

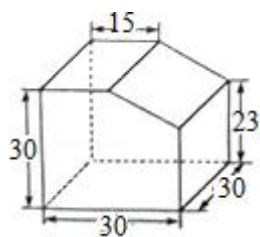
山东省聊城市 2018 年中考数学真题试题

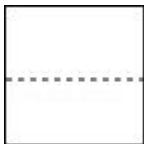
一、选择题 (本题共 12 个小题, 每小题 3 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求)

1. (3 分) 下列实数中的无理数是 ()

- A. $\sqrt{1.21}$ B. $\sqrt[3]{-8}$ C. $\frac{\sqrt[3]{-3}}{2}$ D. $\frac{22}{7}$

2. (3 分) 如图所示的几何体, 它的左视图是 ()

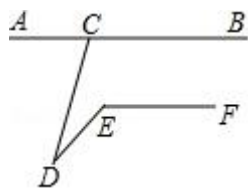


- A.  B.  C.  D. 

3. (3 分) 在运算速度上, 已连续多次取得世界第一的神威太湖之光超级计算机, 其峰值性能为 12.5 亿亿次/秒. 这个数据以亿次/秒为单位用科学记数法可以表示为 ()

- A. 1.25×10^8 亿次/秒 B. 1.25×10^9 亿次/秒
C. 1.25×10^{10} 亿次/秒 D. 12.5×10^8 亿次/秒

4. (3 分) 如图, 直线 $AB \parallel EF$, 点 C 是直线 AB 上一点, 点 D 是直线 AB 外一点, 若 $\angle BCD = 95^\circ$, $\angle CDE = 25^\circ$, 则 $\angle DEF$ 的度数是 ()

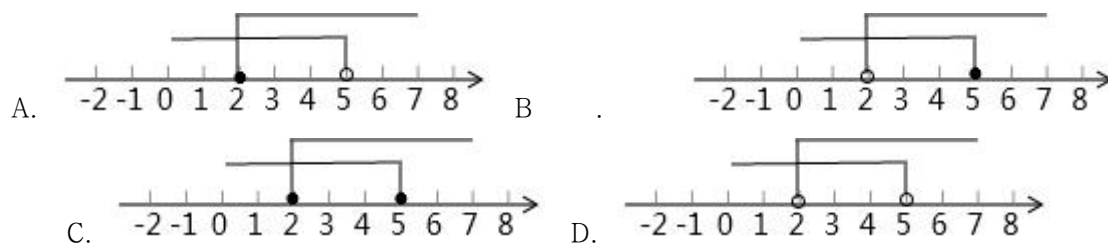


- A. 110° B. 115° C. 120° D. 125°

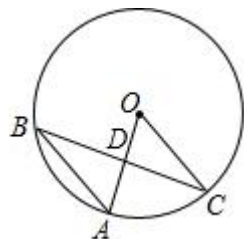
5. (3 分) 下列计算错误的是 ()

- A. $a^2 \div a^0 \cdot a^2 = a^4$ B. $a^2 \div (a^0 \cdot a^2) = 1$
C. $(-1.5)^8 \div (-1.5)^7 = -1.5$ D. $-1.5^8 \div (-1.5)^7 = -1.5$

6. (3 分) 已知不等式 $\frac{2-x}{2} \leq \frac{2x-4}{3} < \frac{x-1}{2}$, 其解集在数轴上表示正确的是 ()



7. (3分) 如图, $\odot O$ 中, 弦 BC 与半径 OA 相交于点 D , 连接 AB , OC . 若 $\angle A = 60^\circ$, $\angle ADC = 85^\circ$, 则 $\angle C$ 的度数是 ()



- A. 25° B. 27.5° C. 30° D. 35°

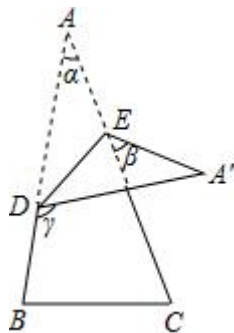
8. (3分) 下列计算正确的是 ()

- A. $3\sqrt{10} - 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$ B. $\sqrt{\frac{7}{11}} \cdot (\sqrt{\frac{11}{7}} \div \sqrt{\frac{1}{11}}) = \sqrt{11}$
C. $(\sqrt{75} - \sqrt{15}) \div \sqrt{3} = 2\sqrt{5}$ D. $\frac{1}{3}\sqrt{18} - 3\sqrt{\frac{8}{9}} = \sqrt{2}$

9. (3分) 小亮、小莹、大刚三位同学随机地站成一排合影留念, 小亮恰好站在中间的概率是 ()

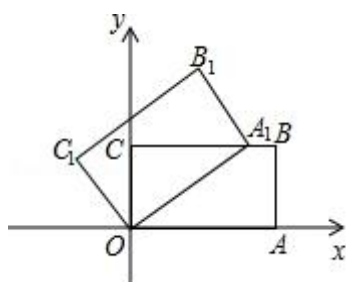
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

10. (3分) 如图, 将一张三角形纸片 ABC 的一角折叠, 使点 A 落在 $\triangle ABC$ 外的 A' 处, 折痕为 DE . 如果 $\angle A = \alpha$, $\angle CEA' = \beta$, $\angle BDA' = \gamma$, 那么下列式子中正确的是 ()



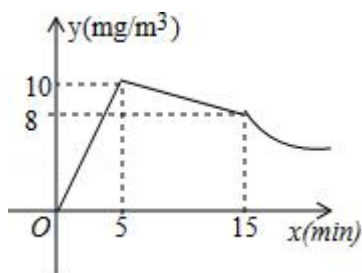
- A. $\gamma = 2\alpha + \beta$ B. $\gamma = \alpha + 2\beta$ C. $\gamma = \alpha + \beta$ D. $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

11. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的两边 OA , OC 分别在 x 轴和 y 轴上, 并且 $OA = 5$, $OC = 3$. 若把矩形 $OABC$ 绕着点 O 逆时针旋转, 使点 A 恰好落在 BC 边上的 A_1 处, 则点 C 的对应点 C_1 的坐标为 ()



- A. $(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$ B. $(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ C. $(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$ D. $(-\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$

12. (3分) 春季是传染病多发的季节, 积极预防传染病是学校高度重视的一项工作, 为此, 某校对学生宿舍采取喷洒药物进行消毒. 在对某宿舍进行消毒的过程中, 先经过 5min 的集中药物喷洒, 再封闭宿舍 10min, 然后打开门窗进行通风, 室内每立方米空气中含药量 y (mg/m^3) 与药物在空气中的持续时间 x (min) 之间的函数关系, 在打开门窗通风前分别满足两个一次函数, 在通风后又成反比例, 如图所示. 下面四个选项中错误的是 ()



- A. 经过 5min 集中喷洒药物, 室内空气中的含药量最高达到 $10\text{mg}/\text{m}^3$
 B. 室内空气中的含药量不低于 $8\text{mg}/\text{m}^3$ 的持续时间达到了 11min
 C. 当室内空气中的含药量不低于 $5\text{mg}/\text{m}^3$ 且持续时间不低于 35 分钟, 才能有效杀灭某种传染病毒. 此次消毒完全有效
 D. 当室内空气中的含药量低于 $2\text{mg}/\text{m}^3$ 时, 对人体才是安全的, 所以从室内空气中的含药量达到 $2\text{mg}/\text{m}^3$ 开始, 需经过 59min 后, 学生才能进入室内

二、填空题 (本题共 5 个小题, 每小题 3 分, 共 15 分. 只要求填写最后结果)

13. (3分) 已知关于 x 的方程 $(k-1)x^2 - 2kx + k - 3 = 0$ 有两个相等的实根, 则 k 的值是_____.

