

2018 年山东省烟台市中考数学试卷

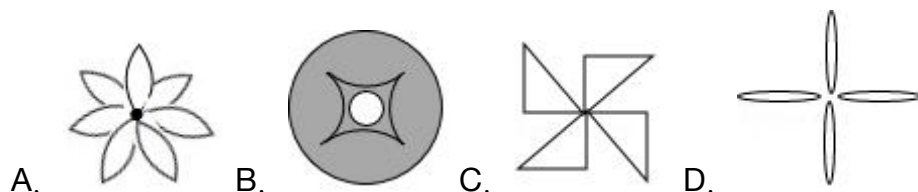
一、选择题 (本题共 12 个小题, 每小题 3 分, 满分 36 分) 每小题都给出标号为

A, B, C, D 四个备选答案, 其中有且只有一个是正确的。

1. (3.00 分) (2018•烟台) $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 ()

A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

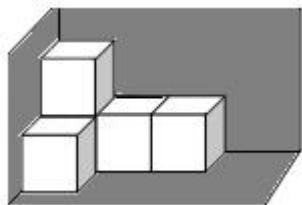
2. (3.00 分) (2018•烟台) 在学习《图形变化的简单应用》这一节时, 老师要求同学们利用图形变化设计图案. 下列设计的图案中, 是中心对称图形但不是轴对称图形的是 ()



3. (3.00 分) (2018•烟台) 2018 年政府工作报告指出, 过去五年来, 我国经济实力跃上新台阶. 国内生产总值从 54 万亿元增加到 82.7 万亿元, 稳居世界第二, 82.7 万亿用科学记数法表示为 ()

A. 0.827×10^{14} B. 82.7×10^{12} C. 8.27×10^{13} D. 8.27×10^{14}

4. (3.00 分) (2018•烟台) 由 5 个棱长为 1 的小正方体组成的几何体如图放置, 一面着地, 两面靠墙. 如果要涂露出来的部分涂色, 则涂色部分的面积为 ()



A. 9 B. 11 C. 14 D. 18

5. (3.00 分) (2018•烟台) 甲、乙、丙、丁 4 支仪仗队队员身高的平均数及方差如下表所示:

	甲	乙	丙	丁
平均数 (cm)	177	178	178	179
方差	0.9	1.6	1.1	0.6

哪支仪仗队的身高更为整齐？ ()

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

6. (3.00 分) (2018•烟台) 下列说法正确的是 ()

A. 367 人中至少有 2 人生日相同

B. 任意掷一枚均匀的骰子，掷出的点数是偶数的概率是 $\frac{1}{3}$

C. 天气预报说明天的降水概率为 90%，则明天一定会下雨

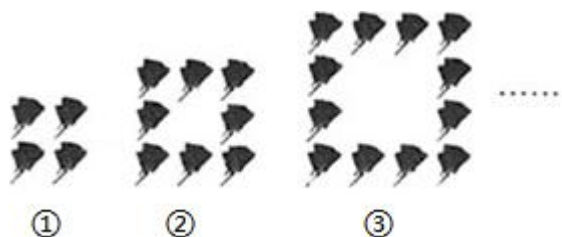
D. 某种彩票中奖的概率是 1%，则买 100 张彩票一定有 1 张中奖

7. (3.00 分) (2018•烟台) 利用计算器求值时，小明将按键顺序为

显示结果记为 a ,
 的显示结果记为 b. 则 a, b 的大小关系为 ()

A. $a < b$ B. $a > b$ C. $a = b$ D. 不能比较

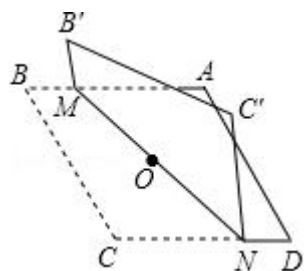
8. (3.00 分) (2018•烟台) 如图所示，下列图形都是由相同的玫瑰花按照一定的规律摆成的，按此规律摆下去，第 n 个图形中有 120 朵玫瑰花，则 n 的值为 ()



A. 28 B. 29 C. 30 D. 31

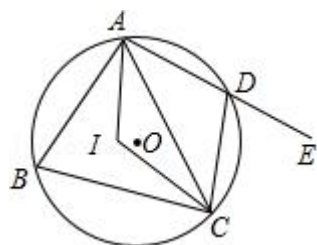
9. (3.00 分) (2018•烟台) 对角线长分别为 6 和 8 的菱形 ABCD 如图所示，点 O 为对角线的交点，过点 O 折叠菱形，使 B, B' 两点重合，MN 是折痕. 若 B'M=1,

则 CN 的长为 ()



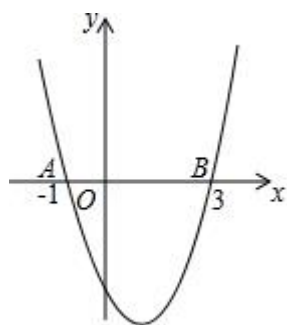
- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

10. (3.00 分) (2018•烟台) 如图, 四边形 ABCD 内接于 $\odot O$, 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\angle AIC = 124^\circ$, 点 E 在 AD 的延长线上, 则 $\angle CDE$ 的度数为 ()



- A. 56° B. 62° C. 68° D. 78°

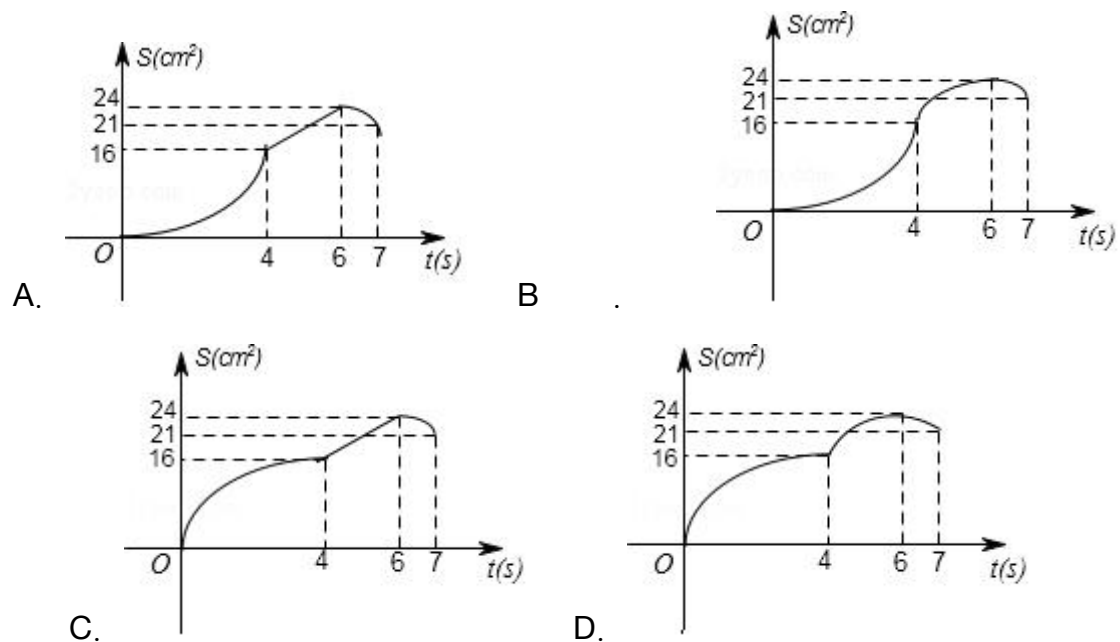
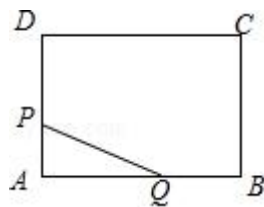
11. (3.00 分) (2018•烟台) 如图, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于点 A (-1, 0), B (3, 0). 下列结论: ① $2a - b = 0$; ② $(a+c)^2 < b^2$; ③当 $-1 < x < 3$ 时, $y < 0$; ④当 $a = 1$ 时, 将抛物线先向上平移 2 个单位, 再向右平移 1 个单位, 得到抛物线 $y = (x - 2)^2 - 2$. 其中正确的是 ()



- A. ①③ B. ②③ C. ②④ D. ③④

12. (3.00 分) (2018•烟台) 如图, 矩形 ABCD 中, $AB = 8\text{cm}$, $BC = 6\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发, 以 1cm/s 的速度沿 $A \rightarrow D \rightarrow C$ 方向匀速运动, 同时点 Q 从点 A 出发,

以 2cm/s 的速度沿 $A \rightarrow B \rightarrow C$ 方向匀速运动, 当一个点到达点 C 时, 另一个点也随之停止. 设运动时间为 t (s), $\triangle APQ$ 的面积为 S (cm^2), 下列能大致反映 S 与 t 之间函数关系的图象是 ()

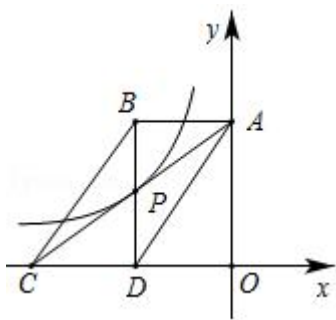


二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

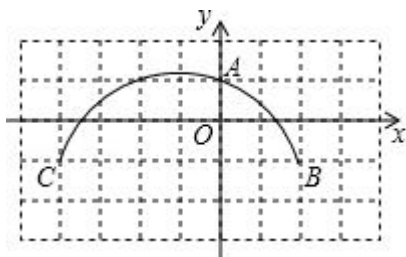
13. (3.00 分) (2018·烟台) $(\pi - 3.14)^0 + \tan 60^\circ =$ _____.

