

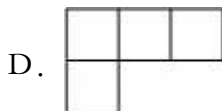
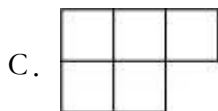
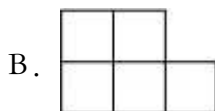
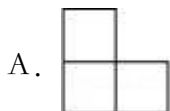
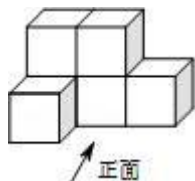
2018 年山东省济南市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分）

1. (4 分) 4 的算术平方根是 ()

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $\sqrt{2}$

2. (4 分) 如图所示的几何体，它的俯视图是 ()



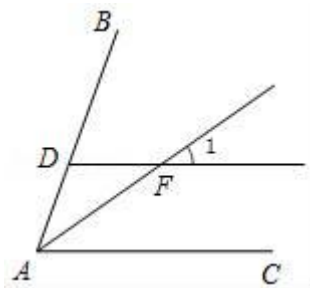
3. (4 分) 2018 年 1 月，“墨子号”量子卫星实现了距离达 7600 千米的洲际量子密钥分发，这标志着“墨子号”具备了洲际量子保密通信的能力．数字 7600 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.76×10^4 B. 7.6×10^3 C. 7.6×10^4 D. 76×10^2

4. (4 分) “瓦当”是中国古建筑装饰檐头的附件，是中国特有的文化艺术遗产，下面“瓦当”图案中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



5. (4 分) 如图，AF 是 $\angle BAC$ 的平分线， $DF \parallel AC$ ，若 $\angle 1 = 35^\circ$ ，则 $\angle BAF$ 的度数为 ()



- A. 17.5° B. 35° C. 55° D. 70°

6. (4分) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2+2a=3a^3$ B. $(-2a^3)^2=4a^5$
C. $(a+2)(a-1)=a^2+a-2$ D. $(a+b)^2=a^2+b^2$

7. (4分) 关于 x 的方程 $3x-2m=1$ 的解为正数, 则 m 的取值范围是 ()

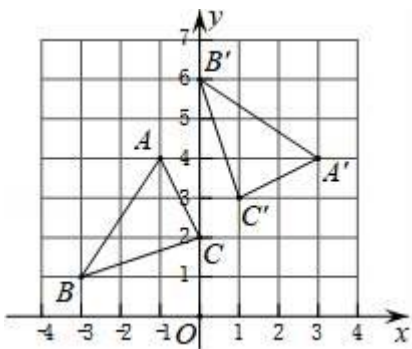
- A. $m < -\frac{1}{2}$ B. $m > -\frac{1}{2}$ C. $m > \frac{1}{2}$ D. $m < \frac{1}{2}$

8. (4分) 在反比例函数 $y = -\frac{2}{x}$ 图象上有三个点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ 、 $C(x_3, y_3)$,

若 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 则下列结论正确的是 ()

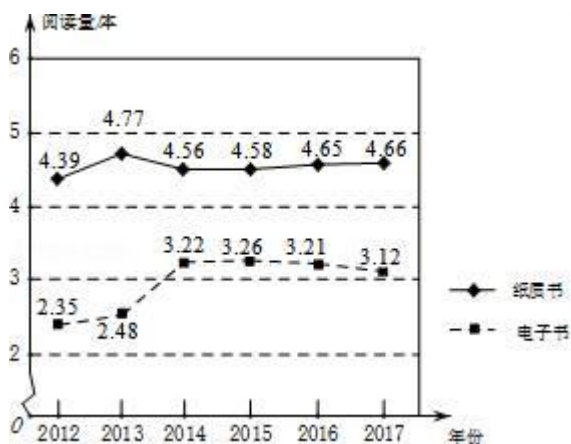
- A. $y_3 < y_2 < y_1$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_2 < y_3 < y_1$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

9. (4分) 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点都在方格线的格点上, 将 $\triangle ABC$ 绕点 P 顺时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle A'B'C'$, 则点 P 的坐标为 ()

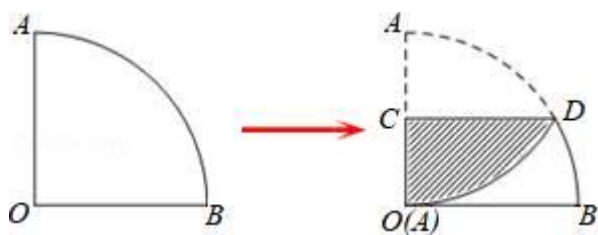


- A. $(0, 4)$ B. $(1, 1)$ C. $(1, 2)$ D. $(2, 1)$

10. (4分) 下面的统计图大致反应了我国 2012 年至 2017 年人均阅读量的情况. 根据统计图提供的信息, 下列推断不合理的是 ()



- A. 与 2016 年相比, 2017 年我国电子书人均阅读量有所降低
- B. 2012 年至 2017 年, 我国纸质书的人均阅读量的中位数是 4.57
- C. 从 2014 年到 2017 年, 我国纸质书的人均阅读量逐年增长
- D. 2013 年我国纸质书的人均阅读量比电子书的人均阅读量的 1.8 倍还多
11. (4 分) 如图 1, 一个扇形纸片的圆心角为 90° , 半径为 6. 如图 2, 将这张扇形纸片折叠, 使点 A 与点 O 恰好重合, 折痕为 CD, 图中阴影为重合部分, 则阴影部分的面积为 ()



- A. $6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ B. $6\pi - 9\sqrt{3}$ C. $12\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{9\pi}{4}$
12. (4 分) 若平面直角坐标系内的点 M 满足横、纵坐标都为整数, 则把点 M 叫做“整点”. 例如: P (1, 0)、Q (2, -2) 都是“整点”. 抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 4m - 2$ ($m > 0$) 与 x 轴交于点 A、B 两点, 若该抛物线在 A、B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域 (包括边界) 恰有七个整点, 则 m 的取值范围是 ()
- A. $\frac{1}{2} \leq m < 1$ B. $\frac{1}{2} < m \leq 1$ C. $1 < m \leq 2$ D. $1 < m < 2$

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

13. (4 分) 分解因式: $m^2 - 4 =$ _____.

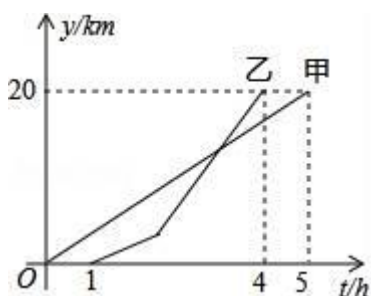
14. (4 分) 在不透明的盒子中装有 5 个黑色棋子和若干个白色棋子, 每个棋子除颜色外

都相同，任意摸出一个棋子，摸到黑色棋子的概率是，则白色棋子的个数是_____.

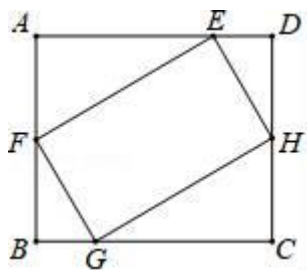
15. (4分) 一个正多边形的每个内角等于 108° ，则它的边数是_____.