14. (3分) 某十字路口设有交通信号灯, 东西向信号灯的开启规律如下: 红灯开启 30 秒后关闭, 紧接着黄灯开启 3 秒后关闭, 再紧接着绿灯开启 42 秒, 按此规律循环下去. 如果不考虑其他因素, 当一辆汽车沿东西方向随机地行驶到该路口时, 遇到红灯的概率是_____.



15. (3分) 用一块圆心角为 216° 的扇形铁皮, 做一个高为 40cm 的圆锥形工件 (接缝忽略不计), 那么这个扇形铁皮的半径是_____cm.

16. (3分) 如果一个正方形被截掉一个角后, 得到一个多边形, 那么这个多边形的内角和是_____.

17. (3分) 若 x 为实数, 则 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 例如 $[1.6]=1$, $[\pi]=3$, $[-2.82]=-3$ 等. $[x]+1$ 是大于 x 的最小整数, 对任意的实数 x 都满足不等式 $[x] \leq x < [x]+1$. ①利用这个不等式①, 求出满足 $[x]=2x-1$ 的所有解, 其所有解为_____.

三、解答题 (本题共 8 个小题, 共 69 分, 解答题应写出文字说明、证明过程或推演步骤)

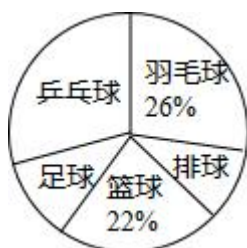
18. (7分) 先化简, 再求值: $\frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a} \div (\frac{a}{a+2} - \frac{1}{a^2+2a})$, 其中 $a = -\frac{1}{2}$.

19. (8分) 时代中学从学生兴趣出发, 实施体育活动课走班制. 为了了解学生最喜欢的一种球类运动, 以便合理安排活动场地, 在全校至少喜欢一种球类 (乒乓球、羽毛球、排球、篮球、足球) 运动的 1200 名学生中, 随机抽取了若干名学生进行调查 (每人只能在这五种球类运动中选择一种), 调查结果统计如下:

球类名称	乒乓球	羽毛球	排球	篮球	足球
人数	42	a	15	33	b

解答下列问题:

- (1) 这次抽样调查中的样本是_____;
- (2) 统计表中, $a=$ _____, $b=$ _____;
- (3) 试估计上述 1200 名学生中最喜欢乒乓球运动的人数.

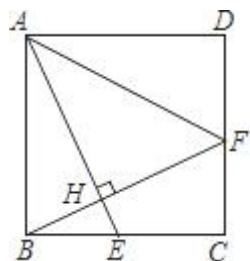


20. (8分) 如图, 正方形 ABCD 中, E 是 BC 上的一点, 连接 AE, 过 B 点作 $BH \perp AE$, 垂

足为点 H, 延长 BH 交 CD 于点 F, 连接 AF.

(1) 求证: $AE=BF$.

(2) 若正方形边长是 5, $BE=2$, 求 AF 的长.



21. (8 分) 建设中的大外环路是我市的一项重点民生工程. 某工程公司承建的一段路基工程的施工土方量为 120 万立方, 原计划由公司的甲、乙两个工程队从公路的两端同时相向施工 150 天完成. 由于特殊情况需要, 公司抽调甲队外援施工, 由乙队先单独施工 40 天后甲队返回, 两队又共同施工了 110 天, 这时甲乙两队共完成土方量 103.2 万立方.

(1) 问甲、乙两队原计划平均每天的施工土方量分别为多少万立方?

(2) 在抽调甲队外援施工的情况下, 为了保证 150 天完成任务, 公司为乙队新购进了了一批机械来提高效率, 那么乙队平均每天的施工土方量至少要比原来提高多少万立方才能保证按时完成任务?

22. (8 分) 随着我市农产品整体品牌形象“聊·胜一筹!”的推出, 现代农业得到了更快发展. 某农场为扩大生产建设了一批新型钢管装配式大棚, 如图 1. 线段 AB, BD 分别表示大棚的墙高和跨度, AC 表示保温板的长. 已知墙高 AB 为 2 米, 墙面与保温板所成的角 $\angle BAC=150^\circ$, 在点 D 处测得 A 点、C 点的仰角分别为 9° , 15.6° , 如图 2. 求保温板 AC 的长是多少米? (精确到 0.1 米)

(参考数据: $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$, $\sin 9^\circ \approx 0.16$, $\cos 9^\circ \approx 0.99$, $\tan 9^\circ \approx 0.16$, $\sin 15.6^\circ \approx 0.27$, $\cos 15.6^\circ \approx 0.96$, $\tan 15.6^\circ \approx 0.28$)



图1

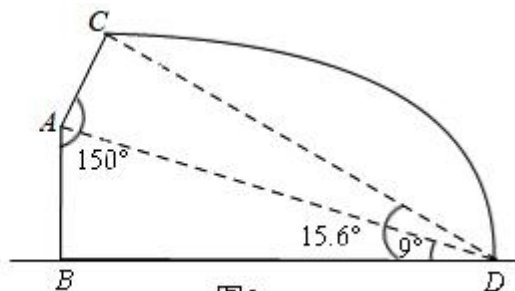
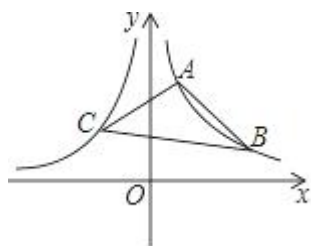


图2

23. (8 分) 如图, 已知反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}$ ($x>0$) 的图象与反比例函数 $y=\frac{k_2}{x}$ ($x<0$) 的图

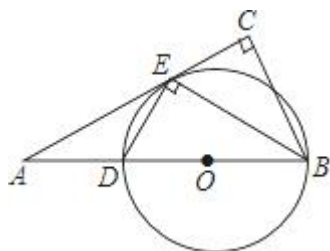
象关于 y 轴对称, $A(1, 4)$, $B(4, m)$ 是函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 图象上的两点, 连接 AB , 点 $C(-2, n)$ 是函数 $y = \frac{k_2}{x}$ ($x < 0$) 图象上的一点, 连接 AC , BC .

- (1) 求 m , n 的值;
- (2) 求 AB 所在直线的表达式;
- (3) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



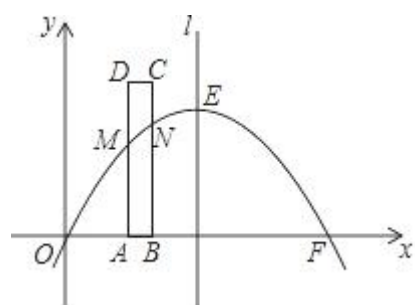
24. (10 分) 如图, 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E , 作 $ED \perp EB$ 交 AB 于点 D , $\odot O$ 是 $\triangle BED$ 的外接圆.

- (1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 已知 $\odot O$ 的半径为 2.5, $BE = 4$, 求 BC , AD 的长.



25. (12 分) 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx$ 与 x 轴分别交于原点 O 和点 $F(10, 0)$, 与对称轴 l 交于点 $E(5, 5)$. 矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴正半轴上, 且 $AB = 1$, 边 AD , BC 与抛物线分别交于点 M , N . 当矩形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移, 点 M , N 位于对称轴 l 的同侧时, 连接 MN , 此时, 四边形 $ABNM$ 的面积记为 S ; 点 M , N 位于对称轴 l 的两侧时, 连接 EM , EN , 此时五边形 $ABNEM$ 的面积记为 S . 将点 A 与点 O 重合的位置作为矩形 $ABCD$ 平移的起点, 设矩形 $ABCD$ 平移的长度为 t ($0 \leq t \leq 5$)

- (1) 求出这条抛物线的表达式;
- (2) 当 $t = 0$ 时, 求 $S_{\triangle OBN}$ 的值;
- (3) 当矩形 $ABCD$ 沿着 x 轴的正方向平移时, 求 S 关于 t ($0 < t \leq 5$) 的函数表达式, 并求出 t 为何值时 S 有最大值, 最大值是多少?

