrt{10}}{3\sqrt{6}}, \\ \therefore FE &= 2\sqrt{15}.\end{aligned}$$

故答案为: $2\sqrt{15}$.



【点评】 本题考查了矩形的性质，轴对称的性质，相似三角形的判定与性质等，解题关键是能够作出适当的辅助线，连接 CE ，构造相似三角形，最终利用相似的性质求出结果.

三、解答题 (本大题共 7 小题，满分 78 分，解答应写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

19. (8 分) 先化简，再求值: $(a - 9 + \frac{25}{a+1}) \div (a - 1 - \frac{4a-1}{a+1})$, 其中 $a = \sqrt{2}$.

【分析】 先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式，再将 a 的值代入计算可得.

$$\begin{aligned}\text{【解答】解: 原式} &= (\frac{a^2 - 8a - 9}{a+1} + \frac{25}{a+1}) \div (\frac{a^2 - 1}{a+1} - \frac{4a-1}{a+1}) \\ &= \frac{a^2 - 8a + 16}{a+1} \div \frac{a^2 - 4a}{a+1} \\ &= \frac{(a-4)^2}{a+1} \cdot \frac{a+1}{a(a-4)} \\ &= \frac{a-4}{a},\end{aligned}$$

当 $a = \sqrt{2}$ 时,

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} = 1 - 2\sqrt{2}.$$

【点评】 本题主要考查分式的化简求值，解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则及二次根式的运算能力.

20. (8 分) 为弘扬泰山文化，某校举办了“泰山诗文大赛”活动，从中随机抽取部分学生的比赛成绩，根据成绩 (成绩都高于 50 分)，绘制了如下的统计图表 (不完整):

组别	分数	人数
第 1 组	$90 < x \leq 100$	8
第 2 组	$80 < x \leq 90$	a
第 3 组	$70 < x \leq 80$	10
第 4 组	$60 < x \leq 70$	b
第 5 组	$50 < x \leq 60$	3

请根据以上信息，解答下列问题：

- (1) 求出 a, b 的值；
- (2) 计算扇形统计图中“第 5 组”所在扇形圆心角的度数；
- (3) 若该校共有 1800 名学生，那么成绩高于 80 分的共有多少人？



【分析】 (1) 抽取学生人数 $10 \div 25\% = 40$ (人)，第 2 组人数 $40 \times 50\% - 8 = 12$ (人)，第 4 组人数 $40 \times 50\% - 10 - 3 = 7$ (人)，所以 $a = 12, b = 7$ ；

(2) $360^\circ \times \frac{3}{40} = 27^\circ$ ，所以“第 5 组”所在扇形圆心角的度数为 27° ；

(3) 成绩高于 80 分： $1800 \times 50\% = 900$ (人)，所以成绩高于 80 分的共有 900 人.

【解答】 解： (1) 抽取学生人数 $10 \div 25\% = 40$ (人)，

第 2 组人数 $40 \times 50\% - 8 = 12$ (人)，

第 4 组人数 $40 \times 50\% - 10 - 3 = 7$ (人)，

$\therefore a = 12, b = 7$ ；

(2) $360^\circ \times \frac{3}{40} = 27^\circ$ ，

$\therefore$ “第 5 组”所在扇形圆心角的度数为 27° ；

(3) 成绩高于 80 分： $1800 \times 50\% = 900$ (人)，

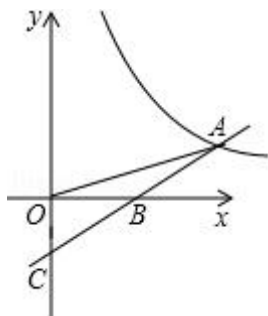
$\therefore$ 成绩高于 80 分的共有 900 人.

【点评】 本题考查了统计图，熟练掌握条形统计图与扇形统计图是解题的关键.

21. (11 分) 已知一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象交于点 A , 与 x 轴交于点 $B(5, 0)$, 若 $OB=AB$, 且 $S_{\triangle OAB}=\frac{15}{2}$.

(1) 求反比例函数与一次函数的表达式;

(2) 若点 P 为 x 轴上一点, $\triangle ABP$ 是等腰三角形, 求点 P 的坐标.



【分析】 (1) 先求出 OB , 进而求出 AD , 得出点 A 坐标, 最后用待定系数法即可得出结论;

(2) 分三种情况, ①当 $AB=PB$ 时, 得出 $PB=5$, 即可得出结论;

②当 $AB=AP$ 时, 利用点 P 与点 B 关于 AD 对称, 得出 $DP=BD=4$, 即可得出结论;

③当 $PB=AP$ 时, 先表示出 $AP^2=(9-a)^2+9$, $BP^2=(5-a)^2$, 进而建立方程求解即可得出结论.