14. (3.00 分) (2018·烟台) $\sqrt{12}$ 与最简二次根式 $5\sqrt{a+1}$ 是同类二次根式, 则 $a =$ _____.

15. (3.00 分) (2018·烟台) 如图, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过 $\square ABCD$ 对角线的交点 P , 已知点 A, C, D 在坐标轴上, $BD \perp DC$, $\square ABCD$ 的面积为 6, 则 $k =$ _____.

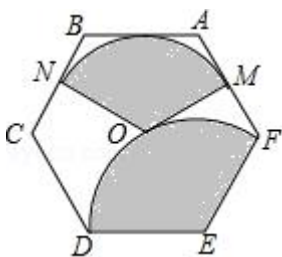


16. (3.00 分) (2018•烟台) 如图，方格纸上每个小正方形的边长均为 1 个单位长度，点 O, A, B, C 在格点（两条网格线的交点叫格点）上，以点 O 为原点建立直角坐标系，则过 A, B, C 三点的圆的圆心坐标为_____.



17. (3.00 分) (2018•烟台) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ 的实数根 x_1, x_2 ，满足 $3x_1x_2 - x_1 - x_2 > 2$ ，则 m 的取值范围是_____.

18. (3.00 分) (2018•烟台) 如图，点 O 为正六边形 ABCDEF 的中心，点 M 为 AF 中点，以点 O 为圆心，以 OM 的长为半径画弧得到扇形 MON，点 N 在 BC 上；以点 E 为圆心，以 DE 的长为半径画弧得到扇形 DEF，把扇形 MON 的两条半径 OM, ON 重合，围成圆锥，将此圆锥的底面半径记为 r_1 ；将扇形 DEF 以同样方法围成的圆锥的底面半径记为 r_2 ，则 $r_1 : r_2 =$ _____.

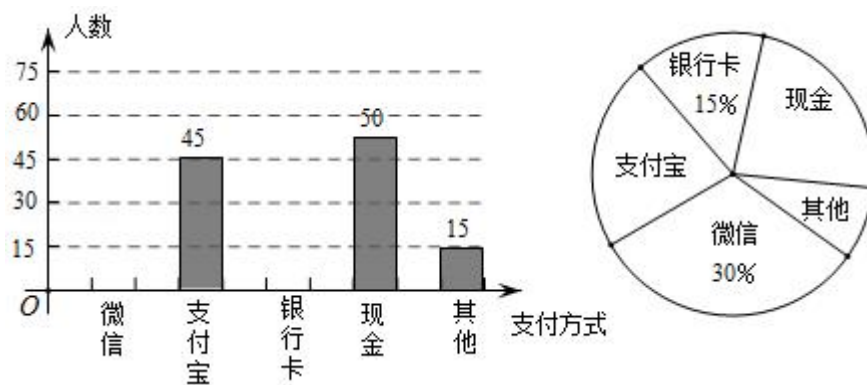


三、解答题 (本大题共 7 个小题,满分 66 分)

19. (6.00 分) (2018•烟台) 先化简, 再求值: $(1+\frac{x^2+2}{x-2}) \div \frac{x+1}{x^2-4x+4}$, 其中 x 满足 $x^2-2x-5=0$.

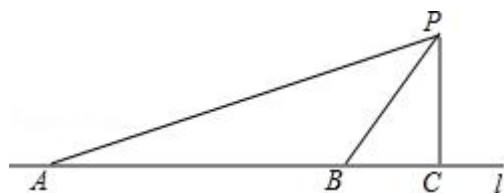
20. (8.00 分) (2018•烟台) 随着信息技术的迅猛发展, 人们去商场购物的支付方式更加多样、便捷. 某校数学兴趣小组设计了一份调查问卷, 要求每人选且只选一种你最喜欢的支付方式. 现将调查结果进行统计并绘制成如下两幅不完整的统计图, 请结合图中所给的信息解答下列问题:

- (1) 这次活动共调查了_____人; 在扇形统计图中, 表示“支付宝”支付的扇形圆心角的度数为_____;
- (2) 将条形统计图补充完整. 观察此图, 支付方式的“众数”是“_____”;
- (3) 在一次购物中, 小明和小亮都想从“微信”、“支付宝”、“银行卡”三种支付方式中选一种方式进行支付, 请用画树状图或列表格的方法, 求出两人恰好选择同一种支付方式的概率.



21. (8.00 分) (2018•烟台) 汽车超速行驶是交通安全的重大隐患, 为了有效降低交通事故的发生, 许多道路在事故易发路段设置了区间测速如图, 学校附近有一条笔直的公路 l , 其间设有区间测速, 所有车辆限速 40 千米/小时数学实践活动小组设计了如下活动: 在 l 上确定 A, B 两点, 并在 AB 路段进行区间测速. 在 l 外取一点 P , 作 $PC \perp l$, 垂足为点 C . 测得 $PC=30$ 米, $\angle APC=71^\circ$, $\angle BPC=35^\circ$. 上

午 9 时测得一汽车从点 A 到点 B 用时 6 秒，请你用所学的数学知识说明该车是否超速. (参考数据: $\sin 35^\circ \approx 0.57$, $\cos 35^\circ \approx 0.82$, $\tan 35^\circ \approx 0.70$, $\sin 71^\circ \approx 0.95$, $\cos 71^\circ \approx 0.33$, $\tan 71^\circ \approx 2.90$)



22. (9.00 分) (2018•烟台) 为提高市民的环保意识，倡导“节能减排，绿色出行”，某市计划在城区投放一批“共享单车”这批单车分为 A，B 两种不同款型，其中 A 型车单价 400 元，B 型车单价 320 元.

(1) 今年年初，“共享单车”试点投放在某市中心城区正式启动. 投放 A，B 两种款型的单车共 100 辆，总价值 36800 元. 试问本次试点投放的 A 型车与 B 型车各多少辆?

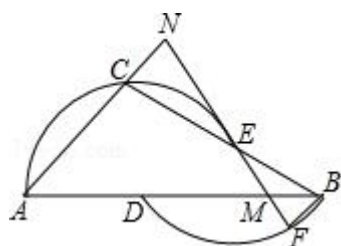
(2) 试点投放活动得到了广大市民的认可，该市决定将此项公益活动在整个城区全面铺开. 按照试点投放中 A，B 两车型的数量比进行投放，且投资总价值不低于 184 万元. 请问城区 10 万人口平均每 100 人至少享有 A 型车与 B 型车各多少辆?

23. (10.00 分) (2018•烟台) 如图，已知 D，E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB，BC 上两点，点 A，C，E 在 $\odot D$ 上，点 B，D 在 $\odot E$ 上. F 为 $\widehat{BD}$ 上一点，连接 FE 并延长交 AC 的延长线于点 N，交 AB 于点 M.

(1) 若 $\angle EBD$ 为 α ，请将 $\angle CAD$ 用含 α 的代数式表示；

(2) 若 $EM=MB$ ，请说明当 $\angle CAD$ 为多少度时，直线 EF 为 $\odot D$ 的切线；

(3) 在 (2) 的条件下，若 $AD=\sqrt{3}$ ，求 $\frac{MN}{MF}$ 的值.



24. (11.00 分) (2018•烟台) 【问题解决】

一节数学课上，老师提出了这样一个问题：如图 1，点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点， $PA=1$ ， $PB=2$ ， $PC=3$ ．你能求出 $\angle APB$ 的度数吗？

小明通过观察、分析、思考，形成了如下思路：

思路一：将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle BP'A$ ，连接 PP' ，求出 $\angle APB$ 的度数；

思路二：将 $\triangle APB$ 绕点 B 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle CP'B$ ，连接 PP' ，求出 $\angle APB$ 的度数．

请参考小明的思路，任选一种写出完整的解答过程．

【类比探究】

如图 2，若点 P 是正方形 $ABCD$ 外一点， $PA=3$ ， $PB=1$ ， $PC=\sqrt{17}$ ，求 $\angle APB$ 的度数．

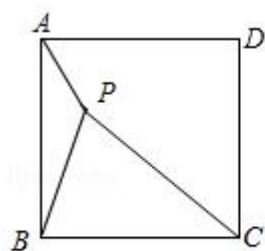


图1

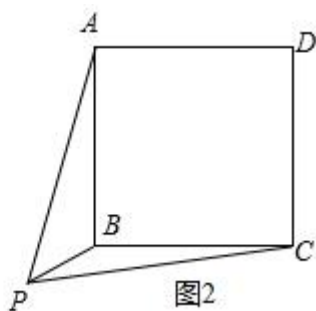


图2

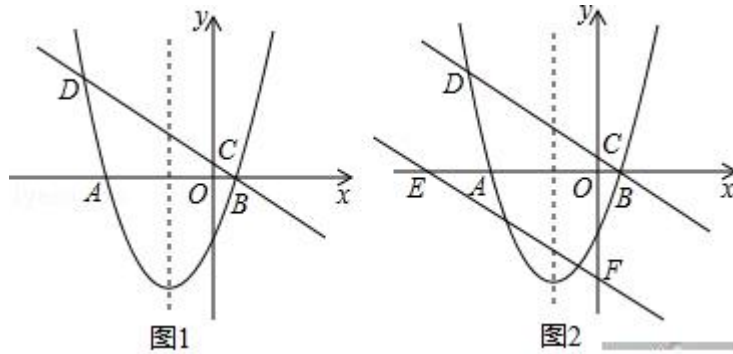
25. (14.00 分) (2018•烟台) 如图 1，抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 与 x 轴交于 $A(-4, 0)$ ， $B(1, 0)$ 两点，过点 B 的直线 $y=kx+\frac{2}{3}$ 分别与 y 轴及抛物线交于点 C ， D ．