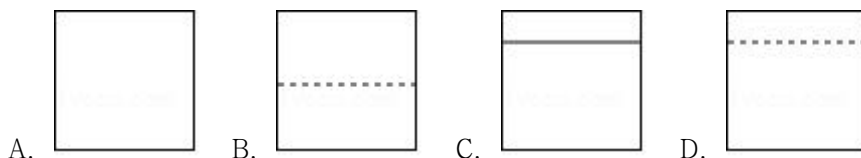


A. $\sqrt{1.21}$ B. $\sqrt[3]{-8}$ C. $\frac{\sqrt[3]{-3}}{2}$ D. $\frac{22}{7}$

【解答】解: $\sqrt{1.21}$, $\sqrt[3]{-8}$, $\frac{22}{7}$ 是有理数,

$\frac{\sqrt[3]{-3}}{2}$ 是无理数,

【点评】此题主要考查了无理数的定义，注意带根号的要开不尽方才是无理数，无限不循环小数是无理数. 如 π , $\sqrt{6}$, $0.8080080008\cdots$ (每两个 8 之间依次多 1 个 0) 等形式.



【解答】解：用左边看是等宽的上下两个矩形，上边的矩形小，下边的矩形大，两矩形的公共边是虚线，

【点评】 本题考查了简单组合体的三视图，从左边看得到的图形是左视图.

3. (3 分) 在运算速度上, 已连续多次取得世界第一的神威太湖之光超级计算机, 其峰值性能为 12.5 亿亿次/秒. 这个数据以亿次/秒为单位用科学记数法可以表示为 ()

A. 1.25×10^8 亿次/秒 B. 1.25×10^9 亿次/秒

C. 1.25×10^{10} 亿次/秒 D. 12.5×10^8 亿次/秒

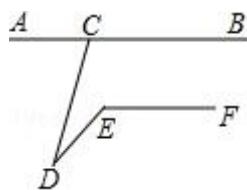
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数。确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数。

【解答】解：12.5 亿亿次/秒 $= 1.25 \times 10^9$ 亿次/秒，

故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法。科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值。

4. (3分) 如图, 直线 $AB \parallel EF$, 点 C 是直线 AB 上一点, 点 D 是直线 AB 外一点, 若 $\angle BCD = 95^\circ$, $\angle CDE = 25^\circ$, 则 $\angle DEF$ 的度数是 ()



A. 110° B. 115° C. 120° D. 125°

【分析】直接延长 FE 交 DC 于点 N , 利用平行线的性质得出 $\angle BCD = \angle DNF = 95^\circ$, 再利用三角形外角的性质得出答案.

【解答】解：延长 FE 交 DC 于点 N ,

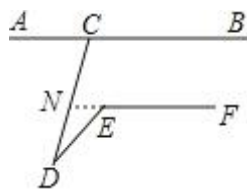
$\because$ 直线 $AB \parallel EF$,

$\therefore \angle BCD = \angle DNF = 95^\circ$,

$\because \angle CDE = 25^\circ$,

$\therefore \angle DEF = 95^\circ + 25^\circ = 120^\circ$.

故选：C.



【点评】此题主要考查了平行线的性质以及三角形的外角，正确掌握平行线的性质是解题关键.

5. (3分) 下列计算错误的是 ()

A. $a^2 \div a^0 \cdot a^2 = a^4$ B. $a^2 \div (a^0 \cdot a^2) = 1$

C. $(-1.5)^8 \div (-1.5)^7 = -1.5$ D. $-1.5^8 \div (-1.5)^7 = -1.5$

【分析】根据同底数幂的除法法则，同底数幂的乘法的运算方法，以及零指数幂的运算方法，逐项判定即可.

【解答】解： $\because a^2 \div a^0 \cdot a^2 = a^4$,

$\therefore$ 选项 A 不符合题意;

$\because a^2 \div (a^0 \cdot a^2) = 1$,

$\therefore$ 选项 B 不符合题意;

$\because (-1.5)^8 \div (-1.5)^7 = -1.5$,

$\therefore$ 选项 C 不符合题意;

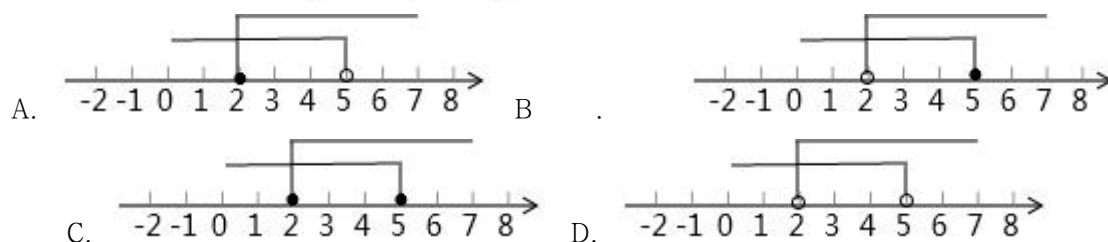
$\because -1.5^8 \div (-1.5)^7 = 1.5$,

$\therefore$ 选项 D 符合题意.

故选: D.

【点评】此题主要考查了同底数幂的除法法则，同底数幂的乘法的运算方法，以及零指数幂的运算方法，同底数幂相除，底数不变，指数相减，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：
①底数 $a \neq 0$ ，因为 0 不能做除数；②单独的一个字母，其指数是 1，而不是 0；③应用同底数幂除法的法则时，底数 a 可是单项式，也可以多项式，但必须明确底数是什么，指数是什么.

6. (3分) 已知不等式 $\frac{2-x}{2} \leq \frac{2x-4}{3} < \frac{x-1}{2}$, 其解集在数轴上表示正确的是 ()



【分析】把已知双向不等式变形为不等式组，求出各不等式的解集，找出解集的方法部分即可.

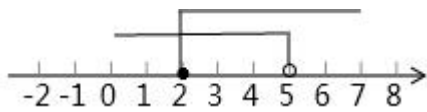
【解答】解：根据题意得：
$$\begin{cases} \frac{2-x}{2} \leq \frac{2x-4}{3} & ① \\ \frac{2x-4}{3} < \frac{x-1}{2} & ② \end{cases}$$

由①得： $x \geq 2$,

由②得： $x < 5$,

$\therefore 2 \leq x < 5$,

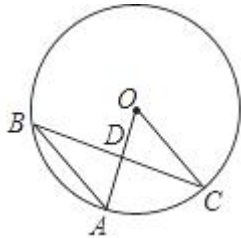
表示在数轴上，如图所示，



故选：A.

【点评】此题考查了解一元一次不等式组，以及在数轴上表示不等式的解集，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

7. (3分) 如图， $\odot O$ 中，弦 BC 与半径 OA 相交于点 D ，连接 AB ， OC ．若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle ADC = 85^\circ$ ，则 $\angle C$ 的度数是 ()



A. 25° B. 27.5° C. 30° D. 35°

【分析】直接利用三角形外角的性质以及邻补角的关系得出 $\angle B$ 以及 $\angle ODC$ 度数，再利用圆周角定理以及三角形内角和定理得出答案.

【解答】解： $\because \angle A = 60^\circ$ ， $\angle ADC = 85^\circ$ ，
 $\therefore \angle B = 85^\circ - 60^\circ = 25^\circ$ ， $\angle CDO = 95^\circ$ ，
 $\therefore \angle AOC = 2\angle B = 50^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = 180^\circ - 95^\circ - 50^\circ = 35^\circ$

故选：D.

【点评】此题主要考查了圆周角定理以及三角形内角和定理等知识，正确得出 $\angle AOC$ 度数

是解题关键.