【解答】 解: (1) 如图 1, 过点 A 作 $AD \perp x$ 轴于 D ,

$$\because B(5, 0),$$

$$\therefore OB=5,$$

$$\because S_{\triangle OAB}=\frac{15}{2},$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 5 \times AD = \frac{15}{2},$$

$$\therefore AD=3,$$

$$\because OB=AB,$$

$$\therefore AB=5,$$

$$\text{在 Rt}\triangle ADB \text{ 中, } BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=4,$$

$$\therefore OD=OB+BD=9,$$

$$\therefore A(9, 3),$$

将点 A 坐标代入反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 中得, $m=9 \times 3=27$,

∴反比例函数的解析式为 $y = \frac{27}{x}$,

将点 $A(9, 3)$, $B(5, 0)$ 代入直线 $y = kx + b$ 中, $\begin{cases} 9k + b = 3 \\ 5k + b = 0 \end{cases}$,

$$\therefore \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases},$$

∴直线 AB 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$;

(2) 由 (1) 知, $AB = 5$,

∴ $\triangle ABP$ 是等腰三角形,

∴ ①当 $AB = PB$ 时,

∴ $PB = 5$,

∴ $P(0, 0)$ 或 $(10, 0)$,

②当 $AB = AP$ 时, 如图 2,

由 (1) 知, $BD = 4$,

易知, 点 P 与点 B 关于 AD 对称,

∴ $DP = BD = 4$,

∴ $OP = 5 + 4 + 4 = 13$, ∴ $P(13, 0)$,

③当 $PB = AP$ 时, 设 $P(a, 0)$,

∴ $A(9, 3)$, $B(5, 0)$,

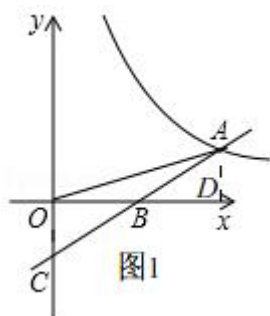
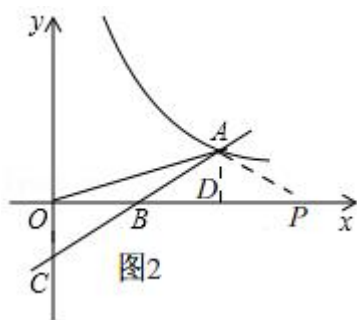
∴ $AP^2 = (9 - a)^2 + 9$, $BP^2 = (5 - a)^2$,

∴ $(9 - a)^2 + 9 = (5 - a)^2$

∴ $a = \frac{65}{8}$,

∴ $P(\frac{65}{8}, 0)$,

即: 满足条件的点 P 的坐标为 $(0, 0)$ 或 $(10, 0)$ 或 $(13, 0)$ 或 $(\frac{65}{8}, 0)$.



【点评】此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，勾股定理，三角形的面积，等腰三角形的性质，用分类讨论的思想解决问题是解本题的关键。

22. (11 分) 端午节是我国的传统节日，人们素有吃粽子的习俗。某商场在端午节来临之际用 3000 元购进 A、B 两种粽子 1100 个，购买 A 种粽子与购买 B 种粽子的费用相同。已知 A 种粽子的单价是 B 种粽子单价的 1.2 倍。

(1) 求 A、B 两种粽子的单价各是多少？

(2) 若计划用不超过 7000 元的资金再次购进 A、B 两种粽子共 2600 个，已知 A、B 两种粽子的进价不变。求 A 种粽子最多能购进多少个？

【分析】(1) 设 B 种粽子单价为 x 元/个，则 A 种粽子单价为 $1.2x$ 元/个，根据数量 = 总价 ÷ 单价结合用 3000 元购进 A、B 两种粽子 1100 个，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论；

(2) 设购进 A 种粽子 m 个，则购进 B 种粽子 $(2600 - m)$ 个，根据总价 = 单价 × 数量结合总价不超过 7000 元，即可得出关于 m 的一元一次不等式，解之取其中的最大值即可得出结论。

【解答】解：(1) 设 B 种粽子单价为 x 元/个，则 A 种粽子单价为 $1.2x$ 元/个，

$$\text{根据题意，得：} \frac{1500}{x} + \frac{1500}{1.2x} = 1100,$$

解得： $x = 2.5$,

经检验， $x = 2.5$ 是原方程的解，且符合题意，

$$\therefore 1.2x = 3.$$

答: A 种粽子单价为 3 元/个, B 种粽子单价为 2.5 元/个.