16. (4分) 若代数式 $\frac{x-2}{x-4}$ 的值是 2，则 $x=_____$.

17. (4分) A、B 两地相距 20km，甲乙两人沿同一条路线从 A 地到 B 地. 甲先出发，匀速行驶，甲出发 1 小时后乙再出发，乙以 2km/h 的速度度匀速行驶 1 小时后提高速度并继续匀速行驶，结果比甲提前到达. 甲、乙两人离开 A 地的距离 s (km) 与时间 t (h) 的关系如图所示，则甲出发_____小时后和乙相遇.



18. (4分) 如图，矩形 EFGH 的四个顶点分别在矩形 ABCD 的各条边上， $AB=EF$ ， $FG=2$ ， $GC=3$. 有以下四个结论：① $\angle BGF = \angle CHG$ ；② $\triangle BFG \cong \triangle DHE$ ；③ $\tan \angle BFG = \frac{1}{2}$ ；④ 矩形 EFGH 的面积是 $4\sqrt{3}$. 其中一定成立的是_____。（把所有正确结论的序号填在横线上）

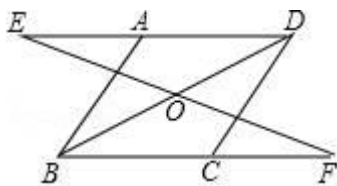


三、解答题（本大题共 9 小题，共 78 分）

19. (6分) 计算： $2^{-1} + |-5| - \sin 30^\circ + (\pi - 1)^0$.

20. (6分) 解不等式组：
$$\begin{cases} 3x+1 < 2x+3 & ① \\ 2x > \frac{3x-1}{2} & ② \end{cases}$$

21. (6分) 如图，在 $\square ABCD$ 中，连接 BD，E 是 DA 延长线上的点，F 是 BC 延长线上的点，且 $AE=CF$ ，连接 EF 交 BD 于点 O. 求证： $OB=OD$.

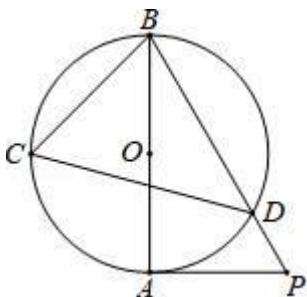


22. (8 分) 本学期学校开展以“感受中华传统美德”为主题的研学活动，组织 150 名学生多观历史博物馆和民俗展览馆，每一名学生只能参加其中一项活动，共支付票款 2000 元，票价信息如下：

地点	票价
历史博物馆	10 元/人
民俗展览馆	20 元/人

- (1) 请问参观历史博物馆和民俗展览馆的人数各是多少人？
 (2) 若学生都去参观历史博物馆，则能节省票款多少元？
23. (8 分) 如图 AB 是 $\odot O$ 的直径，PA 与 $\odot O$ 相切于点 A，BP 与 $\odot O$ 相交于点 D，C 为 $\odot O$ 上的一点，分别连接 CB、CD， $\angle BCD = 60^\circ$ 。

- (1) 求 $\angle ABD$ 的度数；
 (2) 若 $AB = 6$ ，求 PD 的长度。



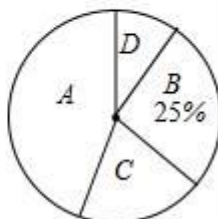
24. (10 分) 某校开设了“3D”打印、数学史、诗歌欣赏、陶艺制作四门校本课程，为了解学生对这四门校本课程的喜爱情况，对学生进行了随机问卷调查（问卷调查表如图所示），将调查结果整理后绘制例图 1、图 2 两幅均不完整的统计图表。

校本课程	频数	频率
A	36	0.45
B		0.25
C	16	b
D	8	

合计	a	1
----	-----	---

最受欢迎的校本课程调查问卷
您好！这是一份关于您最喜欢的校本课程问卷调查表，请在表格中选择一个（只能选一个）您最喜欢的课程选项，在其后空格内打“√”，非常感谢您的合作。

选项	校本课程	
A	3D打印	
B	数学史	
C	诗歌欣赏	
D	陶艺制作	

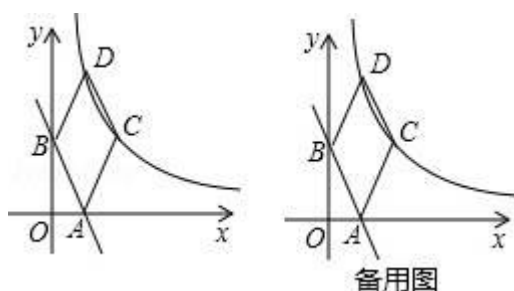


请您根据图表中提供的信息回答下列问题：

- (1) 统计表中的 $a=$ _____， $b=$ _____；
- (2) “D”对应扇形的圆心角为 _____ 度；
- (3) 根据调查结果，请您估计该校 2000 名学生中最喜欢“数学史”校本课程的人数；
- (4) 小明和小亮参加校本课程学习，若每人从“A”、“B”、“C”三门校本课程中随机选取一门，请用画树状图或列表格的方法，求两人恰好选中同一门校本课程的概率。

25. (10 分) 如图，直线 $y=ax+2$ 与 x 轴交于点 A (1, 0)，与 y 轴交于点 B (0, b)。将线段 AB 先向右平移 1 个单位长度、再向上平移 t ($t>0$) 个单位长度，得到对应线段 CD，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象恰好经过 C、D 两点，连接 AC、BD。

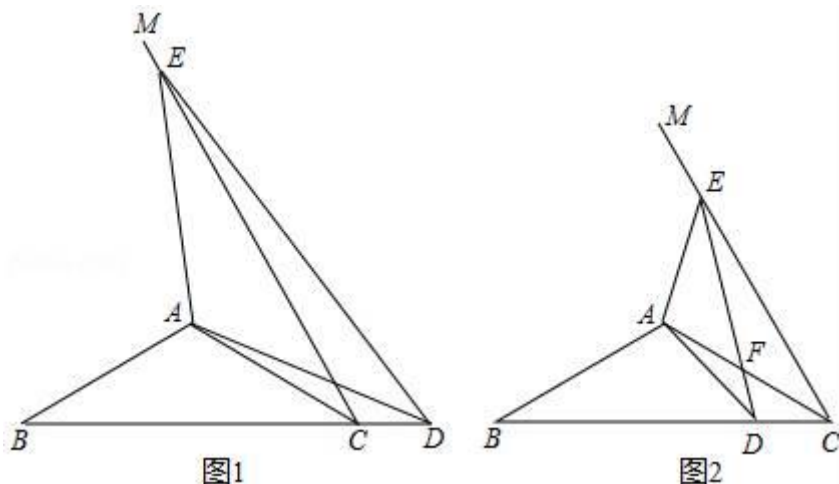
- (1) 求 a 和 b 的值；
- (2) 求反比例函数的表达式及四边形 ABDC 的面积；
- (3) 点 N 在 x 轴正半轴上，点 M 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象上的一个点，若 $\triangle CMN$ 是以 CM 为直角边的等腰直角三角形时，求所有满足条件的点 M 的坐标。



26. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=120^\circ$ ，以 CA 为边在 $\angle ACB$ 的另一侧作 $\angle$

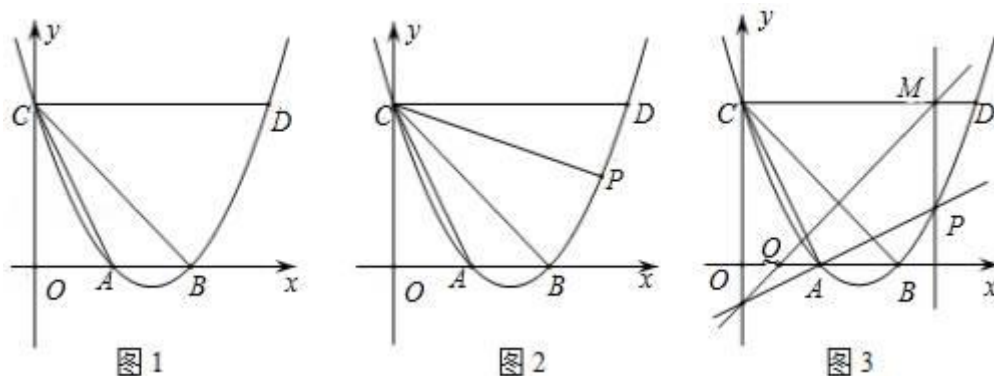
$\angle ACM = \angle ACB$, 点 D 为射线 BC 上任意一点, 在射线 CM 上截取 $CE = BD$, 连接 AD 、 DE 、 AE .

- (1) 如图 1, 当点 D 落在线段 BC 的延长线上时, 直接写出 $\angle ADE$ 的度数;
- (2) 如图 2, 当点 D 落在线段 BC (不含边界) 上时, AC 与 DE 交于点 F , 请问 (1) 中的结论是否仍成立? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 请说明理由;
- (3) 在 (2) 的条件下, 若 $AB = 6$, 求 CF 的最大值.



27. (12 分) 如图 1, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 过 $A(2, 0)$ 、 $B(4, 0)$ 两点, 交 y 轴于点 C , 过点 C 作 x 轴的平行线与抛物线上的另一个交点为 D , 连接 AC 、 BC . 点 P 是该抛物线上一动点, 设点 P 的横坐标为 m ($m > 4$).

- (1) 求该抛物线的表达式和 $\angle ACB$ 的正切值;
- (2) 如图 2, 若 $\angle ACP = 45^\circ$, 求 m 的值;
- (3) 如图 3, 过点 A 、 P 的直线与 y 轴于点 N , 过点 P 作 $PM \perp CD$, 垂足为 M , 直线 MN 与 x 轴交于点 Q , 试判断四边形 $ADMQ$ 的形状, 并说明理由.



试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 4 分，共 48 分）

1. (4 分) 4 的算术平方根是 ()

- A. 2 B. -2 C. ± 2 D. $\sqrt{2}$

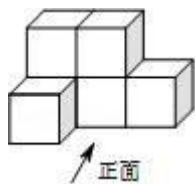
【分析】 算术平方根的定义：一个非负数的正的平方根，即为这个数的算术平方根，由此即可求出结果.

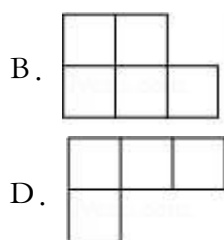
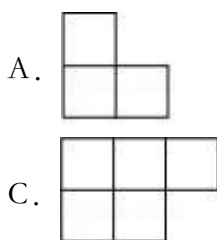
【解答】 解： $\because 2$ 的平方为 4，
 $\therefore 4$ 的算术平方根为 2.

故选：A.

【点评】 此题主要考查了算术平方根的定义，算术平方根的概念易与平方根的概念混淆而导致错误.

2. (4 分) 如图所示的几何体，它的俯视图是 ()





【分析】找到从上面看所得到的图形即可.

【解答】解：从几何体上面看，2排，上面3个，下面1个，左边2个正方形.

故选：D.

【点评】本题考查了三视图的知识，俯视图是从物体的上面看得到的视图. 解答此题时要有一定的生活经验.

3. (4分) 2018年1月，“墨子号”量子卫星实现了距离达7600千米的洲际量子密钥分发，这标志着“墨子号”具备了洲际量子保密通信的能力. 数字7600用科学记数法表示为 ()

A. 0.76×10^4 B. 7.6×10^3 C. 7.6×10^4 D. 76×10^2

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解： $7600 = 7.6 \times 10^3$,

故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (4分) “瓦当”是中国古建筑装饰檐头的附件，是中国特有的文化艺术遗产，下面“瓦当”图案中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

【解答】解：A、不是轴对称图形，也不是中心对称图形；

B、不是轴对称图形，是中心对称图形；

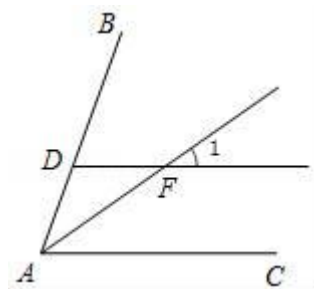
C、是轴对称图形，不是中心对称图形；

D、是轴对称图形，是中心对称图形。

故选：D。

【点评】 本题主要考查轴对称图形和中心对称图形的概念，以及对轴对称图形和中心对称图形的认识。

5. (4分) 如图，AF 是 $\angle BAC$ 的平分线， $DF \parallel AC$ ，若 $\angle 1 = 35^\circ$ ，则 $\angle BAF$ 的度数为 ()



A. 17.5°

B. 35°

C. 55°

D. 70°

【分析】 根据两直线平行，同位角相等，可得 $\angle FAC = \angle 1$ ，再根据角平分线的定义可得 $\angle BAF = \angle FAC$ 。

【解答】 解： $\because DF \parallel AC$ ，

$\therefore \angle FAC = \angle 1 = 35^\circ$ ，

$\because AF$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

$\therefore \angle BAF = \angle FAC = 35^\circ$ ，

故选：B。

【点评】 本题考查了平行线的性质，角平分线的定义，熟记平行线的性质是解题的关键。

6. (4分) 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 + 2a = 3a^3$

B. $(-2a^3)^2 = 4a^5$

C. $(a+2)(a-1) = a^2 + a - 2$

D. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

【分析】 根据多项式的乘法法则、幂的乘方与积的乘方、完全平方公式、合并同类项法则一一判断即可；

【解答】 解：A、错误。不是同类项不能合并；

B、错误。应该是 $(-2a^3)^2 = 4a^6$ ；

C、正确；

D、错误. 应该是 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

故选: C.