8. (3分) 下列计算正确的是 ()

- A. $3\sqrt{10}-2\sqrt{5}=\sqrt{5}$ B. $\sqrt{\frac{7}{11}} \cdot (\sqrt{\frac{11}{7}} \div \sqrt{\frac{1}{11}}) = \sqrt{11}$
C. $(\sqrt{75}-\sqrt{15}) \div \sqrt{3}=2\sqrt{5}$ D. $\frac{1}{3}\sqrt{18}-3\sqrt{\frac{8}{9}}=\sqrt{2}$

【分析】根据二次根式的加减乘除运算法则逐一计算可得.

【解答】解: A、 $3\sqrt{10}$ 与 $-2\sqrt{5}$ 不是同类二次根式, 不能合并, 此选项错误;

B、 $\sqrt{\frac{7}{11}} \cdot (\sqrt{\frac{11}{7}} \div \sqrt{\frac{1}{11}}) = \sqrt{\frac{7}{11}} \cdot \sqrt{\frac{11}{7}} \times \sqrt{11} = \sqrt{\frac{7}{11} \times \frac{11}{7} \times 11} = \sqrt{11}$, 此选项正确;

C、 $(\sqrt{75}-\sqrt{15}) \div \sqrt{3} = (5\sqrt{3}-\sqrt{15}) \div \sqrt{3} = 5 - \sqrt{5}$, 此选项错误;

D、 $\frac{1}{3}\sqrt{18}-3\sqrt{\frac{8}{9}}=\sqrt{2}-2\sqrt{2}=-\sqrt{2}$, 此选项错误;

故选: B.

【点评】本题主要考查二次根式的混合运算, 解题的关键是掌握二次根式混合运算顺序和运算法则.

9. (3分) 小亮、小莹、大刚三位同学随机地站成一排合影留念, 小亮恰好站在中间的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{6}$

【分析】先利用列表法展示所以 6 种等可能的结果, 其中小亮恰好站在中间的占 2 种, 然后根据概率定义求解.

【解答】解: 列表如下:

左	中	右
小亮	小莹	大刚
小亮	大刚	小莹
小莹	小亮	大刚
大刚	小亮	小莹
小莹	大刚	小亮
大刚	小莹	小亮

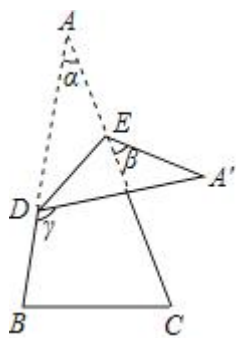
共有 6 种等可能的结果, 其中小亮恰好站在中间的占 2 种,

所以小亮恰好站在中间的概率 $=\frac{1}{3}$.

故选: B.

【点评】 本题考查了列表法与树状图法: 先利用列举法或树形图法不重不漏地列举出所有可能的结果求出 n , 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m , 求出概率.

10. (3分) 如图, 将一张三角形纸片 ABC 的一角折叠, 使点 A 落在 $\triangle ABC$ 外的 A' 处, 折痕为 DE . 如果 $\angle A = \alpha$, $\angle CEA' = \beta$, $\angle BDA' = \gamma$, 那么下列式子中正确的是 ()



- A. $\gamma = 2\alpha + \beta$ B. $\gamma = \alpha + 2\beta$ C. $\gamma = \alpha + \beta$ D. $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$

【分析】 根据三角形的外角得: $\angle BDA' = \angle A + \angle AFD$, $\angle AFD = \angle A' + \angle CEA'$, 代入已知可得结论.

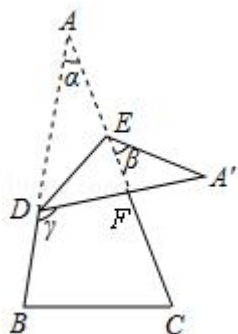
【解答】 解: 由折叠得: $\angle A = \angle A'$,

$$\because \angle BDA' = \angle A + \angle AFD, \quad \angle AFD = \angle A' + \angle CEA',$$

$$\because \angle A = \alpha, \quad \angle CEA' = \beta, \quad \angle BDA' = \gamma,$$

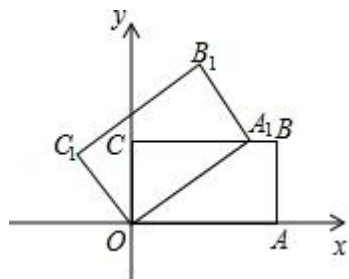
$$\therefore \angle BDA' = \gamma = \alpha + \alpha + \beta = 2\alpha + \beta,$$

故选: A.



【点评】 本题考查了三角形外角的性质, 熟练掌握三角形的外角等于与它不相邻的两个内角的和是关键.

11. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 OABC 的两边 OA, OC 分别在 x 轴和 y 轴上, 并且 OA=5, OC=3. 若把矩形 OABC 绕着点 O 逆时针旋转, 使点 A 恰好落在 BC 边上的 A_1 处, 则点 C 的对应点 C_1 的坐标为 ()



- A. $(-\frac{9}{5}, \frac{12}{5})$ B. $(-\frac{12}{5}, \frac{9}{5})$ C. $(-\frac{16}{5}, \frac{12}{5})$ D. $(-\frac{12}{5}, \frac{16}{5})$

【分析】 直接利用相似三角形的判定与性质得出 $\triangle ONC_1$ 三边关系, 再利用勾股定理得出答案.

【解答】 解: 过点 C_1 作 $C_1N \perp x$ 轴于点 N, 过点 A_1 作 $A_1M \perp x$ 轴于点 M,

由题意可得: $\angle C_1NO = \angle A_1MO = 90^\circ$,

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3,$$

则 $\triangle A_1OM \sim \triangle OC_1N$,

$$\therefore OA = 5, OC = 3,$$

$$\therefore OA_1 = 5, A_1M = 3,$$

$$\therefore OM = 4,$$

$$\therefore \text{设 } NO = 3x, \text{ 则 } NC_1 = 4x, OC_1 = 3,$$

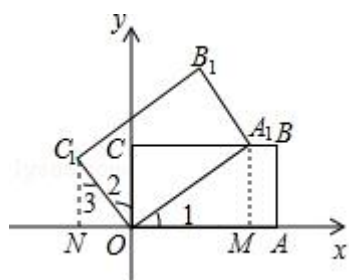
$$\text{则 } (3x)^2 + (4x)^2 = 9,$$

$$\text{解得: } x = \pm \frac{3}{5} \text{ (负数舍去),}$$

$$\text{则 } NO = \frac{9}{5}, NC_1 = \frac{12}{5},$$

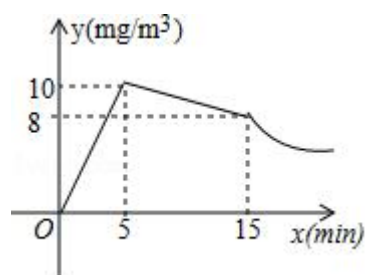
$$\text{故点 C 的对应点 } C_1 \text{ 的坐标为: } (-\frac{9}{5}, \frac{12}{5}).$$

故选: A.



【点评】此题主要考查了矩形的性质以及勾股定理等知识，正确得出 $\triangle A_1OM \sim \triangle OC_1N$ 是解题关键.

12. (3分) 春季是传染病多发的季节，积极预防传染病是学校高度重视的一项工作，为此，某校对学生宿舍采取喷洒药物进行消毒. 在对某宿舍进行消毒的过程中，先经过 5min 的集中药物喷洒，再封闭宿舍 10min，然后打开门窗进行通风，室内每立方米空气中含药量 y (mg/m^3) 与药物在空气中的持续时间 x (min) 之间的函数关系，在打开门窗通风前分别满足两个一次函数，在通风后又成反比例，如图所示. 下面四个选项中错误的是 ()



- A. 经过 5min 集中喷洒药物，室内空气中的含药量最高达到 $10\text{mg}/\text{m}^3$
- B. 室内空气中的含药量不低于 $8\text{mg}/\text{m}^3$ 的持续时间达到了 11min
- C. 当室内空气中的含药量不低于 $5\text{mg}/\text{m}^3$ 且持续时间不低于 35 分钟，才能有效杀灭某种传染病毒. 此次消毒完全有效
- D. 当室内空气中的含药量低于 $2\text{mg}/\text{m}^3$ 时，对人体才是安全的，所以从室内空气中的含药量达到 $2\text{mg}/\text{m}^3$ 开始，需经过 59min 后，学生才能进入室内

【分析】利用图中信息一一判断即可；

【解答】解：A、正确. 不符合题意.