(1) 求直线和抛物线的表达式；

(2) 动点 P 从点 O 出发，在 x 轴的负半轴上以每秒 1 个单位长度的速度向左匀速运动，设运动时间为 t 秒，当 t 为何值时， $\triangle PDC$ 为直角三角形？请直接写出

所有满足条件的 t 的值；

(3) 如图 2, 将直线 BD 沿 y 轴向下平移 4 个单位后, 与 x 轴, y 轴分别交于 E , F 两点, 在抛物线的对称轴上是否存在点 M , 在直线 EF 上是否存在点 N , 使 $DM+MN$ 的值最小? 若存在, 求出其最小值及点 M , N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2018 年山东省烟台市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (本题共 12 个小题, 每小题 3 分, 满分 36 分) 每小题都给出标号为

A, B, C, D 四个备选答案, 其中有且只有一个是正确的。

1. (3.00 分) (2018•烟台) $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 ()

A. 3 B. -3 C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

【考点】17: 倒数.

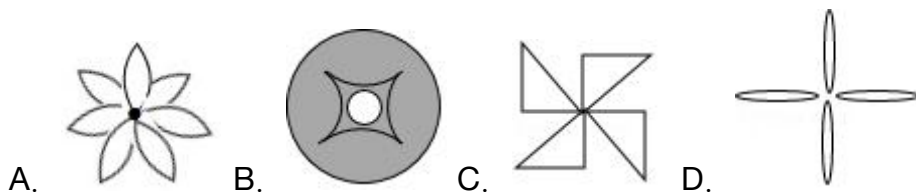
【分析】根据乘积为 1 的两个数互为倒数, 可得一个数的倒数.

【解答】解: $-\frac{1}{3}$ 的倒数是 -3,

故选: B.

【点评】本题考查了倒数, 分子分母交换位置是求一个数的倒数的关键.

2. (3.00 分) (2018•烟台) 在学习《图形变化的简单应用》这一节时, 老师要求同学们利用图形变化设计图案. 下列设计的图案中, 是中心对称图形但不是轴对称图形的是 ()



【考点】P3: 轴对称图形; R5: 中心对称图形.

【专题】1 : 常规题型.

【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解: A、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故此选项错误;

B、是轴对称图形, 也是中心对称图形, 故此选项错误;

C、不是轴对称图形，是中心对称图形，故此选项正确；

D、是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项错误.

故选：C.

【点评】 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合.

3. (3.00 分) (2018•烟台) 2018 年政府工作报告指出，过去五年来，我国经济实力跃上新台阶. 国内生产总值从 54 万亿元增加到 82.7 万亿元，稳居世界第二，82.7 万亿用科学记数法表示为 ()

A. 0.827×10^{14} B. 82.7×10^{12} C. 8.27×10^{13} D. 8.27×10^{14}

【考点】 11: 科学记数法—表示较大的数.

【专题】 1 : 常规题型.

【分析】 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

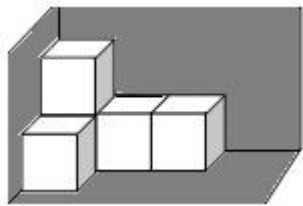
【解答】 解：82.7 万亿 $= 8.27 \times 10^{13}$,

故选：C.

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (3.00 分) (2018•烟台) 由 5 个棱长为 1 的小正方体组成的几何体如图放置，

一面着地，两面靠墙. 如果要露出来的部分涂色，则涂色部分的面积为（ ）



A. 9 B. 11 C. 14 D. 18

【考点】I1：认识立体图形；I4：几何体的表面积.

【专题】1：常规题型；55：几何图形.

【分析】由涂色部分面积是从上、前、右三个方向所涂面积相加，据此可得.

【解答】解：由图可知涂色部分是从上、前、右三个方向所涂面积相加，即涂色部分面积为 $4+4+3=11$,

故选：B.

【点评】本题主要考查几何体的表面积，解题的关键是掌握涂色部分是从上、前、右三个方向所涂面积相加的结果.

5. (3.00 分) (2018•烟台) 甲、乙、丙、丁 4 支仪仗队队员身高的平均数及方差如下表所示:

	甲	乙	丙	丁
平均数 (cm)	177	178	178	179
方差	0.9	1.6	1.1	0.6

哪支仪仗队的身高更为整齐? ()

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【考点】W1：算术平均数；W7：方差.

【专题】1：常规题型；542：统计的应用.

【分析】方差小的比较整齐，据此可得.

【解答】解：∵甲、乙、丙、丁 4 支仪仗队队员身高的方差中丁的方差最小，

∴丁仪仗队的身高更为整齐，

故选：D.

【点评】 本题考查了方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定.

6. (3.00 分) (2018•烟台) 下列说法正确的是 ()

A. 367 人中至少有 2 人生日相同

B. 任意掷一枚均匀的骰子，掷出的点数是偶数的概率是 $\frac{1}{3}$

C. 天气预报说明天的降水概率为 90%，则明天一定会下雨

D. 某种彩票中奖的概率是 1%，则买 100 张彩票一定有 1 张中奖

【考点】 X3: 概率的意义.

【专题】 54: 统计与概率.

【分析】 利用概率的意义和必然事件的概念的概念进行分析.

【解答】 解：A、367 人中至少有 2 人生日相同，正确；

B、任意掷一枚均匀的骰子，掷出的点数是偶数的概率是 $\frac{1}{2}$ ，错误；

C、天气预报说明天的降水概率为 90%，则明天不一定会下雨，错误；

D、某种彩票中奖的概率是 1%，则买 100 张彩票不一定有 1 张中奖，错误；

故选：A.

【点评】 此题主要考查了概率的意义，解决的关键是理解概率的意义以及必然事件的概念.

7. (3.00 分) (2018•烟台) 利用计算器求值时，小明将按键顺序为

 显示结果记为 a ,
 的显示结果记为 b . 则 a, b 的大小关系为 ()

A. $a < b$ B. $a > b$ C. $a = b$ D. 不能比较

【考点】1M: 计算器—基础知识.

【专题】1 : 常规题型; 511: 实数.

【分析】由计算器的使用得出 a, b 的值即可.

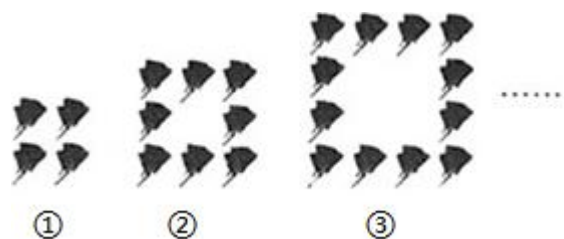
【解答】解: 由计算器知 $a = (\sin 30^\circ)^{-4} = 16$ 、 $b = \frac{6^2}{3} = 12$,

$\therefore a > b$,

故选: B.

【点评】本题主要考查计算器—基础知识, 解题的关键是掌握计算器的使用.

8. (3.00 分) (2018•烟台) 如图所示, 下列图形都是由相同的玫瑰花按照一定的规律摆成的, 按此规律摆下去, 第 n 个图形中有 120 朵玫瑰花, 则 n 的值为 ()



A. 28 B. 29 C. 30 D. 31

【考点】38: 规律型: 图形的变化类.

【专题】2A : 规律型.

【分析】根据题目中的图形变化规律, 可以求得第 n 个图形中玫瑰花的数量, 然后令玫瑰花的数量为 120, 即可求得相应的 n 的值, 从而可以解答本题.

【解答】解: 由图可得,

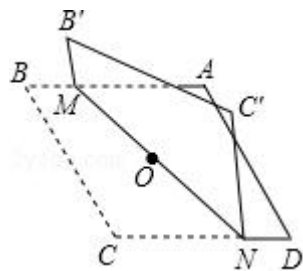
第 n 个图形有玫瑰花: $4n$,

令 $4n=120$, 得 $n=30$,

故选: C.

【点评】 本题考查图形的变化类, 解答本题的关键是明确题意, 找出题目中图形的变化规律.

9. (3.00 分) (2018•烟台) 对角线长分别为 6 和 8 的菱形 ABCD 如图所示, 点 O 为对角线的交点, 过点 O 折叠菱形, 使 B, B' 两点重合, MN 是折痕. 若 B'M=1, 则 CN 的长为 ()



A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

【考点】 L8: 菱形的性质; PB: 翻折变换 (折叠问题).

【专题】 11 : 计算题.