(2) 设购进 A 种粽子 m 个, 则购进 B 种粽子 $(2600 - m)$ 个,

依题意, 得: $3m + 2.5(2600 - m) \leq 7000$,

解得: $m \leq 1000$.

答: A 种粽子最多能购进 1000 个.

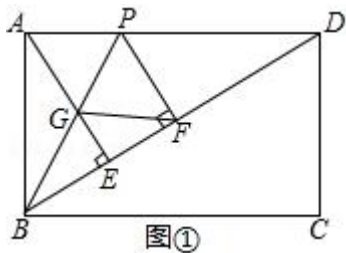
【点评】 本题考查了分式方程的应用以及一元一次不等式的应用, 解题的关键是: (1) 找准等量关系, 正确列出分式方程; (2) 根据各数量之间的关系, 正确列出一元一次不等式.

23. (13 分) 在矩形 $ABCD$ 中, $AE \perp BD$ 于点 E , 点 P 是边 AD 上一点.

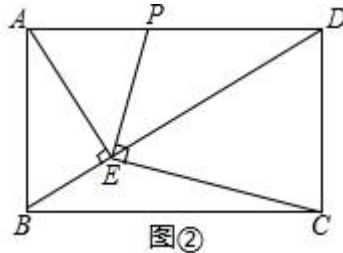
(1) 若 BP 平分 $\angle ABD$, 交 AE 于点 G , $PF \perp BD$ 于点 F , 如图①, 证明四边形 $AGFP$ 是菱形;

(2) 若 $PE \perp EC$, 如图②, 求证: $AE \cdot AB = DE \cdot AP$;

(3) 在 (2) 的条件下, 若 $AB = 1$, $BC = 2$, 求 AP 的长.



图①



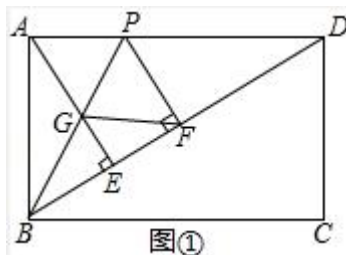
图②

【分析】 (1) 想办法证明 $AG = PF$, $AG \parallel PF$, 推出四边形 $AGFP$ 是平行四边形, 再证明 $PA = PF$ 即可解决问题.

(2) 证明 $\triangle AEP \sim \triangle DEC$, 可得 $\frac{AE}{DE} = \frac{AP}{DC}$, 由此即可解决问题.

(3) 利用 (2) 中结论. 求出 DE , AE 即可.

【解答】 (1) 证明: 如图①中,



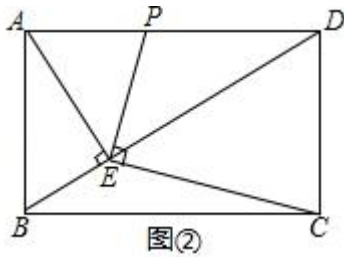
图①

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$,

$\because AE \perp BD$,
 $\therefore \angle AED = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAE + \angle EAD = 90^\circ$, $\angle EAD + \angle ADE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BAE = \angle ADE$,
 $\because \angle AGP = \angle BAG + \angle ABG$, $\angle APD = \angle ADE + \angle PBD$, $\angle ABG = \angle PBD$,
 $\therefore \angle AGP = \angle APG$,
 $\therefore AP = AG$,
 $\because PA \perp AB$, $PF \perp BD$, BP 平分 $\angle ABD$,
 $\therefore PA = PF$,
 $\therefore PF = AG$,
 $\because AE \perp BD$, $PF \perp BD$,
 $\therefore PF \parallel AG$,
 $\therefore$ 四边形 $AGFP$ 是平行四边形,
 $\because PA = PF$,
 $\therefore$ 四边形 $AGFP$ 是菱形.