【点评】 本题考查多项式的乘法法则、幂的乘方与积的乘方、完全平方公式、合并同类项法则等知识, 解题的关键是熟练掌握基本知识, 属于中考常考题型.

7. (4 分) 关于 x 的方程 $3x-2m=1$ 的解为正数, 则 m 的取值范围是 ()

A. $m < -\frac{1}{2}$ B. $m > -\frac{1}{2}$ C. $m > \frac{1}{2}$ D. $m < \frac{1}{2}$

【分析】 先求出方程的解, 再根据题意得出不等式, 求出不等式的解集即可.

【解答】 解: 解方程 $3x-2m=1$ 得: $x=\frac{1+2m}{3}$,

$\because$ 关于 x 的方程 $3x-2m=1$ 的解为正数,

$$\therefore \frac{1+2m}{3} > 0,$$

$$\text{解得: } m > -\frac{1}{2},$$

故选: B.

【点评】 本题考查了解一元一次不等式和解一元一次方程、一元一次方程的解, 能得出关于 m 的不等式是解此题的关键.

8. (4 分) 在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 图象上有三个点 A (x_1, y_1)、B (x_2, y_2)、C (x_3, y_3),

若 $x_1 < 0 < x_2 < x_3$, 则下列结论正确的是 ()

A. $y_3 < y_2 < y_1$ B. $y_1 < y_3 < y_2$ C. $y_2 < y_3 < y_1$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

【分析】 根据反比例函数图象上点的坐标特征解答.

【解答】 解: $\because$ A (x_1, y_1) 在反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$ 图象上, $x_1 < 0$,

$$\therefore y_1 > 0,$$

对于反比例函数 $y=-\frac{2}{x}$, 在第二象限, y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore 0 < x_2 < x_3,$$

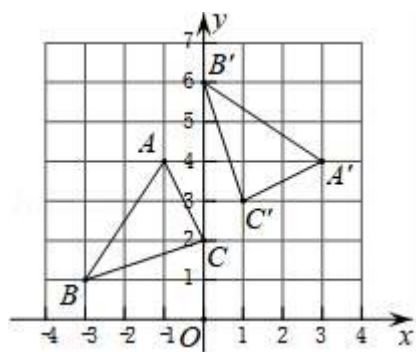
$$\therefore y_2 < y_3 < 0,$$

$$\therefore y_2 < y_3 < y_1$$

故选: C.

【点评】 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特征, 掌握反比例函数的性质、反比例函数的增减性是解题的关键.

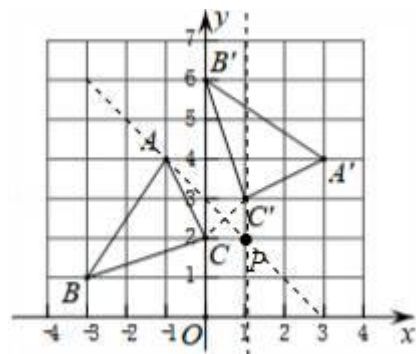
9. (4分) 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点都在方格线的格点上, 将 $\triangle ABC$ 绕点 P 顺时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle A'B'C'$, 则点 P 的坐标为 ()



- A. (0, 4) B. (1, 1) C. (1, 2) D. (2, 1)

【分析】 选两组对应点, 连接后作其中垂线, 两中垂线的交点即为点 P .

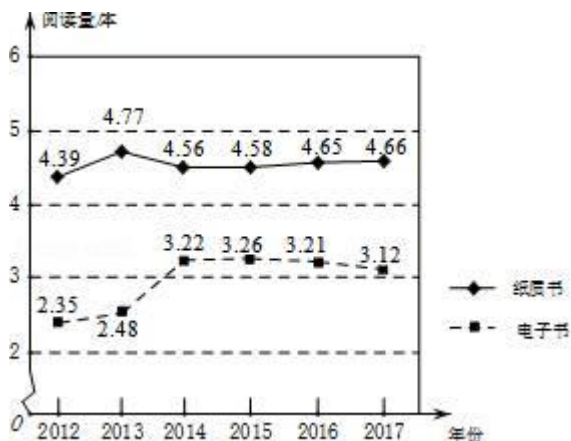
【解答】 解: 由图知, 旋转中心 P 的坐标为 (1, 2),



故选: C.

【点评】 本题主要考查坐标与图形的变化—旋转, 解题的关键是掌握旋转变换的性质.

10. (4分) 下面的统计图大致反应了我国 2012 年至 2017 年人均阅读量的情况. 根据统计图提供的信息, 下列推断不合理的是 ()



- A. 与 2016 年相比, 2017 年我国电子书人均阅读量有所降低

B. 2012 年至 2017 年，我国纸质书的人均阅读量的中位数是 4.57

C. 从 2014 年到 2017 年，我国纸质书的人均阅读量逐年增长

D. 2013 年我国纸质书的人均阅读量比电子书的人均阅读量的 1.8 倍还多

【分析】利用折线统计图结合相应数据，分别分析得出符合题意的答案.

【解答】解：A、与 2016 年相比，2017 年我国电子书人均阅读量有所降低，正确；

B、2012 年至 2017 年，我国纸质书的人均阅读量的中位数是 4.615，错误；

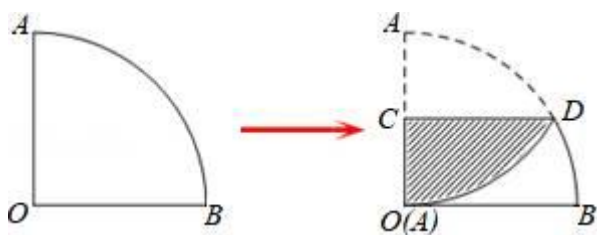
C、从 2014 年到 2017 年，我国纸质书的人均阅读量逐年增长，正确；

D、2013 年我国纸质书的人均阅读量比电子书的人均阅读量的 1.8 倍还多，正确；

故选：B.

【点评】此题主要考查了折线统计图，利用折线统计图获取正确信息是解题关键.

11. (4 分) 如图 1，一个扇形纸片的圆心角为 90° ，半径为 6. 如图 2，将这张扇形纸片折叠，使点 A 与点 O 恰好重合，折痕为 CD，图中阴影为重合部分，则阴影部分的面积为 ()



- A. $6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ B. $6\pi - 9\sqrt{3}$ C. $12\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{9\pi}{4}$

【分析】连接 OD，如图，利用折叠性质得由弧 AD、线段 AC 和 CD 所围成的图形的面积等于阴影部分的面积， $AC=OC$ ，则 $OD=2OC=3$ ， $CD=3\sqrt{3}$ ，从而得到 $\angle CDO=30^\circ$ ， $\angle COD=60^\circ$ ，然后根据扇形面积公式，利用由弧 AD、线段 AC 和 CD 所围成的图形的面积 $= S_{\text{扇形} AOD} - S_{\triangle COD}$ ，进行计算即可.