B、由题意 $x=4$ 时， $y=8$ ， $\therefore$ 室内空气中的含药量不低于 $8\text{mg}/\text{m}^3$ 的持续时间达到了 11min，正确，不符合题意；

C、 $y=5$ 时， $x=2.5$ 或 24， $24-2.5=21.5 < 35$ ，故本选项错误，符合题意；

D、正确. 不符合题意，

故选：C.

【点评】本题考查反比例函数的应用、一次函数的应用等知识，解题的关键是读懂图象信息，属于中考常考题型.

二、填空题 (本题共 5 个小题，每小题 3 分，共 15 分. 只要求填写最后结果)

13. (3分) 已知关于 x 的方程 $(k-1)x^2 - 2kx + k - 3 = 0$ 有两个相等的实根, 则 k 的值是 $\frac{3}{4}$.

【分析】根据二次项系数非零及根的判别式 $\Delta=0$, 即可得出关于 k 的一元一次不等式及一元一次方程, 解之即可得出 k 的值.

【解答】解: $\because$ 关于 x 的方程 $(k-1)x^2 - 2kx + k - 3 = 0$ 有两个相等的实根,

$$\therefore \begin{cases} k-1 \neq 0 \\ \Delta = (-2k)^2 - 4(k-1)(k-3) = 0 \end{cases}$$

解得: $k = \frac{3}{4}$.

故答案为: $\frac{3}{4}$.

【点评】本题考查了根的判别式以及一元二次方程的定义, 牢记“当 $\Delta=0$ 时, 方程有两个相等的实数根”是解题的关键.

14. (3分) 某十字路口设有交通信号灯, 东西向信号灯的开启规律如下: 红灯开启 30 秒后关闭, 紧接着黄灯开启 3 秒后关闭, 再紧接着绿灯开启 42 秒, 按此规律循环下去. 如果不考虑其他因素, 当一辆汽车沿东西方向随机地行驶到该路口时, 遇到红灯的概率是 $\frac{2}{5}$.



【分析】根据概率的求法, 找准两点: ①全部情况的总数; ②符合条件的情况数目; 二者的比值就是其发生的概率.

【解答】解: $\because$ 红灯亮 30 秒, 黄灯亮 3 秒, 绿灯亮 42 秒,

$$\therefore P(\text{红灯亮}) = \frac{30}{30+3+42} = \frac{2}{5},$$

故答案为: $\frac{2}{5}$.

【点评】本题考查概率的求法: 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

15. (3分) 用一块圆心角为 216° 的扇形铁皮, 做一个高为 40cm 的圆锥形工件 (接缝忽略

不计), 那么这个扇形铁皮的半径是 50 cm.

【分析】 设这个扇形铁皮的半径为 R cm, 圆锥的底面圆的半径为 r cm, 根据圆锥的侧面展开图为一扇形, 这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长. 和弧长公式得到 $2\pi r = \frac{216 \cdot \pi \cdot R}{180}$, 解得 $r = \frac{3}{5}R$, 然后利用勾股定理得到 $40^2 + (\frac{3}{5}R)^2 = R^2$, 最后解方程即可.

【解答】 解: 设这个扇形铁皮的半径为 R cm,

圆锥的底面圆的半径为 r cm,

根据题意得 $2\pi r = \frac{216 \cdot \pi \cdot R}{180}$, 解得 $r = \frac{3}{5}R$,

因为 $40^2 + (\frac{3}{5}R)^2 = R^2$, 解得 $R = 50$.

所以这个扇形铁皮的半径为 50 cm.

故答案为 50.

【点评】 本题考查了圆锥的计算: 圆锥的侧面展开图为一扇形, 这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长.

16. (3 分) 如果一个正方形被截掉一个角后, 得到一个多边形, 那么这个多边形的内角和是 540° 或 360° 或 180° .

【分析】 剪掉一个多边形的一个角, 则所得新的多边形的角可能增加一个, 也可能不变, 也可能减少一个, 根据多边形的内角和定理即可求解.

【解答】 解: n 边形的内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$,

边数增加 1, 则新的多边形的内角和是 $(4+1-2) \times 180^\circ = 540^\circ$,

所得新的多边形的角不变, 则新的多边形的内角和是 $(4-2) \times 180^\circ = 360^\circ$,

所得新的多边形的边数减少 1, 则新的多边形的内角和是 $(4-1-2) \times 180^\circ = 180^\circ$,

因而所成的新多边形的内角和是 540° 或 360° 或 180° .

故答案为: 540° 或 360° 或 180° .

【点评】 本题主要考查了多边形的内角和的计算公式, 理解: 剪掉一个多边形的一个角, 则所得新的多边形的角可能增加一个, 也可能不变, 也可能减少一个, 是解决本题的关键.

17. (3 分) 若 x 为实数, 则 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 例如 $[1.6] = 1$, $[\pi] = 3$, $[-2.82] = -3$ 等. $[x]+1$ 是大于 x 的最小整数, 对任意的实数 x 都满足不等式 $[x] \leq x < [x]+1$. ①利用这个不

等式①，求出满足 $[x]=2x-1$ 的所有解，其所有解为 $x=0.5$ 或 $x=1$ 。

【分析】根据题意可以列出相应的不等式，从而可以求得 x 的取值范围，本题得以解决。

【解答】解：∵对任意的实数 x 都满足不等式 $[x] \leq x < [x]+1$ ， $[x]=2x-1$ ，

$$\therefore 2x-1 \leq x < 2x-1+1,$$

解得， $0 < x \leq 1$ ，

∵ $2x-1$ 是整数，

$$\therefore x=0.5 \text{ 或 } x=1,$$

故答案为： $x=0.5$ 或 $x=1$ 。

【点评】本题考查了解一元一次不等式组，解答本题的关键是明确题意，会解答一元一次不等式。

三、解答题（本题共 8 个小题，共 69 分，解答题应写出文字说明、证明过程或推演步骤）

18. (7 分) 先化简，再求值： $\frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a} \div (\frac{a}{a+2} - \frac{1}{a^2+2a})$ ，其中 $a = -\frac{1}{2}$ 。

【分析】首先计算括号里面的减法，然后再计算除法，最后再计算减法，化简后，再代入 a 的值可得答案。

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：原式} &= \frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a} \div [\frac{a}{a+2} - \frac{1}{a(a+2)}], \\ &= \frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a} \div [\frac{a^2}{a(a+2)} - \frac{1}{a(a+2)}], \\ &= \frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a} \cdot \frac{a^2-1}{a(a+2)}, \\ &= \frac{a}{a+1} - \frac{a-1}{a} \cdot \frac{a(a+2)}{(a+1)(a-1)}, \\ &= \frac{a}{a+1} - \frac{a+2}{a+1}, \\ &= -\frac{2}{a+1}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } a = -\frac{1}{2} \text{ 时, 原式} = -\frac{2}{-\frac{1}{2}+1} = -4.$$

【点评】此题主要考查了分式的化简求值，关键是掌握化简求值，一般是先化简为最简分式或整式，再代入求值。

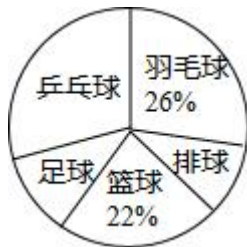
19. (8 分) 时代中学从学生兴趣出发，实施体育活动课走班制。为了了解学生最喜欢的一

种球类运动，以便合理安排活动场地，在全校至少喜欢一种球类（乒乓球、羽毛球、排球、篮球、足球）运动的 1200 名学生中，随机抽取了若干名学生进行调查（每人只能在这五种球类运动中选择一种），调查结果统计如下：

球类名称	乒乓球	羽毛球	排球	篮球	足球
人数	42	a	15	33	b

解答下列问题：

- (1) 这次抽样调查中的样本是 时代中学学生最喜欢的一种球类运动情况；
- (2) 统计表中， $a=$ 39， $b=$ 21；
- (3) 试估计上述 1200 名学生中最喜欢乒乓球运动的人数.