(2) 证明: 如图②中,



$\because AE \perp BD$, $PE \perp EC$,
 $\therefore \angle AED = \angle PEC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle AEP = \angle DEC$,
 $\because \angle EAD + \angle ADE = 90^\circ$, $\angle ADE + \angle CDE = 90^\circ$,
 $\therefore \angle EAP = \angle EDC$,
 $\therefore \triangle AEP \sim \triangle DEC$,
 $\therefore \frac{AE}{DE} = \frac{AP}{DC}$,
 $\because AB = CD$,

$$\therefore AE \cdot AB = DE \cdot AP;$$

(3) 解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore BC = AD = 2, \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{5},$$

$$\because AE \perp BD,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD,$$

$$\therefore AE = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \frac{4\sqrt{5}}{5},$$

$$\therefore AE \cdot AB = DE \cdot AP;$$

$$\therefore AP = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5} \times 1}{\frac{4\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2}.$$

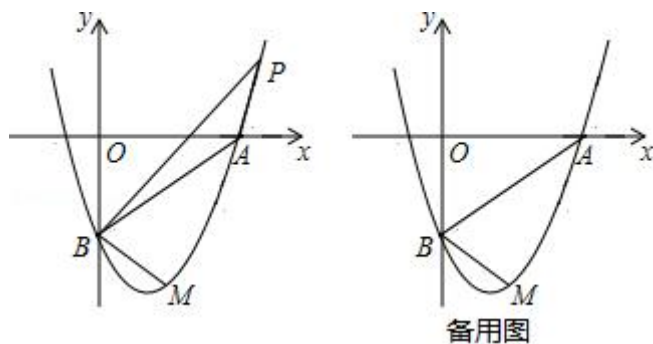
【点评】 本题属于相似形综合题, 考查了相似三角形的判定和性质, 矩形的性质, 解直角三角形等知识, 解题的关键是正确寻找相似三角形解决问题, 属于中考常考题型.

24. (13 分) 若二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴、 y 轴分别交于点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, -2)$, 且过点 $C(2, -2)$.

(1) 求二次函数表达式;

(2) 若点 P 为抛物线上第一象限内的点, 且 $S_{\triangle PBA} = 4$, 求点 P 的坐标;

(3) 在抛物线上 (AB 下方) 是否存在点 M , 使 $\angle ABO = \angle ABM$? 若存在, 求出点 M 到 y 轴的距离; 若不存在, 请说明理由.



【分析】 (1) 用 A 、 B 、 C 三点坐标代入, 用待定系数法求二次函数表达式.

(2) 设点 P 横坐标为 t , 用 t 代入二次函数表达式得其纵坐标. 把 t 当常数求直线 BP 解

析式，进而求直线 BP 与 x 轴交点 C 坐标（用 t 表示），即能用 t 表示 AC 的长．把 $\triangle PBA$ 以 x 轴为界分成 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ACP$ ，即得到 $S_{\triangle PBA} = \frac{1}{2}AC(OB+PD) = 4$ ，用含 t 的式子代入即得到关于 t 的方程，解之即求得点 P 坐标．

(3) 作点 O 关于直线 AB 的对称点 E ，根据轴对称性质即有 AB 垂直平分 OE ，连接 BE 交抛物线于点 M ，即有 $BE=OB$ ，根据等腰三角形三线合一得 $\angle ABO = \angle ABM$ ，即在抛物线上 (AB 下方) 存在点 M 使 $\angle ABO = \angle ABM$ ．设 AB 与 OE 交于点 G ，则 G 为 OE 中点且 $OG \perp AB$ ，利用 $\triangle OAB$ 面积即求得 OG 进而得 OE 的长．易求得 $\angle OAB = \angle BOG$ ，求 $\angle OAB$ 的正弦和余弦值，应用到 $Rt\triangle OEF$ 即求得 OF 、 EF 的长，即得到点 E 坐标．求直线 BE 解析式，把 BE 解析式与抛物线解析式联立，求得 x 的解一个为点 B 横坐标，另一个即为点 M 横坐标，即求出点 M 到 y 轴的距离．

【解答】 解：(1) $\because$ 二次函数的图象经过点 $A(3, 0)$ 、 $B(0, -2)$ 、 $C(2, -2)$

$$\therefore \begin{cases} 9a+3b+c=0 \\ 0+0+c=-2 \\ 4a+2b+c=-2 \end{cases} \quad \text{解得: } \begin{cases} a=\frac{2}{3} \\ b=-\frac{4}{3} \\ c=-2 \end{cases}$$

$$\therefore \text{二次函数表达式为 } y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 2$$

(2) 如图 1，设直线 BP 交 x 轴于点 C ，过点 P 作 $PD \perp x$ 轴于点 D

$$\text{设 } P(t, \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t - 2) \quad (t > 3)$$

$$\therefore OD = t, \quad PD = \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t - 2$$