【解答】解：连接 OD，如图，

$\because$ 扇形纸片折叠，使点 A 与点 O 恰好重合，折痕为 CD，

$\therefore AC=OC$ ，

$\therefore OD=2OC=3$ ，

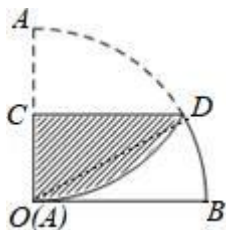
$\therefore CD=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$ ，

$\therefore \angle CDO=30^\circ$ ， $\angle COD=60^\circ$ ，

$$\therefore \text{由弧 AD、线段 AC 和 CD 所围成的图形的面积} = S_{\text{扇形 AOD}} - S_{\triangle COD} = \frac{60 \cdot \pi \cdot 6^2}{360} - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = 6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积为 } 6\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

故选：A.



【点评】 本题考查了扇形面积的计算：阴影面积的主要思路是将不规则图形面积转化为规则图形的面积．记住扇形面积的计算公式．也考查了折叠性质．

12. (4分) 若平面直角坐标系内的点 M 满足横、纵坐标都为整数，则把点 M 叫做“整点”．例如：P (1, 0)、Q (2, -2) 都是“整点”．抛物线 $y = mx^2 - 4mx + 4m - 2$ ($m > 0$) 与 x 轴交于点 A、B 两点，若该抛物线在 A、B 之间的部分与线段 AB 所围成的区域 (包括边界) 恰有七个整点，则 m 的取值范围是 ()

- A. $\frac{1}{2} \leq m < 1$ B. $\frac{1}{2} < m \leq 1$ C. $1 < m \leq 2$ D. $1 < m < 2$

【分析】 画出图象，利用图象可得 m 的取值范围

【解答】 解： $\because y = mx^2 - 4mx + 4m - 2 = m(x - 2)^2 - 2$ 且 $m > 0$,

$\therefore$ 该抛物线开口向上，顶点坐标为 (2, -2)，对称轴是直线 $x = 2$.

由此可知点 (2, 0)、点 (2, -1)、顶点 (2, -2) 符合题意.

①当该抛物线经过点 (1, -1) 和 (3, -1) 时 (如答案图 1)，这两个点符合题意.

将 (1, -1) 代入 $y = mx^2 - 4mx + 4m - 2$ 得到 $-1 = m - 4m + 4m - 2$. 解得 $m = 1$.

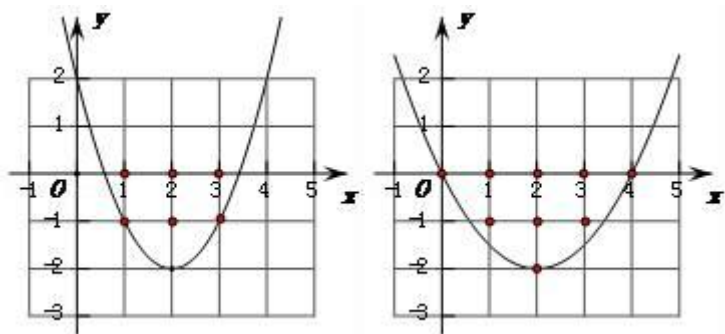
此时抛物线解析式为 $y = x^2 - 4x + 2$.

由 $y = 0$ 得 $x^2 - 4x + 2 = 0$. 解得 $x_1 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.6$, $x_2 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.4$.

$\therefore$ x 轴上的点 (1, 0)、(2, 0)、(3, 0) 符合题意.

则当 $m = 1$ 时，恰好有 (1, 0)、(2, 0)、(3, 0)、(1, -1)、(3, -1)、(2, -1)、(2, -2) 这 7 个整点符合题意.

$\therefore m \leq 1$. **【注：m 的值越大，抛物线的开口越小，m 的值越小，抛物线的开口越大】**



答案图 1 ($m=1$ 时)

答案图 2 ($m=\frac{1}{2}$ 时)

②当该抛物线经过点 $(0, 0)$ 和点 $(4, 0)$ 时 (如答案图 2), 这两个点符合题意.
此时 x 轴上的点 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(3, 0)$ 也符合题意.

将 $(0, 0)$ 代入 $y=mx^2-4mx+4m-2$ 得到 $0=0-4m+0-2$. 解得 $m=\frac{1}{2}$.

此时抛物线解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-2x$.

当 $x=1$ 时, 得 $y=\frac{1}{2}\times 1-2\times 1=-\frac{3}{2}<-1$. $\therefore$ 点 $(1, -1)$ 符合题意.

当 $x=3$ 时, 得 $y=\frac{1}{2}\times 9-2\times 3=-\frac{3}{2}<-1$. $\therefore$ 点 $(3, -1)$ 符合题意.

综上所述: 当 $m=\frac{1}{2}$ 时, 点 $(0, 0)$ 、 $(1, 0)$ 、 $(2, 0)$ 、 $(3, 0)$ 、 $(4, 0)$ 、 $(1, -1)$ 、 $(3, -1)$ 、 $(2, -2)$ 、 $(2, -1)$ 都符合题意, 共有 9 个整点符合题意,

$\therefore m=\frac{1}{2}$ 不符合题.

$\therefore m>\frac{1}{2}$.

综合①②可得: 当 $\frac{1}{2}<m\leq 1$ 时, 该函数的图象与 x 轴所围城的区域 (含边界) 内有七个整点,

故选: B.

【点评】 本题考查了二次函数图象与系数的关系, 抛物线与 x 轴的交点的求法, 利用图象解决问题是本题的关键.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

13. (4 分) 分解因式: $m^2-4=\underline{(m+2)(m-2)}$.

【分析】 本题刚好是两个数的平方差, 所以利用平方差公式分解则可. 平方差公式: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

【解答】解： $m^2 - 4 = (m+2)(m-2)$.

故答案为： $(m+2)(m-2)$.

【点评】本题考查了平方差公式因式分解.能用平方差公式进行因式分解的式子的特点是：两项平方项；符号相反.

14. (4分) 在不透明的盒子中装有5个黑色棋子和若干个白色棋子，每个棋子除颜色外都相同，任意摸出一个棋子，摸到黑色棋子的概率是 $\frac{1}{4}$ ，则白色棋子的个数是15.

【分析】黑色棋子除以相应概率算出棋子的总数，减去黑色棋子的个数即为白色棋子的个数；

【解答】解： $5 \div \frac{1}{4} - 5 = 15$.

$\therefore$ 白色棋子有15个；

故答案为：15.

【点评】本题主要考查了概率的求法，概率=所求情况数与总情况数之比.

15. (4分) 一个正多边形的每个内角等于 108° ，则它的边数是五.

【分析】根据相邻的内角与外角互为邻补角求出每一个外角的度数为 72° ，再用外角和 360° 除以 72° ，计算即可得解.

【解答】解： $\because$ 正多边形的每个内角等于 108° ，

$\therefore$ 每一个外角的度数为 $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$ ，

$\therefore$ 边数 $= 360^\circ \div 72^\circ = 5$ ，

$\therefore$ 这个正多边形是正五边形.

故答案为：五.