【分析】 (1) 直接利用样本的定义分析得出答案；

(2) 用喜欢排球的人数除以其所占的百分比即可求得样本容量，用样本容量乘以羽毛球所占的百分比即可求得 a ，用样本容量减去其他求得 b 值；

(3) 用总人数乘以喜欢乒乓球的人所占的百分比即可.

【解答】 解：(1) 这次抽样调查中的样本是：时代中学学生最喜欢的一种球类运动情况；
故答案为：时代中学学生最喜欢的一种球类运动情况；

(2) $\because$ 喜欢篮球的有 33 人，占 22%，

$\therefore$ 样本容量为 $33 \div 22\% = 150$ ；

$a = 150 \times 26\% = 39$ (人)，

$b = 150 - 39 - 42 - 15 - 33 = 21$ (人)；

故答案为：39，21；

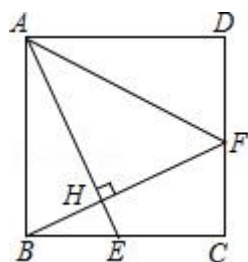
(3) 最喜欢乒乓球运动的人数为： $1200 \times \frac{42}{150} = 336$ (人).

【点评】 本题考查了扇形统计图、用样本估计总体等知识，解题的关键是正确的从统计图中读懂有关信息.

20. (8分) 如图, 正方形 ABCD 中, E 是 BC 上的一点, 连接 AE, 过 B 点作 $BH \perp AE$, 垂足为点 H, 延长 BH 交 CD 于点 F, 连接 AF.

(1) 求证: $AE=BF$.

(2) 若正方形边长是 5, $BE=2$, 求 AF 的长.



【分析】 (1) 根据 ASA 证明 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$, 可得结论;

(2) 根据 (1) 得: $\triangle ABE \cong \triangle BCF$, 则 $CF=BE=2$, 最后利用勾股定理可得 AF 的长.

【解答】 (1) 证明: $\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$$\therefore AB=BC, \angle ABE=\angle BCF=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE+\angle AEB=90^\circ,$$

$$\because BH \perp AE,$$

$$\therefore \angle BHE=90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB+\angle EBH=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE=\angle EBH,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAE=\angle CBF \\ AB=BC \\ \angle ABE=\angle BCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore AE=BF;$$

(2) 解: $\because AB=BC=5$,

由 (1) 得: $\triangle ABE \cong \triangle BCF$,

$$\therefore CF=BE=2,$$

$$\therefore DF=5-2=3,$$

$\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$$\therefore AB=AD=5, \angle ADF=90^\circ,$$

由勾股定理得： $AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$.

【点评】 此题考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、勾股定理，本题证明 $\triangle ABE \cong \triangle BCF$ 是解本题的关键.

21. (8分) 建设中的大外环路是我市的一项重点民生工程. 某工程公司承建的一段路基工程的施工土方量为 120 万立方, 原计划由公司的甲、乙两个工程队从公路的两端同时相向施工 150 天完成. 由于特殊情况需要, 公司抽调甲队外援施工, 由乙队先单独施工 40 天后甲队返回, 两队又共同施工了 110 天, 这时甲乙两队共完成土方量 103.2 万立方.

(1) 问甲、乙两队原计划平均每天的施工土方量分别为多少万立方?

(2) 在抽调甲队外援施工的情况下, 为了保证 150 天完成任务, 公司为乙队新购进了—批机械来提高效率, 那么乙队平均每天的施工土方量至少要比原来提高多少万立方才能保证按时完成任务?

【分析】 (1) 设甲队原计划平均每天的施工土方量为 x 万立方, 乙队原计划平均每天的施工土方量为 y 万立方, 根据“甲乙两队合作 150 天完成土方量 120 万立方, 甲队施工 110 天、乙队施工 150 天完成土方量 103.2 万立方”, 即可得出关于 x 、 y 的二元一次方程组, 解之即可得出结论;

(2) 设乙队平均每天的施工土方量比原来提高 a 万立方才能保证按时完成任务, 根据完成工作的总量=甲队完成的土方量+乙队完成的土方量, 即可得出关于 a 的一元一次不等式, 解之取其中的最小值即可得出结论.

【解答】 解: (1) 设甲队原计划平均每天的施工土方量为 x 万立方, 乙队原计划平均每天的施工土方量为 y 万立方,

根据题意得:
$$\begin{cases} 150(x+y)=120 \\ 110x+(40+110)y=103.2 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x=0.42 \\ y=0.38 \end{cases}$$

答: 甲队原计划平均每天的施工土方量为 0.42 万立方, 乙队原计划平均每天的施工土方量为 0.38 万立方.

(2) 设乙队平均每天的施工土方量比原来提高 a 万立方才能保证按时完成任务,

根据题意得: $110 \times 0.42 + (40+110) \times (0.38+a) \geq 120$,

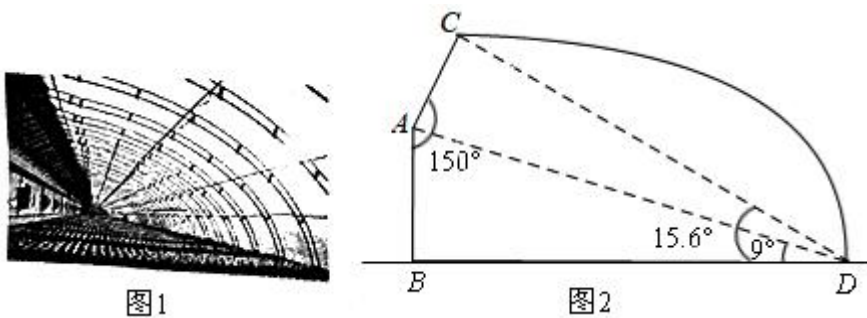
解得: $a \geq 0.112$.

答: 乙队平均每天的施工土方量至少要比原来提高 0.112 万立方才能保证按时完成任务.

【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用以及一元一次不等式的应用，解题的关键是：(1) 找准等量关系，正确列出二元一次方程组；(2) 根据各数量之间的关系，找出关于 a 的一元一次不等式.

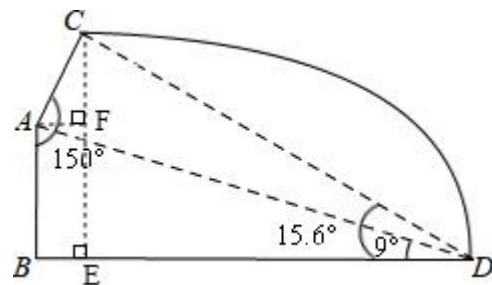
22. (8分) 随着我市农产品整体品牌形象“聊·胜一筹!”的推出，现代农业得到了更快发展. 某农场为扩大生产建设了一批新型钢管装配式大棚，如图1. 线段 AB , BD 分别表示大棚的墙高和跨度， AC 表示保温板的长. 已知墙高 AB 为 2 米，墙面与保温板所成的角 $\angle BAC = 150^\circ$ ，在点 D 处测得 A 点、 C 点的仰角分别为 9° ， 15.6° ，如图2. 求保温板 AC 的长是多少米？(精确到 0.1 米)

(参考数据: $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.86$, $\sin 9^\circ \approx 0.16$, $\cos 9^\circ \approx 0.99$, $\tan 9^\circ \approx 0.16$, $\sin 15.6^\circ \approx 0.27$, $\cos 15.6^\circ \approx 0.96$, $\tan 15.6^\circ \approx 0.28$)



【分析】 作 $CE \perp BD$ 、 $AF \perp CE$ ，设 $AF = x$ ，可得 $AC = 2x$ 、 $CF = \sqrt{3}x$ ，在 $Rt\triangle ABD$ 中由 $AB = EF = 2$ 知 $BD = \frac{2}{\tan 9^\circ}$ ， $DE = BD - BE = \frac{2}{\tan 9^\circ} - x$ ， $CE = EF + CF = 2 + \sqrt{3}x$ ，根据 $\tan \angle CDE = \frac{CE}{DE}$ 列出关于 x 的方程，解之可得.