【分析】 连接 AC、BD, 如图, 利用菱形的性质得 $OC=\frac{1}{2}AC=3$, $OD=\frac{1}{2}BD=4$, $\angle COD=90^\circ$, 再利用勾股定理计算出 $CD=5$, 接着证明 $\triangle OBM \cong \triangle ODN$ 得到 $DN=BM$, 然后根据折叠的性质得 $BM=B'M=1$, 从而有 $DN=1$, 于是计算 $CD-DN$ 即可.

【解答】 解: 连接 AC、BD, 如图,

$\because$ 点 O 为菱形 ABCD 的对角线的交点,

$\therefore OC=\frac{1}{2}AC=3$, $OD=\frac{1}{2}BD=4$, $\angle COD=90^\circ$,

在 $\text{Rt}\triangle COD$ 中, $CD=\sqrt{3^2+4^2}=5$,

$\therefore AB\parallel CD$,

$\therefore \angle MBO=\angle NDO$,

在 $\triangle OBM$ 和 $\triangle ODN$ 中

$$\begin{cases} \angle MBO = \angle NDO \\ OB = OD \\ \angle BOM = \angle DON \end{cases},$$

$\therefore \triangle OBM \cong \triangle ODN$,

$\therefore DN=BM$,

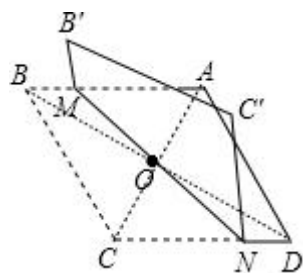
$\therefore$ 过点 O 折叠菱形, 使 B, B' 两点重合, MN 是折痕,

$\therefore BM=B'M=1$,

$\therefore DN=1$,

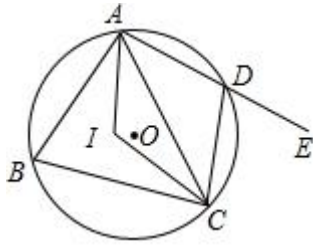
$\therefore CN=CD-DN=5-1=4$.

故选: D.



【点评】 本题考查了折叠的性质: 折叠是一种对称变换, 它属于轴对称, 折叠前后图形的形状和大小不变, 位置变化, 对应边和对应角相等. 也考查了菱形的性质.

10. (3.00 分) (2018•烟台) 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\angle AIC=124^\circ$, 点 E 在 AD 的延长线上, 则 $\angle CDE$ 的度数为 ()



A. 56° B. 62° C. 68° D. 78°

【考点】MI：三角形的内切圆与内心.

【专题】1：常规题型；55A：与圆有关的位置关系.

【分析】由点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心知 $\angle BAC = 2\angle IAC$ 、 $\angle ACB = 2\angle ICA$ ，从而求得 $\angle B = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB) = 180^\circ - 2(180^\circ - \angle AIC)$ ，再利用圆内接四边形的外角等于内对角可得答案.

【解答】解： $\because$ 点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，

$$\therefore \angle BAC = 2\angle IAC, \angle ACB = 2\angle ICA,$$

$$\therefore \angle AIC = 124^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ACB)$$

$$= 180^\circ - 2(\angle IAC + \angle ICA)$$

$$= 180^\circ - 2(180^\circ - \angle AIC)$$

$$= 68^\circ,$$

又四边形 ABCD 内接于 $\odot O$,

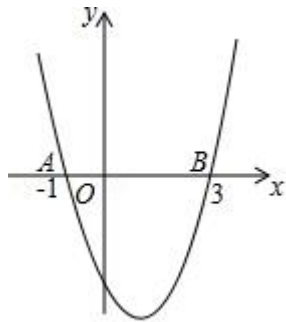
$$\therefore \angle CDE = \angle B = 68^\circ,$$

故选：C.

【点评】本题主要考查三角形的内切圆与内心，解题的关键是掌握三角形的内心的性质及圆内接四边形的性质.

11. (3.00 分) (2018•烟台) 如图，二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象与 x 轴交于点

A (-1, 0), B (3, 0). 下列结论: ① $2a - b = 0$; ② $(a+c)^2 < b^2$; ③ 当 $-1 < x < 3$ 时, $y < 0$; ④ 当 $a=1$ 时, 将抛物线先向上平移 2 个单位, 再向右平移 1 个单位, 得到抛物线 $y = (x-2)^2 - 2$. 其中正确的是 ()



- A. ①③ B. ②③ C. ②④ D. ③④

【考点】 H4: 二次函数图象与系数的关系; H6: 二次函数图象与几何变换; HA: 抛物线与 x 轴的交点.

【专题】 15 : 综合题; 31 : 数形结合.

【分析】 根据二次函数图象与系数之间的关系即可求出答案.

【解答】 解: ① 图象与 x 轴交于点 A (-1, 0), B (3, 0),

$$\therefore \text{二次函数的图象的对称轴为 } x = \frac{-1+3}{2} = 1$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 1$$

$\therefore 2a+b=0$, 故①错误;

② 令 $x = -1$,

$$\therefore y = a - b + c = 0,$$

$$\therefore a+c=b,$$

$\therefore (a+c)^2 = b^2$, 故②错误;

③ 由图可知: 当 $-1 < x < 3$ 时, $y < 0$, 故③正确;

④ 当 $a=1$ 时,

$$\therefore y = (x+1)(x-3) = (x-1)^2 - 4$$

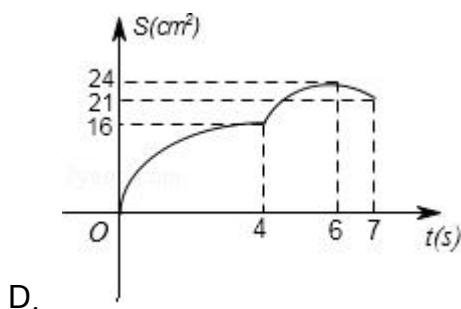
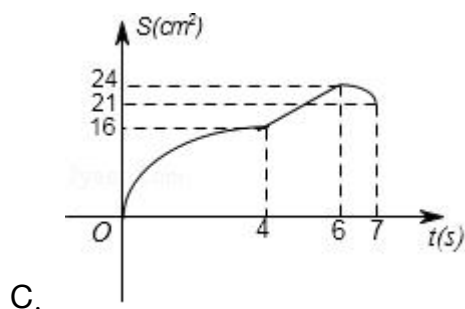
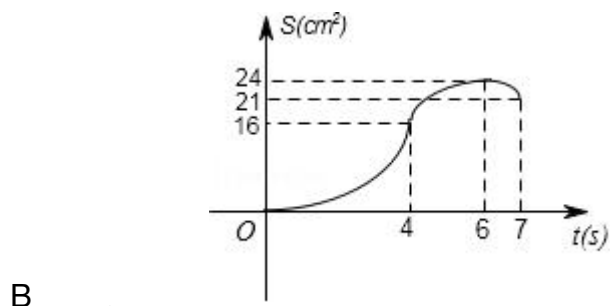
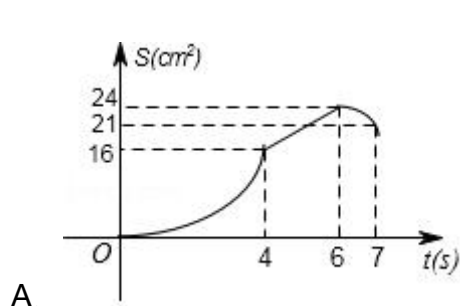
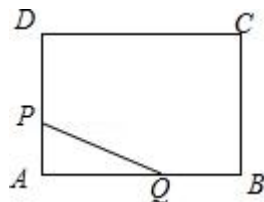
将抛物线先向上平移 2 个单位，再向右平移 1 个单位，

得到抛物线 $y = (x-1-1)^2 - 4 + 2 = (x-2)^2 - 2$ ，故④正确；

故选：D.

【点评】 本题考查二次函数图象的性质，解题的关键是熟知二次函数的图象与系数之间的关系，本题属于中等题型.

12. (3.00 分) (2018•烟台) 如图，矩形 ABCD 中，AB=8cm，BC=6cm，点 P 从点 A 出发，以 1cm/s 的速度沿 A→D→C 方向匀速运动，同时点 Q 从点 A 出发，以 2cm/s 的速度沿 A→B→C 方向匀速运动，当一个点到达点 C 时，另一个点也随之停止. 设运动时间为 t (s)，△APQ 的面积为 S (cm²)，下列能大致反映 S 与 t 之间函数关系的图象是 ()



【考点】E7：动点问题的函数图象.

【专题】31：数形结合.

【分析】先根据动点 P 和 Q 的运动时间和速度表示：AP=t，AQ=2t，

①当 $0 \leq t \leq 4$ 时，Q 在边 AB 上，P 在边 AD 上，如图 1，计算 S 与 t 的关系式，发现是开口向上的抛物线，可知：选项 C、D 不正确；

②当 $4 < t \leq 6$ 时，Q 在边 BC 上，P 在边 AD 上，如图 2，计算 S 与 t 的关系式，发现是一次函数，是一条直线，可知：选项 B 不正确，从而得结论.