【点评】本题考查了多边形的内角与外角，对于正多边形，利用多边形的外角和除以每一个外角的度数求边数更简便.

16. (4分) 若代数式 $\frac{x-2}{x-4}$ 的值是2，则 $x = \underline{6}$.

【分析】根据解分式方程的步骤依次计算可得.

【解答】解： $\frac{x-2}{x-4} = 2$ ，

去分母得： $x - 2 = 2(x - 4)$ ，

$x - 2 = 2x - 8$ ，

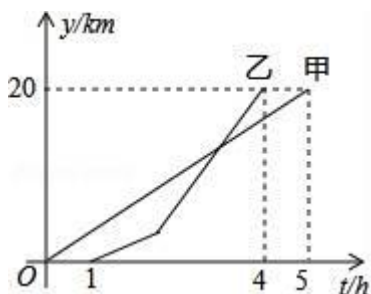
$$x=6,$$

经检验： $x=6$ 是原方程的解.

故答案为：6.

【点评】 本题主要考查解分式方程，解题的关键是掌握解分式方程的步骤：①去分母；②求出整式方程的解；③检验；④得出结论.

17. (4分) A、B 两地相距 20km，甲乙两人沿同一条路线从 A 地到 B 地. 甲先出发，匀速行驶，甲出发 1 小时后乙再出发，乙以 2km/h 的速度度匀速行驶 1 小时后提高速度并继续匀速行驶，结果比甲提前到达. 甲、乙两人离开 A 地的距离 s (km) 与时间 t (h) 的关系如图所示，则甲出发 $\frac{16}{5}$ 小时后和乙相遇.



【分析】 由图象得出解析式后联立方程组解答即可.

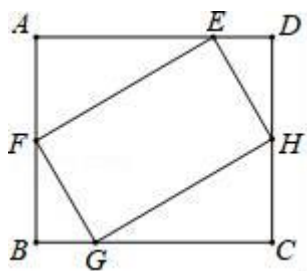
【解答】 解：由图象可得： $y_{\text{甲}}=4t$ ($0 \leq t \leq 5$)； $y_{\text{乙}}=\begin{cases} 2(t-1) & (1 \leq t \leq 2) \\ 9t-16 & (2 < t \leq 4) \end{cases}$ ；

由方程组 $\begin{cases} y=4t \\ y=9t-16 \end{cases}$ ，解得 $t=\frac{16}{5}$.

故答案为 $\frac{16}{5}$.

【点评】 此题考查一次函数的应用，关键是由图象得出解析式解答.

18. (4分) 如图，矩形 EFGH 的四个顶点分别在矩形 ABCD 的各条边上， $AB=EF$ ， $FG=2$ ， $GC=3$. 有以下四个结论：① $\angle BGF = \angle CHG$ ；② $\triangle BFG \cong \triangle DHE$ ；③ $\tan \angle BFG = \frac{1}{2}$ ；④ 矩形 EFGH 的面积是 $4\sqrt{3}$. 其中一定成立的是 ①②④. (把所有正确结论的序号填在横线上)



【分析】 根据矩形的性质和全等三角形的判定分析各小题即可；

【解答】解：∵ $\angle FGH=90^\circ$ ，∴ $\angle BGF+\angle CGH=90^\circ$ ．

又∵ $\angle CGH+\angle CHG=90^\circ$ ，

∴ $\angle BGF=\angle CHG$ ，故①正确．

同理可得 $\angle DEH=\angle CHG$ ．

∴ $\angle BGF=\angle DEH$ ．

又∵ $\angle B=\angle D=90^\circ$ ， $FG=EH$ ，

∴ $\triangle BFG\cong\triangle DHE$ ，故②正确．

同理可得 $\triangle AFE\cong\triangle CHG$ ．

∴ $AF=CH$ ．

易得 $\triangle BFG\sim\triangle CGH$ ．

设 GH 、 EF 为 a ，

$$\therefore \frac{BF}{CG}=\frac{FG}{GH} \quad \therefore \frac{BF}{3}=\frac{2}{a}.$$

$$\therefore BF=\frac{6}{a}.$$

$$\therefore AF=AB-BF=a-\frac{6}{a}.$$

$$\therefore CH=AF=a-\frac{6}{a}.$$

在 $Rt\triangle CGH$ 中，

$$\therefore CG^2+CH^2=GH^2,$$

$$\therefore 3^2+\left(a-\frac{6}{a}\right)^2=a^2. \text{ 解得 } a=2\sqrt{3}. \therefore GH=2\sqrt{3}. \therefore BF=a-\frac{6}{a}=\sqrt{3}.$$

在 $Rt\triangle BFG$ 中， $\therefore \cos\angle BFG=\frac{BF}{FG}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\therefore \angle BFG=30^\circ$ ．

$\therefore \tan\angle BFG=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$ ，故③错误．

矩形 $EFGH$ 的面积 $=FG\times GH=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ ，故④正确．

故答案为：①②④

【点评】此题是几何变换综合题，主要考查了全等三角形的判定和性质，矩形的判定和性质，属于基础题．

三、解答题（本大题共9小题，共78分）

19. (6分) 计算： $2^{-1}+|-5|-\sin 30^\circ+(\pi-1)^0$ ．

【分析】先利用负指数，绝对值，特殊角的三角函数，零次幂化简，最后合并即可得出结论.

【解答】解： $2^{-1}+|-5|-\sin 30^{\circ}+(\pi-1)^0$.
 $=\frac{1}{2}+5-\frac{1}{2}+1$
 $=6$

【点评】此题主要考查了负指数，绝对值，特殊角的三角函数，零次幂，熟记性质是解本题的关键.

20. (6分) 解不等式组：
$$\begin{cases} 3x+1 < 2x+3 & \text{①} \\ 2x > \frac{3x-1}{2} & \text{②} \end{cases}$$

【分析】分别求出不等式①②的解集，同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到求出不等式组解集.

【解答】解：由①，得

$$3x-2x < 3-1.$$

$$\therefore x < 2.$$

由②，得

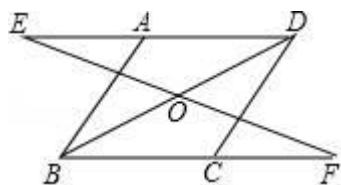
$$4x > 3x-1.$$

$$\therefore x > -1.$$

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-1 < x < 2$.

【点评】本题考查了解一元一次不等式组的解法，利用同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到求不等式组解集是本题关键.

21. (6分) 如图，在 $\square ABCD$ 中，连接BD，E是DA延长线上的点，F是BC延长线上的点，且AE=CF，连接EF交BD于点O. 求证：OB=OD.



【分析】欲证明 $OB=OD$ ，只要证明 $\triangle EOD \cong \triangle FOB$ 即可；

【解答】证明： $\because \square ABCD$ 中，

$$\therefore AD=BC, AD \parallel BC.$$

$$\therefore \angle ADB = \angle CBD.$$

又 $\because AE=CF$,
 $\therefore AE+AD=CF+BC$.
 $\therefore ED=FB$.
 又 $\because \angle EOD=\angle FOB$,
 $\therefore \triangle EOD \cong \triangle FOB$.
 $\therefore OB=OD$.