【解答】 解：如图所示，过点 C 作 $CE \perp BD$ 于点 E ，过点 A 作 $AF \perp CE$ 于点 F ，



则四边形 $ABEF$ 是矩形，

$\therefore AB = EF$ 、 $AF = BE$ ，

设 $AF = x$ ，

$\because \angle BAC = 150^\circ$ 、 $\angle BAF = 90^\circ$ ，

$$\therefore \angle CAF = 60^\circ,$$

$$\text{则 } AC = \frac{AF}{\cos \angle CAF} = 2x, \quad CF = AF \tan \angle CAF = \sqrt{3}x,$$

$$\text{在 Rt} \triangle ABD \text{ 中, } \because AB = EF = 2, \quad \angle ADB = 9^\circ,$$

$$\therefore BD = \frac{AB}{\tan \angle ADB} = \frac{2}{\tan 9^\circ},$$

$$\text{则 } DE = BD - BE = \frac{2}{\tan 9^\circ} - x, \quad CE = EF + CF = 2 + \sqrt{3}x,$$

$$\text{在 Rt} \triangle CDE \text{ 中, } \therefore \tan \angle CDE = \frac{CE}{DE},$$

$$\therefore \tan 15.6^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}x}{\frac{2}{\tan 9^\circ} - x},$$

$$\text{解得: } x \approx 0.7,$$

即保温板 AC 的长是 0.7 米.

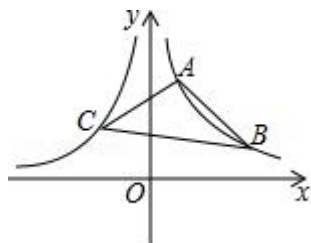
【点评】 本题主要考查解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题, 解题的关键是理解题意, 构建直角三角形, 并熟练掌握三角函数的应用.

23. (8 分) 如图, 已知反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ ($x < 0$) 的图象关于 y 轴对称, A (1, 4), B (4, m) 是函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 图象上的两点, 连接 AB, 点 C (-2, n) 是函数 $y = \frac{k_2}{x}$ ($x < 0$) 图象上的一点, 连接 AC, BC.

(1) 求 m, n 的值;

(2) 求 AB 所在直线的表达式;

(3) 求 $\triangle ABC$ 的面积.



【分析】 (1) 先由点 A 确定 k, 再求 m 的值, 根据关于 y 轴对称, 确定 k₂ 再求 n;

(2) 先设出函数表达式, 再代入 A、B 两点, 得直线 AB 的表达式;

(3) 过点 A、B 作 x 轴的平行线, 过点 C、B 作 y 轴的平行线构造矩形, $\triangle ABC$ 的面积 = 矩形面积 - 3 个直角三角形的面积.

【解答】解：（1）因为点 A、点 B 在反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，

$$\therefore k_1 = 1 \times 4 = 4,$$

$$\therefore m \times 4 = k_1 = 4,$$

$$\therefore m = 1$$

$\therefore$ 反比例函数 $y = \frac{k_1}{x}$ ($x > 0$) 的图象与反比例函数 $y = \frac{k_2}{x}$ ($x < 0$) 的图象关于 y 轴对称.

$$\therefore k_2 = -k_1 = -4$$

$$\therefore -2 \times n = -4,$$

$$\therefore n = 2$$

（2）设直线 AB 所在的直线表达式为 $y = kx + b$

把 A (1, 4), B (4, 1) 代入，得 $\begin{cases} 4 = k + b \\ 1 = 4k + b \end{cases}$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -1 \\ b = 5 \end{cases}$$

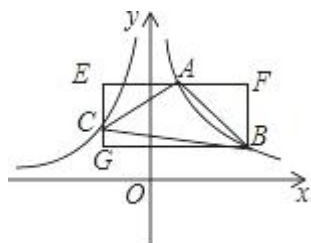
$\therefore$ AB 所在直线的表达式为： $y = -x + 5$

（3）如图所示：过点 A、B 作 x 轴的平行线，过点 C、B 作 y 轴的平行线，它们的交点分别是 E、F、B、G.

$\therefore$ 四边形 EFBG 是矩形.

则 $AF = 3$, $BF = 3$, $AE = 3$, $EC = 2$, $CG = 1$, $GB = 6$, $EG = 3$

$$\begin{aligned} \therefore S_{\triangle ABC} &= S_{\text{矩形 EFBG}} - S_{\triangle AFB} - S_{\triangle AEC} - S_{\triangle CBG} \\ &= BG \times EG - \frac{1}{2} AF \times FB - \frac{1}{2} AE \times EC - \frac{1}{2} BG \times CG \\ &= 18 - \frac{9}{2} - 3 - 3 \\ &= \frac{15}{2} \end{aligned}$$

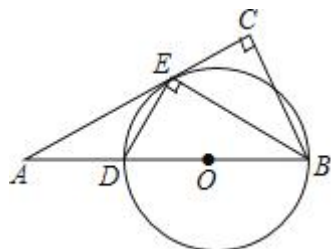


【点评】本题考查了反比例函数的图形及性质、待定系数法确定一次函数解析式及面积的和差关系. 题目具有综合性. 注意图形的面积可以用割补法也可以用规则的几何图形求和差.

24. (10 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, BE 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 E , 作 $ED \perp EB$ 交 AB 于点 D , $\odot O$ 是 $\triangle BED$ 的外接圆.

(1) 求证: AC 是 $\odot O$ 的切线;

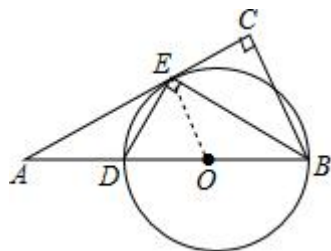
(2) 已知 $\odot O$ 的半径为 2.5, $BE=4$, 求 BC , AD 的长.



【分析】 (1) 连接 OE , 由 $OB=OE$ 知 $\angle OBE=\angle OEB$ 、由 BE 平分 $\angle ABC$ 知 $\angle OBE=\angle CBE$, 据此得 $\angle OEB=\angle CBE$, 从而得出 $OE \parallel BC$, 进一步即可得证;

(2) 证 $\triangle BDE \sim \triangle BEC$ 得 $\frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BC}$, 据此可求得 BC 的长度, 再证 $\triangle AOE \sim \triangle ABC$ 得 $\frac{AO}{AB} = \frac{OE}{BC}$, 据此可得 AD 的长.