设直线 BP 解析式为 $y = kx - 2$

$$\text{把点 } P \text{ 代入得: } kt - 2 = \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t - 2$$

$$\therefore k = \frac{2}{3}t - \frac{4}{3}$$

$$\therefore \text{直线 } BP: y = (\frac{2}{3}t - \frac{4}{3})x - 2$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } (\frac{2}{3}t - \frac{4}{3})x - 2 = 0, \text{ 解得: } x = \frac{3}{t-2}$$

$$\therefore C(\frac{3}{t-2}, 0)$$

$$\therefore t > 3$$

$$\therefore t-2 > 1$$

$$\therefore \frac{3}{t-2} < 3, \text{ 即点 } C \text{ 一定在点 } A \text{ 左侧}$$

$$\therefore AC = 3 - \frac{3}{t-2} = \frac{3(t-3)}{t-2}$$

$$\therefore S_{\triangle PBA} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2}AC \cdot OB + \frac{1}{2}AC \cdot PD = \frac{1}{2}AC (OB + PD) = 4$$

$$\therefore \frac{1}{2} \cdot \frac{3(t-3)}{t-2} \cdot (2 + \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t - 2) = 4$$

$$\text{解得: } t_1 = 4, t_2 = -1 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore \frac{2}{3}t^2 - \frac{4}{3}t - 2 = \frac{32}{3} - \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (4, \frac{10}{3})$$

(3) 在抛物线上 (AB 下方) 存在点 M , 使 $\angle ABO = \angle ABM$.

如图 2, 作点 O 关于直线 AB 的对称点 E , 连接 OE 交 AB 于点 G , 连接 BE 交抛物线于点 M , 过点 E 作 $EF \perp y$ 轴于点 F

$$\therefore AB \text{ 垂直平分 } OE$$

$$\therefore BE = OB, OG = GE$$

$$\therefore \angle ABO = \angle ABM$$

$$\therefore A(3, 0), B(0, -2), \angle AOB = 90^\circ$$

$$\therefore OA = 3, OB = 2, AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{13}$$

$$\therefore \sin \angle OAB = \frac{OB}{AB} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \angle OAB = \frac{OA}{AB} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}AB \cdot OG$$

$$\therefore OG = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore OE = 2OG = \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore \angle OAB + \angle AOG = \angle AOG + \angle BOG = 90^\circ$$

$$\therefore \angle OAB = \angle BOG$$

$$\therefore \text{Rt} \triangle OEF \text{ 中, } \sin \angle BOG = \frac{EF}{OE} = \frac{2\sqrt{13}}{13}, \cos \angle BOG = \frac{OF}{OE} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\therefore EF = \frac{2\sqrt{13}}{13}OE = \frac{24}{13}, OF = \frac{3\sqrt{13}}{13}OE = \frac{36}{13}$$

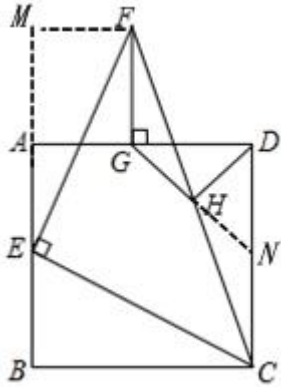
$$\therefore ME = AB = BC$$

$$\therefore BE = MA = MF$$

$$\therefore AG = FG,$$

$$(2) DH \perp HG$$

理由如下：如图，延长 GH 交 CD 于点 N ，



$$\because FG \perp AD, \quad CD \perp AD$$

$$\therefore FG \parallel CD$$

$$\therefore \frac{FG}{CN} = \frac{FH}{CH} = \frac{GH}{NH}, \quad \text{且 } CH = FH,$$

$$\therefore GH = HN, \quad NC = FG$$

$$\therefore AG = FG = NC$$

$$\text{又} \because AD = CD,$$

$$\therefore GD = DN, \quad \text{且 } GH = HN$$

$$\therefore DH \perp GH$$

【点评】 本题考查了正方形的性质，矩形的判定，全等三角形的判定和性质，等腰三角形的性质，证明 $\triangle EFM \cong \triangle CEB$ 是本题的关键。

积分超值换

活动时间：2019年4月23日-6月30日

活动对象：中小学一线教师以及教育工作者



扫一扫 换礼啦

积 分 兑 换 更 超 值



会员升级服务第一拨 · 清北季



神马，有清华北大学霸方法论课；还有清华学霸向所有的父母亲述自己求学之路；

衡水名校试卷悄悄的上线了；

扫qq领取官网不首发课程，很多人我没告诉他啊！

会员qq专享等你来撩.....