【点评】 本题考查平行四边形的性质、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

22. (8 分) 本学期学校开展以“感受中华传统美德”为主题的研学活动，组织 150 名学生多观历史博物馆和民俗展览馆，每一名学生只能参加其中一项活动，共支付票款 2000 元，票价信息如下：

地点	票价
历史博物馆	10 元/人
民俗展览馆	20 元/人

- (1) 请问参观历史博物馆和民俗展览馆的人数各是多少人?
 (2) 若学生都去参观历史博物馆，则能节省票款多少元?

【分析】 (1) 设参观历史博物馆的有 x 人，参观民俗展览馆的有 y 人，根据等量关系：

①一共 150 名学生；②一共支付票款 2000 元，列出方程组求解即可；

(2) 原来的钱数 - 参观历史博物馆的钱数，列出算式计算可求能节省票款多少元.

【解答】 解：(1) 设参观历史博物馆的有 x 人，参观民俗展览馆的有 y 人，依题意，得

$$\begin{cases} x+y=150 \\ 10x+20y=2000 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=100 \\ y=50 \end{cases}$.

答：参观历史博物馆的有 100 人，则参观民俗展览馆的有 50 人.

(2) $2000 - 150 \times 10 = 500$ (元).

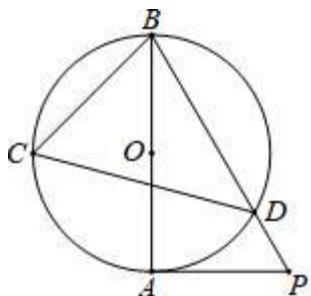
答：若学生都去参观历史博物馆，则能节省票款 500 元.

【点评】 考查了二元一次方程的应用，(1) 找出问题中的已知条件和未知量及它们之间的关系. (2) 找出题中的两个关键的未知量，并用字母表示出来. (3) 挖掘题目中的关系，找出等量关系，列出二元一次方程. (4) 根据未知数的实际意义求其整数解.

23. (8分) 如图 AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 与 $\odot O$ 相切于点 A, BP 与 $\odot O$ 相交于点 D, C 为 $\odot O$ 上的一点, 分别连接 CB、CD, $\angle BCD=60^\circ$.

(1) 求 $\angle ABD$ 的度数;

(2) 若 $AB=6$, 求 PD 的长度.



【分析】 (1) 解法一: 要的圆周角定理得: $\angle ADB=90^\circ$, 由同弧所对的圆周角相等和直角三角形的性质可得结论;

解法二: 根据同弧所对的圆心角是圆周角的 2 倍可得 $\angle BOD=120^\circ$, 由同圆的半径相等和等腰三角形的性质可得结论;

(2) 如图 1, 根据切线的性质可得 $\angle BAP=90^\circ$, 根据直角三角形 30° 角的性质可计算 AD 的长, 由勾股定理计算 DB 的长, 由三角函数可得 PB 的长, 从而得 PD 的长.

【解答】 解: (1) 方法一: 如图 1, 连接 AD.

$\because$ BA 是 $\odot O$ 直径,

$\therefore \angle BDA=90^\circ$.

$\because \widehat{BD}=\widehat{BD}$,

$\therefore \angle BAD=\angle C=60^\circ$.

$\therefore \angle ABD=90^\circ-\angle BAD=90^\circ-60^\circ=30^\circ$.

方法二: 如图 2, 连接 DA、OD, 则 $\angle BOD=2\angle C=2\times 60^\circ=120^\circ$.

$\because OB=OD$,

$\therefore \angle OBD=\angle ODB=\frac{1}{2}(180^\circ-120^\circ)=30^\circ$.

即 $\angle ABD=30^\circ$.

(2) 如图 1, $\because$ AP 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle BAP=90^\circ$.

在 $Rt\triangle BAD$ 中, $\because \angle ABD=30^\circ$,

$\therefore DA=\frac{1}{2}BA=\frac{1}{2}\times 6=3$.

$$\therefore BD = \sqrt{3}DA = 3\sqrt{3}.$$

在 $\text{Rt}\triangle BAP$ 中, $\because \cos \angle ABD = \frac{AB}{PB}$,

$$\therefore \cos 30^\circ = \frac{6}{PB} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore BP = 4\sqrt{3}.$$

$$\therefore PD = BP - BD = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

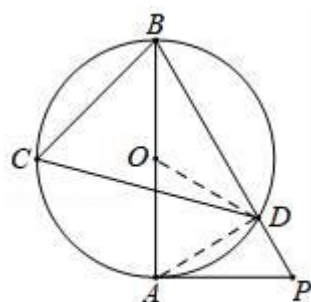


图2

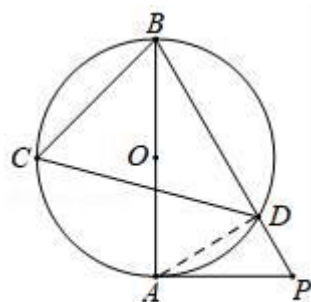


图1

【点评】 本题考查切线的性质、等腰三角形的性质、圆周角定理等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，属于中考常考题型．

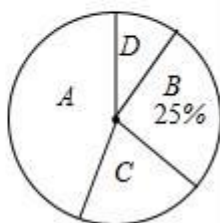
24. (10 分) 某校开设了“3D”打印、数学史、诗歌欣赏、陶艺制作四门校本课程，为了解学生对这四门校本课程的喜爱情况，对学生进行了随机问卷调查(问卷调查表如图所示)，将调查结果整理后绘制例图 1、图 2 两幅均不完整的统计图表．

校本课程	频数	频率
A	36	0.45
B		0.25
C	16	b
D	8	
合计	a	1

最受欢迎的校本课程调查问卷

您好！这是一份关于您最喜欢的校本课程问卷调查表，请在表格中选择一个（只能选一个）您最喜欢的课程选项，在其后空格内打“√”，非常感谢您的合作。

选项	校本课程	
A	3D打印	
B	数学史	
C	诗歌欣赏	
D	陶艺制作	



请您根据图表中提供的信息回答下列问题：

- (1) 统计表中的 $a = \underline{80}$ ， $b = \underline{0.20}$ ；
- (2) “D”对应扇形的圆心角为 $\underline{36}$ 度；
- (3) 根据调查结果，请您估计该校 2000 名学生中最喜欢“数学史”校本课程的人数；
- (4) 小明和小亮参加校本课程学习，若每人从“A”、“B”、“C”三门校本课程中随机选取一门，请用画树状图或列表格的方法，求两人恰好选中同一门校本课程的概率。