【解答】解：由题意得：AP=t，AQ=2t，

①当 $0 \leq t \leq 4$ 时，Q 在边 AB 上，P 在边 AD 上，如图 1，

$$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} \cdot t \cdot 2t = t^2,$$

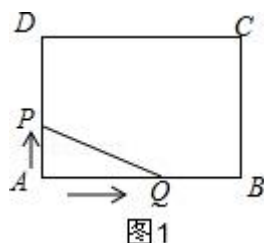
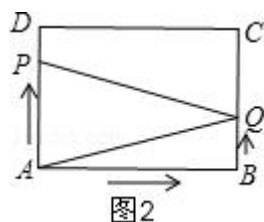
故选项 C、D 不正确；

②当 $4 < t \leq 6$ 时，Q 在边 BC 上，P 在边 AD 上，如图 2，

$$S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} AP \cdot AB = \frac{1}{2} t \cdot 8 = 4t,$$

故选项 B 不正确；

故选：A.



【点评】本题考查了动点问题的函数图象，根据动点 P 和 Q 的位置的不同确定

三角形面积的不同, 解决本题的关键是利用分类讨论的思想求出 S 与 t 的函数关系式.

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

13. (3.00 分) (2018•烟台) $(\pi - 3.14)^0 + \tan 60^\circ = \underline{1 + \sqrt{3}}$.

【考点】2C: 实数的运算; 6E: 零指数幂; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】1 : 常规题型.

【分析】直接利用零指数幂的性质和特殊角的三角函数值分别化简得出答案.

【解答】解: 原式 $= 1 + \sqrt{3}$.

故答案为: $1 + \sqrt{3}$.

【点评】此题主要考查了实数运算, 正确化简各数是解题关键.

14. (3.00 分) (2018•烟台) $\sqrt{12}$ 与最简二次根式 $5\sqrt{a+1}$ 是同类二次根式, 则 $a = \underline{2}$.

【考点】74: 最简二次根式; 77: 同类二次根式.

【专题】11 : 计算题.

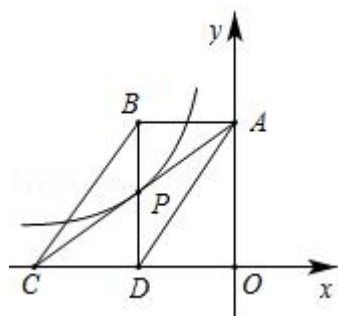
【分析】先将 $\sqrt{12}$ 化成最简二次根式, 然后根据同类二次根式得到被开方数相同可得出关于 a 的方程, 解出即可.

【解答】解: $\because \sqrt{12}$ 与最简二次根式 $5\sqrt{a+1}$ 是同类二次根式, 且 $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$,
 $\therefore a+1=3$, 解得: $a=2$.

故答案为 2.

【点评】本题考查了同类二次根式的定义: 化成最简二次根式后, 被开方数相同, 这样的二次根式叫做同类二次根式.

15. (3.00 分) (2018•烟台) 如图, 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过 $\square ABCD$ 对角线的交点 P , 已知点 A, C, D 在坐标轴上, $BD \perp DC$, $\square ABCD$ 的面积为 6, 则 $k=$ -3.

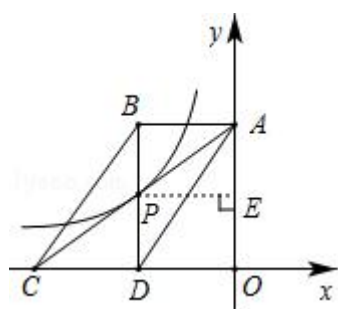


【考点】 G5: 反比例函数系数 k 的几何意义; G6: 反比例函数图象上点的坐标特征; L5: 平行四边形的性质.

【专题】 534: 反比例函数及其应用; 555: 多边形与平行四边形.

【分析】 由平行四边形面积转化为矩形 $BDOA$ 面积, 在得到矩形 $PDOE$ 面积, 应用反比例函数比例系数 k 的意义即可.

【解答】 解: 过点 P 做 $PE \perp y$ 轴于点 E



$\because$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形

$\therefore AB=CD$

又 $\because BD \perp x$ 轴

$\therefore ABDO$ 为矩形

$\therefore AB=DO$

$$\therefore S_{\text{矩形}ABDO} = S_{\square ABCD} = 6$$

$\therefore P$ 为对角线交点, $PE \perp y$ 轴

$\therefore$ 四边形 $PDOE$ 为矩形面积为 3

即 $DO \cdot EO = 3$

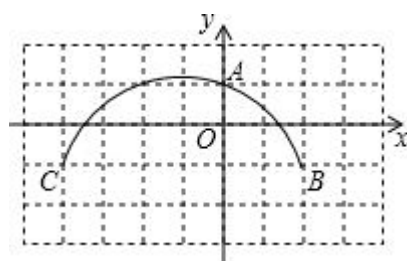
$\therefore$ 设 P 点坐标为 (x, y)

$$k = xy = -3$$

故答案为: -3

【点评】 本题考查了反比例函数比例系数 k 的几何意义以及平行四边形的性质.

16. (3.00 分) (2018•烟台) 如图, 方格纸上每个小正方形的边长均为 1 个单位长度, 点 O, A, B, C 在格点 (两条网格线的交点叫格点) 上, 以点 O 为原点建立直角坐标系, 则过 A, B, C 三点的圆的圆心坐标为 $(-1, -2)$.

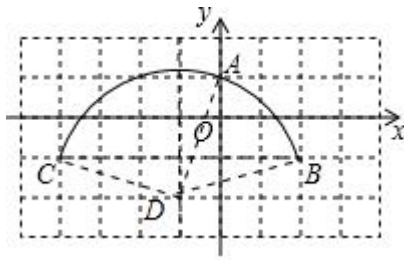


【考点】 D5: 坐标与图形性质; M2: 垂径定理.

【专题】 55: 几何图形.

【分析】 连接 CB , 作 CB 的垂直平分线, 根据勾股定理和半径相等得出点 O 的坐标即可.

【解答】 解: 连接 CB , 作 CB 的垂直平分线, 如图所示:



在 CB 的垂直平分线上找到一点 D ,

$$CD=DB=DA=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},$$

所以 D 是过 A, B, C 三点的圆的圆心,

即 D 的坐标为 $(-1, -2)$,

故答案为: $(-1, -2)$,

【点评】 此题考查垂径定理, 关键是根据垂径定理得出圆心位置.

17. (3.00 分) (2018•烟台) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 4x + m - 1 = 0$ 的实数根 x_1, x_2 , 满足 $3x_1x_2 - x_1 - x_2 > 2$, 则 m 的取值范围是 $3 < m \leq 5$.

【考点】 AA: 根的判别式; AB: 根与系数的关系.

【专题】 34 : 方程思想.

【分析】 根据根的判别式 $\Delta > 0$ 、根与系数的关系列出关于 m 的不等式组, 通过解该不等式组, 求得 m 的取值范围.

【解答】 解: 依题意得:
$$\begin{cases} (-4)^2 - 4(m-1) \geq 0 \\ 3 \times (m-1) - 4 > 2 \end{cases},$$

解得 $3 < m \leq 5$.

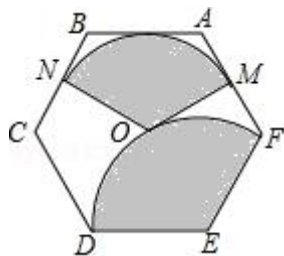
故答案是: $3 < m \leq 5$.

【点评】 本题考查了一元二次方程的根的判别式的应用, 解此题的关键是得出关于 m 的不等式, 注意: 一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c 为常数, $a \neq 0$) ①

当 $b^2 - 4ac > 0$ 时, 一元二次方程有两个不相等的实数根, ②当 $b^2 - 4ac = 0$ 时,

一元二次方程有两个相等的实数根，③当 $b^2 - 4ac < 0$ 时，一元二次方程没有实数根.

18. (3.00 分) (2018•烟台) 如图，点 O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心，点 M 为 AF 中点，以点 O 为圆心，以 OM 的长为半径画弧得到扇形 MON ，点 N 在 BC 上；以点 E 为圆心，以 DE 的长为半径画弧得到扇形 DEF ，把扇形 MON 的两条半径 OM ， ON 重合，围成圆锥，将此圆锥的底面半径记为 r_1 ；将扇形 DEF 以同样方法围成的圆锥的底面半径记为 r_2 ，则 $r_1: r_2 = \underline{\sqrt{3}: 2}$.

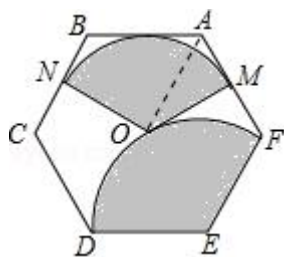


【考点】I7：展开图折叠成几何体；MP：圆锥的计算.

【专题】55B：正多边形与圆.

【分析】根据题意正六边形中心角为 120° 且其内角为 120° . 求出两个扇形圆心角，表示出扇形半径即可.