【解答】 解: (1) 如图, 连接 OE ,



$$\because OB=OE,$$

$$\therefore \angle OBE=\angle OEB,$$

$$\because BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle OBE=\angle CBE,$$

$$\therefore \angle OEB=\angle CBE,$$

$$\therefore OE \parallel BC,$$

$$\text{又 } \because \angle C=90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEO=90^\circ, \text{ 即 } OE \perp AC,$$

$$\therefore AC \text{ 为 } \odot O \text{ 的切线};$$

$$(2) \because ED \perp BE,$$

$$\therefore \angle BED=\angle C=90^\circ,$$

又 $\because \angle DBE = \angle EBC$,

$\therefore \triangle BDE \sim \triangle BEC$,

$$\therefore \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BC}, \text{ 即 } \frac{5}{4} = \frac{4}{BC},$$

$$\therefore BC = \frac{16}{5};$$

$\because \angle AEO = \angle C = 90^\circ, \angle A = \angle A$,

$\therefore \triangle AOE \sim \triangle ABC$,

$$\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{OE}{BC}, \text{ 即 } \frac{AD+2.5}{AD+5} = \frac{2.5}{\frac{16}{5}},$$

$$\text{解得: } AD = \frac{45}{7}.$$

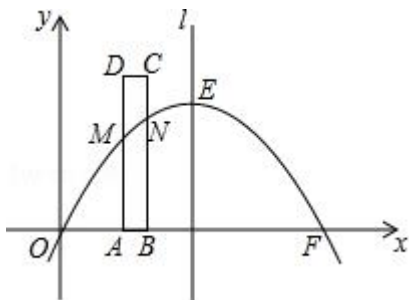
【点评】 本题主要考查切线的判定与性质，解题的关键是掌握切线的判定与性质及相似三角形的判定与性质.

25. (12分) 如图，已知抛物线 $y = ax^2 + bx$ 与 x 轴分别交于原点 O 和点 $F(10, 0)$ ，与对称轴 l 交于点 $E(5, 5)$. 矩形 $ABCD$ 的边 AB 在 x 轴正半轴上，且 $AB=1$ ，边 AD, BC 与抛物线分别交于点 M, N . 当矩形 $ABCD$ 沿 x 轴正方向平移，点 M, N 位于对称轴 l 的同侧时，连接 MN ，此时，四边形 $ABNM$ 的面积记为 S ；点 M, N 位于对称轴 l 的两侧时，连接 EM, EN ，此时五边形 $ABNEM$ 的面积记为 S . 将点 A 与点 O 重合的位置作为矩形 $ABCD$ 平移的起点，设矩形 $ABCD$ 平移的长度为 t ($0 \leq t \leq 5$)

(1) 求出这条抛物线的表达式；

(2) 当 $t=0$ 时，求 $S_{\triangle OBN}$ 的值；

(3) 当矩形 $ABCD$ 沿着 x 轴的正方向平移时，求 S 关于 t ($0 < t \leq 5$) 的函数表达式，并求出 t 为何值时 S 有最大值，最大值是多少？



【分析】 (1) 根据点 E, F 的坐标，利用待定系数法即可求出抛物线的表达式；

(2) 找出当 $t=0$ 时, 点 B、N 的坐标, 进而可得出 OB、BN 的长度, 再根据三角形的面积公式可求出 $S_{\triangle OBN}$ 的值;

(3) 分 $0 < t \leq 4$ 和 $4 < t \leq 5$ 两种情况考虑: ①当 $0 < t \leq 4$ 时 (图 1), 找出点 A、B、M、N 的坐标, 进而可得出 AM、BN 的长度, 利用梯形的面积公式即可找出 S 关于 t 的函数关系式, 再利用二次函数的性质即可求出 S 的最大值; ②当 $4 < t \leq 5$ 时, 找出点 A、B、M、N 的坐标, 进而可得出 AM、BN 的长度, 将五边形分成两个梯形, 利用梯形的面积公式即可找出 S 关于 t 的函数关系式, 再利用二次函数的性质即可求出 S 的最大值. 将①②中的 S 的最大值进行比较, 即可得出结论.

【解答】 解: (1) 将 E (5, 5)、F (10, 0) 代入 $y=ax^2+bx$,

$$\begin{cases} 25a+5b=5 \\ 100a+10b=0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} a=-\frac{1}{5}, \\ b=2 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{5}x^2+2x$.

(2) 当 $t=0$ 时, 点 B 的坐标为 (1, 0), 点 N 的坐标为 $(1, \frac{9}{5})$,

$$\therefore BN=\frac{9}{5}, OB=1,$$

$$\therefore S_{\triangle OBN}=\frac{1}{2}BN \cdot OB=\frac{9}{10}.$$

(3) ①当 $0 < t \leq 4$ 时 (图 1), 点 A 的坐标为 (t, 0), 点 B 的坐标为 (t+1, 0),

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(t, -\frac{1}{5}t^2+2t)$, 点 N 的坐标为 $(t+1, -\frac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1))$,

$$\therefore AM=-\frac{1}{5}t^2+2t, BN=-\frac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1),$$

$$\therefore S=\frac{1}{2}(AM+BN) \cdot AB=\frac{1}{2} \times 1 \times [-\frac{1}{5}t^2+2t - \frac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1)],$$

$$=-\frac{1}{5}t^2+\frac{9}{5}t+\frac{9}{10},$$

$$=-\frac{1}{5}(t-\frac{9}{2})^2+\frac{99}{20},$$

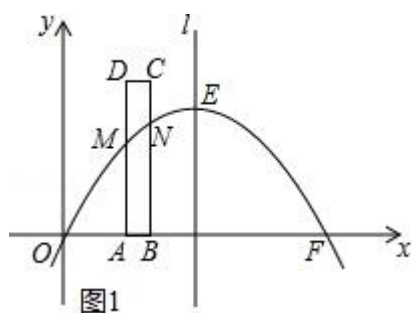
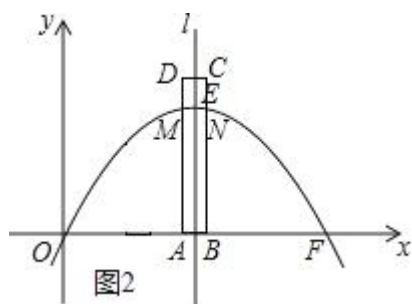
$$\because -\frac{1}{5} < 0,$$

$\therefore$ 当 $t=4$ 时, S 取最大值, 最大值为 $\frac{49}{10}$;

②当 $4 < t \leq 5$ 时 (图 2), 点 A 的坐标为 (t, 0), 点 B 的坐标为 (t+1, 0),

$\therefore$ 点 M 的坐标为 $(t, -\frac{1}{5}t^2+2t)$, 点 N 的坐标为 $(t+1, -\frac{1}{5}(t+1)^2+2(t+1))$,

$$\begin{aligned}
\therefore AM &= -\frac{1}{5}t^2 + 2t, \quad BN = -\frac{1}{5}(t+1)^2 + 2(t+1), \\
\therefore S &= \frac{1}{2}(5-t)\left(-\frac{1}{5}t^2 + 2t + 5\right) + \frac{1}{2}(t-4)\left[5 - \frac{1}{5}(t+1)^2 + 2(t+1)\right], \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}t^3 - 3t^2 + 5t + 25\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}t^3 + \frac{12}{5}t^2 + \frac{2}{5}t - \frac{136}{5}\right), \\
&= -\frac{3}{10}t^2 + \frac{27}{10}t - \frac{11}{10}, \\
&= -\frac{3}{10}\left(t - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{199}{40}, \\
\therefore -\frac{3}{10} &< 0, \\
\therefore \text{当 } t &= \frac{9}{2} \text{ 时, } S \text{ 取最大值, 最大值为 } \frac{199}{40}. \\
\therefore \frac{49}{10} - \frac{196}{40} &< \frac{199}{40}, \\
\therefore \text{当 } t &= \frac{9}{2} \text{ 时, } S \text{ 有最大值, 最大值是 } \frac{199}{40}.
\end{aligned}$$



【点评】 本题考查了待定系数法求二次函数解析式、二次函数图象上点的坐标特征、二次函数的性质、梯形的面积以及三角形的面积，解题的关键是：(1) 根据点的坐标，利用待定系数法求出二次函数关系式；(2) 利用二次函数图象上点的坐标特征求出当 $t=0$ 时点 N 的坐标；(3) 分 $0 < t \leq 4$ 和 $4 < t \leq 5$ 两种情况找出 S 关于 t 的函数关系式。