【解答】解：连 OA



由已知， M 为 AF 中点，则 $OM \perp AF$

$\therefore$ 六边形 $ABCDEF$ 为正六边形

$\therefore \angle AOM = 30^\circ$

设 $AM=a$

$$\therefore AB=AO=2a, OM=\sqrt{3}a$$

$\therefore$ 正六边形中心角为 60°

$$\therefore \angle MON=120^\circ$$

$$\therefore \text{扇形 MON 的弧长为: } \frac{120 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}a}{180} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi a$$

$$\text{则 } r_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} a$$

$$\text{同理: 扇形 DEF 的弧长为: } \frac{120 \cdot \pi \cdot 2a}{180} = \frac{4}{3} \pi a$$

$$\text{则 } r_2 = \frac{2}{3} a$$

$$r_1: r_2 = \sqrt{3}: 2$$

故答案为: $\sqrt{3}: 2$

【点评】 本题考查了正六边形的性质和扇形面积及圆锥计算. 解答时注意表示出两个扇形的半径.

三、解答题 (本大题共 7 个小题, 满分 66 分)

19. (6.00 分) (2018•烟台) 先化简, 再求值: $(1 + \frac{x^2+2}{x-2}) \div \frac{x+1}{x^2-4x+4}$, 其中 x 满足 $x^2 - 2x - 5 = 0$.

【考点】 6D: 分式的化简求值.

【专题】 11 : 计算题; 513: 分式.

【分析】 原式括号中两项通分并利用同分母分式的加法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分得到最简结果, 把已知等式变形后代入计算即可求出值.

$$\text{【解答】解: 原式} = \frac{x-2+x^2+2}{x-2} \cdot \frac{(x-2)^2}{x+1} = \frac{x(x+1)(x-2)^2}{x-2} = x(x-2) = x^2 - 2x,$$

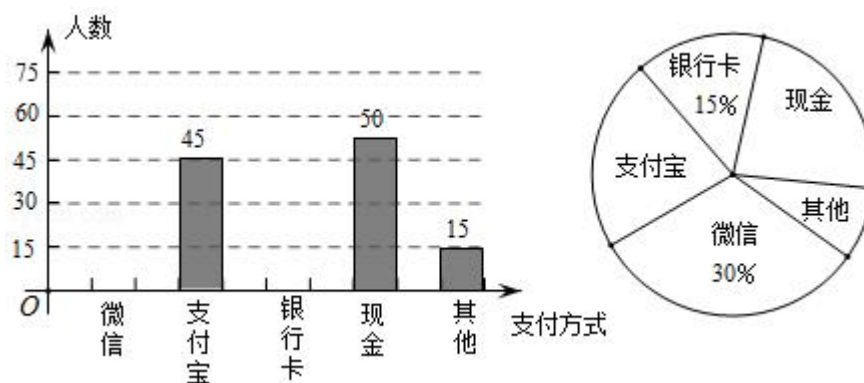
由 $x^2 - 2x - 5 = 0$, 得到 $x^2 - 2x = 5$,

则原式=5.

【点评】此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (8.00 分) (2018•烟台) 随着信息技术的迅猛发展, 人们去商场购物的支付方式更加多样、便捷. 某校数学兴趣小组设计了一份调查问卷, 要求每人选且只选一种你最喜欢的支付方式. 现将调查结果进行统计并绘制成如下两幅不完整的统计图, 请结合图中所给的信息解答下列问题:

- (1) 这次活动共调查了 200 人; 在扇形统计图中, 表示“支付宝”支付的扇形圆心角的度数为 81° ;
- (2) 将条形统计图补充完整. 观察此图, 支付方式的“众数”是“微信”;
- (3) 在一次购物中, 小明和小亮都想从“微信”、“支付宝”、“银行卡”三种支付方式中选一种方式进行支付, 请用画树状图或列表格的方法, 求出两人恰好选择同一种支付方式的概率.



【考点】VB: 扇形统计图; VC: 条形统计图; W5: 众数; X6: 列表法与树状图法.

【专题】1 : 常规题型; 54: 统计与概率.

【分析】(1) 用支付宝、现金及其他的人数和除以这三者的百分比之和可得总人数, 再用 360° 乘以“支付宝”人数所占比例即可得;

(2) 用总人数乘以对应百分比可得微信、银行卡的人数，从而补全图形，再根据众数的定义求解可得；

(3) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两人恰好选择同一种支付方式的情况，再利用概率公式即可求得答案．

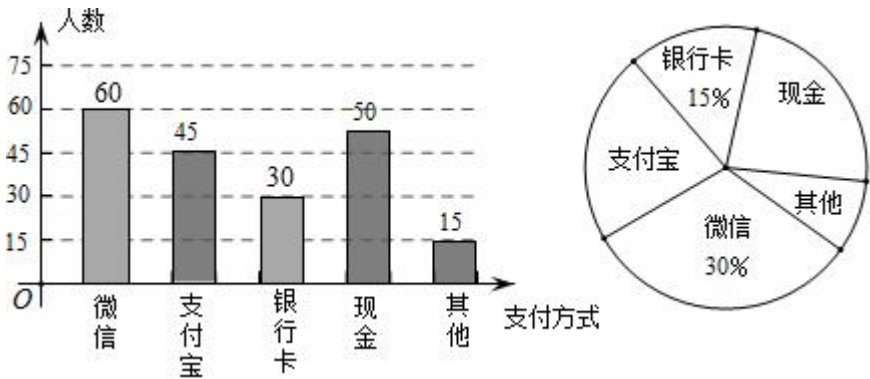
【解答】解：(1) 本次活动调查的总人数为 $(45+50+15) \div (1 - 15\% - 30\%) = 200$ 人，

则表示“支付宝”支付的扇形圆心角的度数为 $360^\circ \times \frac{45}{200} = 81^\circ$ ，

故答案为：200、 81° ；

(2) 微信人数为 $200 \times 30\% = 60$ 人，银行卡人数为 $200 \times 15\% = 30$ 人，

补全图形如下：



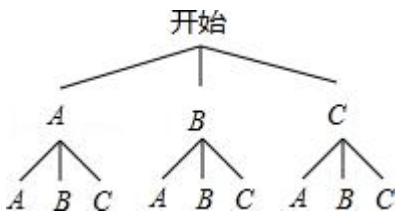
由条形图知，支付方式的“众数”是“微信”，

故答案为：微信；

(3) 将微信记为 A、支付宝记为 B、银行卡记为 C，

画树状图如下：

画树状图得：

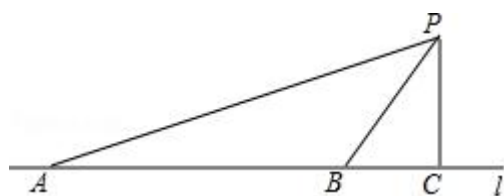


∴共有 9 种等可能的结果，其中两人恰好选择同一种支付方式的有 3 种，

∴两人恰好选择同一种支付方式的概率为 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

【点评】 此题考查了树状图法与列表法求概率. 用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

21. (8.00 分) (2018•烟台) 汽车超速行驶是交通安全的重大隐患，为了有效降低交通事故的发生，许多道路在事故易发路段设置了区间测速如图，学校附近有一条笔直的公路 l ，其间设有区间测速，所有车辆限速 40 千米/小时数学实践活动小组设计了如下活动：在 l 上确定 A ， B 两点，并在 AB 路段进行区间测速. 在 l 外取一点 P ，作 $PC \perp l$ ，垂足为点 C . 测得 $PC=30$ 米， $\angle APC=71^\circ$ ， $\angle BPC=35^\circ$. 上午 9 时测得一汽车从点 A 到点 B 用时 6 秒，请你用所学的数学知识说明该车是否超速. (参考数据： $\sin 35^\circ \approx 0.57$ ， $\cos 35^\circ \approx 0.82$ ， $\tan 35^\circ \approx 0.70$ ， $\sin 71^\circ \approx 0.95$ ， $\cos 71^\circ \approx 0.33$ ， $\tan 71^\circ \approx 2.90$)



【考点】 T8：解直角三角形的应用.

【专题】 1：常规题型；55E：解直角三角形及其应用.

【分析】 先求得 $AC=PC \tan \angle APC=87$ 、 $BC=PC \tan \angle BPC=21$ ，据此得出 $AB=AC - BC=87 - 21=66$ ，从而求得该车通过 AB 段的车速，比较大小即可得.

【解答】 解：在 $Rt\triangle APC$ 中， $AC=PC \tan \angle APC=30 \tan 71^\circ \approx 30 \times 2.90=87$ ，
在 $Rt\triangle BPC$ 中， $BC=PC \tan \angle BPC=30 \tan 35^\circ \approx 30 \times 0.70=21$ ，
则 $AB=AC - BC=87 - 21=66$ ，

∴ 该汽车的实际速度为 $\frac{66}{6} = 11 \text{ m/s}$,

又 ∵ $40 \text{ km/h} \approx 11.1 \text{ m/s}$,

∴ 该车没有超速.

【点评】 此题考查了解直角三角形的应用, 涉及的知识有: 锐角三角函数定义, 熟练掌握三角函数的定义是解本题的关键.

22. (9.00 分) (2018•烟台) 为提高市民的环保意识, 倡导“节能减排, 绿色出行”, 某市计划在城区投放一批“共享单车”这批单车分为 A, B 两种不同款型, 其中 A 型车单价 400 元, B 型车单价 320 元.

(1) 今年年初, “共享单车”试点投放在某市中心城区正式启动. 投放 A, B 两种款型的单车共 100 辆, 总价值 36800 元. 试问本次试点投放的 A 型车与 B 型车各多少辆?

(2) 试点投放活动得到了广大市民的认可, 该市决定将此项公益活动在整个城区全面铺开. 按照试点投放中 A, B 两车型的数量比进行投放, 且投资总价值不低于 184 万元. 请问城区 10 万人口平均每 100 人至少享有 A 型车与 B 型车各多少辆?

【考点】 95: 二元一次方程的应用.

【专题】 12 : 应用题; 521: 一次方程 (组) 及应用; 524: 一元一次不等式 (组) 及应用.

【分析】 (1) 设本次试点投放的 A 型车 x 辆、B 型车 y 辆, 根据“两种款型的单车共 100 辆, 总价值 36800 元”列方程组求解可得;

(2) 由 (1) 知 A、B 型车辆的数量比为 3: 2, 据此设整个城区全面铺开时投放的 A 型车 $3a$ 辆、B 型车 $2a$ 辆, 根据“投资总价值不低于 184 万元”列出关于 a 的不等式, 解之求得 a 的范围, 进一步求解可得.

【解答】解：（1）设本次试点投放的 A 型车 x 辆、B 型车 y 辆，

根据题意，得：
$$\begin{cases} x + y = 100 \\ 400x + 320y = 36800 \end{cases}$$

解得：
$$\begin{cases} x = 60 \\ y = 40 \end{cases}$$

答：本次试点投放的 A 型车 60 辆、B 型车 40 辆；

（2）由（1）知 A、B 型车辆的数量比为 3：2，

设整个城区全面铺开时投放的 A 型车 $3a$ 辆、B 型车 $2a$ 辆，

根据题意，得： $3a \times 400 + 2a \times 320 \geq 1840000$ ，

解得： $a \geq 1000$ ，

即整个城区全面铺开时投放的 A 型车至少 3000 辆、B 型车至少 2000 辆，

则城区 10 万人口平均每 100 人至少享有 A 型车 $3000 \times \frac{100}{100000} = 3$ 辆、至少享有 B 型车 $2000 \times \frac{100}{100000} = 2$ 辆。

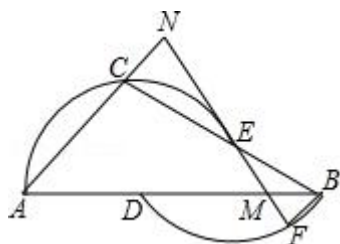
【点评】本题主要考查二元一次方程的应用，解题的关键是理解题意找到题目蕴含的相等关系，并据此列出方程组。

23. (10.00 分) (2018·烟台) 如图，已知 D、E 分别为 $\triangle ABC$ 的边 AB、BC 上两点，点 A、C、E 在 $\odot D$ 上，点 B、D 在 $\odot E$ 上。F 为 $\widehat{BD}$ 上一点，连接 FE 并延长交 AC 的延长线于点 N，交 AB 于点 M。

(1) 若 $\angle EBD$ 为 α ，请将 $\angle CAD$ 用含 α 的代数式表示；

(2) 若 $EM = MB$ ，请说明当 $\angle CAD$ 为多少度时，直线 EF 为 $\odot D$ 的切线；

(3) 在 (2) 的条件下，若 $AD = \sqrt{3}$ ，求 $\frac{MN}{MF}$ 的值。



【考点】 M5: 圆周角定理; ME: 切线的判定与性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 55: 几何图形.

【分析】 (1) 根据同圆的半径相等和等边对等角得: $\angle EDB = \angle EBD = \alpha$, $\angle CAD = \angle ACD$, $\angle DCE = \angle DEC = 2\alpha$, 再根据三角形内角和定理可得结论;

(2) 设 $\angle MBE = x$, 同理得: $\angle EMB = \angle MBE = x$, 根据切线的性质知: $\angle DEF = 90^\circ$, 所以 $\angle CED + \angle MEB = 90^\circ$, 同理根据三角形内角和定理可得 $\angle CAD = 45^\circ$;

(3) 由 (2) 得: $\angle CAD = 45^\circ$; 根据 (1) 的结论计算 $\angle MBE = 30^\circ$, 证明 $\triangle CDE$ 是等边三角形, 得 $CD = CE = DE = EF = AD = \sqrt{3}$, 求 $EM = 1$, $MF = EF - EM = \sqrt{3} - 1$, 根据三角形内角和及等腰三角形的判定得: $EN = CE = \sqrt{3}$, 代入化简可得结论.

【解答】 解: (1) 连接 CD、DE, $\odot E$ 中, $\because ED = EB$,

$$\therefore \angle EDB = \angle EBD = \alpha,$$

$$\therefore \angle CED = \angle EDB + \angle EBD = 2\alpha,$$

$$\odot D \text{ 中, } \because DC = DE = AD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle ACD, \angle DCE = \angle DEC = 2\alpha,$$

$$\triangle ACB \text{ 中, } \angle CAD + \angle ACD + \angle DCE + \angle EBD = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \frac{180^\circ - 3\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{3\alpha}{2};$$

$$(2) \text{ 设 } \angle MBE = x,$$

$$\therefore EM = MB,$$

$$\therefore \angle EMB = \angle MBE = x,$$

当 EF 为 $\odot D$ 的切线时, $\angle DEF = 90^\circ$,

$$\therefore \angle CED + \angle MEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = \angle DCE = 90^\circ - x,$$

$\triangle ACB$ 中, 同理得, $\angle CAD + \angle ACD + \angle DCE + \angle EBD = 180^\circ$,

$$\therefore 2\angle CAD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \therefore ,$$

$$\therefore \angle CAD = 45^\circ;$$

(3) 由 (2) 得: $\angle CAD = 45^\circ$;

$$\text{由 (1) 得: } \angle CAD = \frac{180^\circ - 3\angle MBE}{2};$$

$$\therefore \angle MBE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle CED = 2\angle MBE = 60^\circ,$$

$$\therefore CD = DE,$$

$\therefore \triangle CDE$ 是等边三角形,

$$\therefore CD = CE = DE = EF = AD = \sqrt{3},$$

$\text{Rt}\triangle DEM$ 中, $\angle EDM = 30^\circ$, $DE = \sqrt{3}$,

$$\therefore EM = 1, MF = EF - EM = \sqrt{3} - 1,$$

$\triangle ACB$ 中, $\angle NCB = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$,

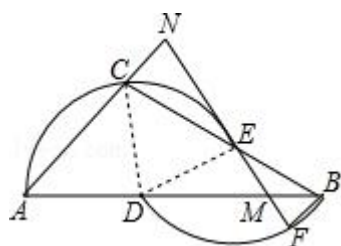
$\triangle CNE$ 中, $\angle CEN = \angle BEF = 30^\circ$,

$$\therefore \angle CNE = 75^\circ,$$

$$\therefore \angle CNE = \angle NCB = 75^\circ,$$

$$\therefore EN = CE = \sqrt{3},$$

$$\therefore \frac{MN}{MF} = \frac{NE + EM}{MF} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}.$$



【点评】 本题考查三角形内角和定理、三角形的外角的性质、等腰三角形的性质和判定等知识，解题的关键是学会利用三角形角之间的关系确定边的关系，学会构建方程解决问题，属于中考常考题型.

24. (11.00 分) (2018•烟台) 【问题解决】

一节数学课上，老师提出了这样一个问题：如图 1，点 P 是正方形 $ABCD$ 内一点， $PA=1$ ， $PB=2$ ， $PC=3$ ．你能求出 $\angle APB$ 的度数吗？

小明通过观察、分析、思考，形成了如下思路：

思路一：将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° ，得到 $\triangle BP'A$ ，连接 PP' ，求出 $\angle APB$ 的度数；

思路二：将 $\triangle APB$ 绕点 B 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle CP'B$ ，连接 PP' ，求出 $\angle APB$ 的度数．

请参考小明的思路，任选一种写出完整的解答过程．

【类比探究】

如图 2，若点 P 是正方形 $ABCD$ 外一点， $PA=3$ ， $PB=1$ ， $PC=\sqrt{11}$ ，求 $\angle APB$ 的度数．

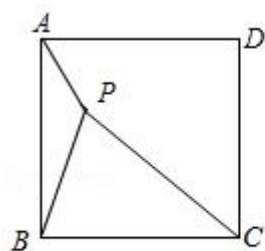


图1

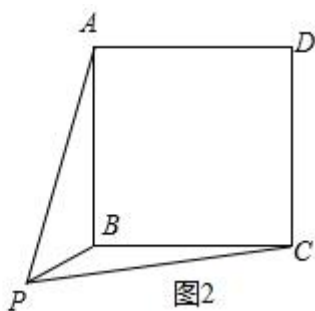


图2

【考点】 LO： 四边形综合题．

【专题】 15： 综合题．

【分析】 (1) 思路一、先利用旋转求出 $\angle PBP'=90^\circ$, $BP'=BP=2$, $AP'=CP=3$, 利用勾股定理求出 PP' , 进而判断出 $\triangle APP'$ 是直角三角形, 得出 $\angle APP'=90^\circ$, 即可得出结论;

思路二、同思路一的方法即可得出结论;

(2) 同 (1) 的思路一的方法即可得出结论.

【解答】 解: (1) 思路一、如图 1,

将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle BP'A$, 连接 PP' ,

$$\therefore \triangle ABP' \cong \triangle CBP,$$

$$\therefore \angle PBP'=90^\circ, BP'=BP=2, AP'=CP=3,$$

在 $Rt\triangle PBP'$ 中, $BP=BP'=2$,

$$\therefore \angle BPP'=45^\circ, \text{ 根据勾股定理得, } PP'=\sqrt{2}BP=2\sqrt{2},$$

$$\therefore AP=1,$$

$$\therefore AP^2+PP'^2=1+8=9,$$

$$\therefore AP'^2=3^2=9,$$

$$\therefore AP^2+PP'^2=AP'^2,$$

$$\therefore \triangle APP' \text{ 是直角三角形, 且 } \angle APP'=90^\circ,$$

$$\therefore \angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ;$$

思路二、同思路一的方法;

(2) 如图 2,

将 $\triangle BPC$ 绕点 B 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle BP'A$, 连接 PP' ,

$$\therefore \triangle ABP' \cong \triangle CBP,$$

$$\therefore \angle PBP'=90^\circ, BP'=BP=1, AP'=CP=\sqrt{77},$$

在 $Rt\triangle PBP'$ 中, $BP=BP'=1$,

$$\therefore \angle BPP'=45^\circ, \text{ 根据勾股定理得, } PP'=\sqrt{2}BP=\sqrt{2},$$

$$\therefore AP=3,$$

$$\therefore AP^2+PP'^2=9+2=11,$$

$$\therefore AP'^2=(\sqrt{77})^2=11,$$

$$\therefore AP^2+PP'^2=AP'^2,$$

$\therefore \triangle APP'$ 是直角三角形, 且 $\angle APP'=90^\circ$,

$$\therefore \angle APB=\angle APP'-\angle BPP'=90^\circ-45^\circ=45^\circ.$$

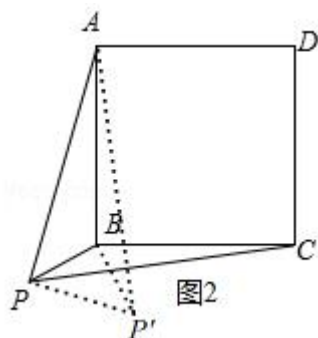


图2

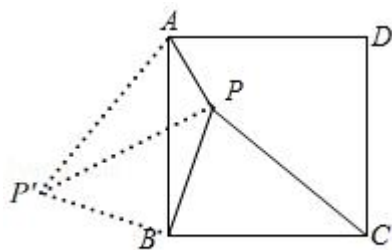


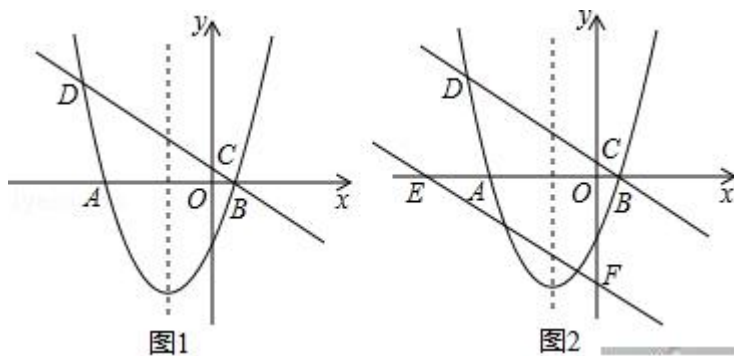
图1

【点评】此题是四边形综合题, 主要考查了正方形的性质, 旋转的性质, 直角三角形的性质和判定, 勾股定理, 正确作出辅助线是解本题的关键.

25. (14.00 分) (2018•烟台) 如图 1, 抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 与 x 轴交于 $A(-4,$

$0)$, $B(1, 0)$ 两点, 过点 B 的直线 $y=kx+\frac{2}{3}$ 分别与 y 轴及抛物线交于点 C, D .

- (1) 求直线和抛物线的表达式;
- (2) 动点 P 从点 O 出发, 在 x 轴的负半轴上以每秒 1 个单位长度的速度向左匀速运动, 设运动时间为 t 秒, 当 t 为何值时, $\triangle PDC$ 为直角三角形? 请直接写出所有满足条件的 t 的值;
- (3) 如图 2, 将直线 BD 沿 y 轴向下平移 4 个单位后, 与 x 轴, y 轴分别交于 E , F 两点, 在抛物线的对称轴上是否存在点 M , 在直线 EF 上是否存在点 N , 使 $DM+MN$ 的值最小? 若存在, 求出其最小值及点 M , N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



【考点】HF: 二次函数综合题.

【专题】153: 代数几何综合题; 37: 数学建模思想; 535: 二次函数图象及其性质.

【分析】(1) 利用待定系数法求解可得;

(2) 先求得点 D 的坐标, 过点 D 分别作 $DE \perp x$ 轴、 $DF \perp y$ 轴, 分 $P_1D \perp P_1C$ 、 $P_2D \perp DC$ 、 $P_3C \perp DC$ 三种情况, 利用相似三角形的性质逐一求解可得;

(3) 通过作对称点, 将折线转化成两点间距离, 应用两点之间线段最短.

【解答】解: (1) 把 $A(-4, 0)$, $B(1, 0)$ 代入 $y = ax^2 + 2x + c$, 得

$$\begin{cases} 16a - 8 + c = 0 \\ a + 2 + c = 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{2}{3} \\ c = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \text{抛物线解析式为: } y = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3}$$

$$\therefore \text{过点 B 的直线 } y = kx + \frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{代入 } (1, 0), \text{ 得: } k = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \text{BD 解析式为 } y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = \frac{2}{3}x^2 + 2x - \frac{8}{3} \\ y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases} \text{ 得交点坐标为 } D(-5, 4),$$

如图 1, 过 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E, 作 $DF \perp y$ 轴于点 F,

当 $P_1D \perp P_1C$ 时, $\triangle P_1DC$ 为直角三角形,

则 $\triangle DEP_1 \sim \triangle P_1OC$,

$$\therefore \frac{DE}{PO} = \frac{PE}{OC}, \text{ 即 } \frac{4}{t} = \frac{5-t}{\frac{2}{3}},$$

$$\text{解得 } t = \frac{15 \pm \sqrt{129}}{6},$$

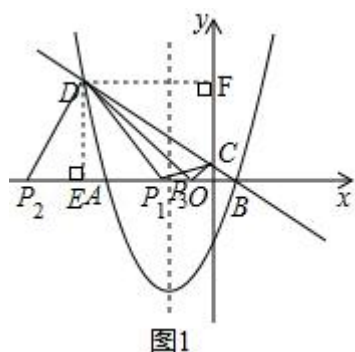


图1

当 $P_2D \perp DC$ 于点 D 时, $\triangle P_2DC$ 为直角三角形

$$\text{由 } \triangle P_2DB \sim \triangle DEB \text{ 得 } \frac{DB}{EB} = \frac{P_2B}{DB},$$

$$\text{即 } \frac{t+1}{\sqrt{52}} = \frac{\sqrt{52}}{6},$$

解得: $t = \frac{23}{3}$;

当 $P_3C \perp DC$ 时, $\triangle DFC \sim \triangle COP_3$,

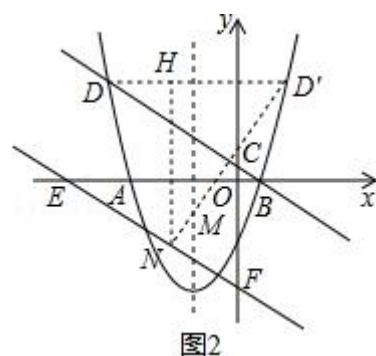
$$\therefore \frac{DF}{OC} = \frac{CF}{P_3O}, \text{ 即 } \frac{5}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{10}{3}}{t},$$

解得: $t = \frac{4}{9}$,

$$\therefore t \text{ 的值为 } \frac{4}{9}, \frac{15 \pm \sqrt{129}}{6}, \frac{23}{3}.$$

(3) 由已知直线 EF 解析式为: $y = -\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$,

在抛物线上取点 D 的对称点 D', 过点 D' 作 $D'N \perp EF$ 于点 N, 交抛物线对称轴于点 M



过点 N 作 $NH \perp DD'$ 于点 H, 此时, $DM + MN = D'N$ 最小.

则 $\triangle EOF \sim \triangle NHD'$

设点 N 坐标为 $(a, -\frac{2}{3}a - \frac{10}{3})$,

$$\therefore \frac{OE}{NH} = \frac{OF}{HD'}, \text{ 即 } \frac{5}{4 - (-\frac{2}{3}a - \frac{10}{3})} = \frac{\frac{10}{3}}{2 - a},$$

解得: $a = -2$,

则 N 点坐标为 $(-2, -2)$,

求得直线 ND' 的解析式为 $y = \frac{3}{2}x + 1$,

当 $x = -\frac{3}{2}$ 时, $y = -\frac{5}{4}$

∴ M 点坐标为 $(-\frac{3}{2}, -\frac{5}{4})$,

此时, DM+MN 的值最小为 $\sqrt{D'H^2 + NH^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = 2\sqrt{13}$.

【点评】 本题是二次函数和几何问题综合题, 应用了二次函数性质以及转化的数学思想、分类讨论思想. 解题时注意数形结合.