【分析】 (1) 根据题意列出算式，再求出即可；

(2) 根据题意列出算式，再求出即可；

(3) 根据题意列出算式，再求出即可；

(4) 先列出表格，再根据题意列出算式，再求出即可。

【解答】 解：(1) $a = 36 \div 0.45 = 80$ ，

$$b = 16 \div 80 = 0.20,$$

故答案为：80，0.20；

(2) “D”对应扇形的圆心角的度数为：

$$8 \div 80 \times 360^\circ = 36^\circ,$$

故答案为：36；

(3) 估计该校 2000 名学生中最喜欢“数学史”校本课程的人数为： $2000 \times 0.25 = 500$ （人）；

(4) 列表格如下：

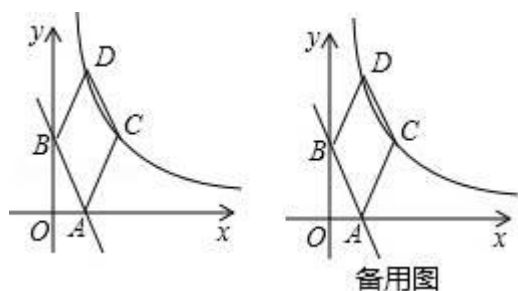
	A	B	C
A	A, A	B, A	C, A
B	A, B	B, B	C, B
C	A, C	B, C	C, C

共有 9 种等可能的结果，其中两人恰好选中同一门校本课程的结果有 3 种，所以两人恰好选中同一门校本课程的概率为： $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

【点评】 本题考查了列表法或树形图、用样本估计总体、频数分布表、扇形统计图等知识点，能根据题意列出算式是解此题的关键.

25. (10 分) 如图，直线 $y=ax+2$ 与 x 轴交于点 $A(1, 0)$ ，与 y 轴交于点 $B(0, b)$. 将线段 AB 先向右平移 1 个单位长度、再向上平移 t ($t>0$) 个单位长度，得到对应线段 CD ，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象恰好经过 C 、 D 两点，连接 AC 、 BD .

- (1) 求 a 和 b 的值；
- (2) 求反比例函数的表达式及四边形 $ABDC$ 的面积；
- (3) 点 N 在 x 轴正半轴上，点 M 是反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 的图象上的一个点，若 $\triangle CMN$ 是以 CM 为直角边的等腰直角三角形时，求所有满足条件的点 M 的坐标.



- 【分析】** (1) 利用坐标轴上的点的特点即可得出结论；
- (2) 先表示出点 C 、 D 坐标，进而代入反比例函数解析式中求解得出 k ，再判断出 $BC \perp AD$ ，最后用对角线积的一半即可求出四边形的面积；
- (3) 分两种情况，构造全等的直角三角形即可得出结论.

【解答】 解：(1) 将点 $A(1, 0)$ 代入 $y=ax+2$ ，得 $0=a+2$.

$$\therefore a = -2.$$

$$\therefore \text{直线的解析式为 } y = -2x + 2.$$

$$\text{将 } x=0 \text{ 代入上式，得 } y=2.$$

$$\therefore b=2.$$

(2) 由 (1) 知, $b=2$, $\therefore B(0, 2)$,

由平移可得: 点 $C(2, t)$ 、 $D(1, 2+t)$.

将点 $C(2, t)$ 、 $D(1, 2+t)$ 分别代入 $y=\frac{k}{x}$, 得
$$\begin{cases} t=\frac{k}{2} \\ 2+t=\frac{k}{1} \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} k=4 \\ t=2 \end{cases}.$$

$\therefore$ 反比例函数的解析式为 $y=\frac{4}{x}$, 点 $C(2, 2)$ 、点 $D(1, 4)$.

如图 1, 连接 BC 、 AD .

$\because B(0, 2)$ 、 $C(2, 2)$,

$\therefore BC \parallel x$ 轴, $BC=2$.

$\because A(1, 0)$ 、 $D(1, 4)$,

$\therefore AD \perp x$ 轴, $AD=4$.

$\therefore BC \perp AD$.

$$\therefore S_{\text{四边形}ABDC} = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4.$$

(3) ①当 $\angle NCM=90^\circ$ 、 $CM=CN$ 时,

如图 2, 过点 C 作直线 $l \parallel x$ 轴, 交 y 轴于点 G . 过点 M 作 $MF \perp$ 直线 l 于点 F , 交 x 轴于点 H . 过点 N 作 $NE \perp$ 直线 l 于点 E .

设点 $N(m, 0)$ (其中 $m>0$), 则 $ON=m$, $CE=2-m$.

$\because \angle MCN=90^\circ$,

$\therefore \angle MCF + \angle NCE = 90^\circ$.

$\because NE \perp$ 直线 l 于点 E ,

$\therefore \angle ENC + \angle NCE = 90^\circ$.

$\therefore \angle MCF = \angle ENC$.

又 $\because \angle MFC = \angle NEC = 90^\circ$, $CN=CM$,

$\therefore \triangle NEC \cong \triangle CFM$.

$$\therefore CF=EN=2, FM=CE=2-m.$$

$$\therefore FG=CG+CF=2+2=4.$$

$$\therefore x_M=4.$$

将 $x=4$ 代入 $y=\frac{4}{x}$, 得 $y=1$.

$$\therefore \text{点 } M(4, 1);$$

②当 $\angle NMC=90^\circ$ 、 $MC=MN$ 时,

如图 3, 过点 C 作直线 $l \perp y$ 轴与点 F, 则 $CF=x_C=2$.

过点 M 作 $MG \perp x$ 轴于点 G, MG 交直线 l 于点 E, 则 $MG \perp$ 直线 l 于点 E, $EG=y_C=2$.

$$\because \angle CMN=90^\circ,$$

$$\therefore \angle CME + \angle NMG = 90^\circ.$$

$$\because ME \perp \text{直线 } l \text{ 于点 } E,$$

$$\therefore \angle ECM + \angle CME = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle NMG = \angle ECM.$$

$$\text{又 } \because \angle CEM = \angle NGM = 90^\circ, CM = MN,$$

$$\therefore \triangle CEM \cong \triangle MGN.$$

$$\therefore CE = MG, EM = NG.$$

设 $CE = MG = a$, 则 $y_M = a$, $x_M = CF + CE = 2 + a$.

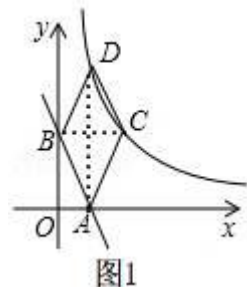
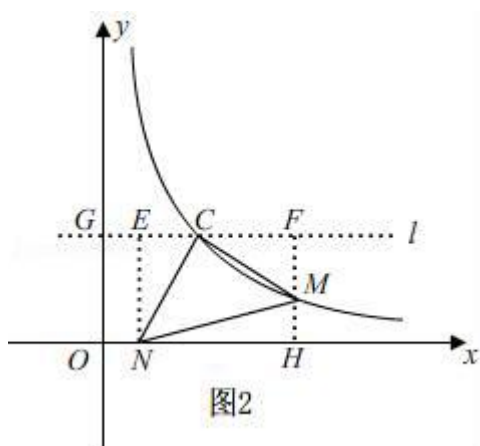
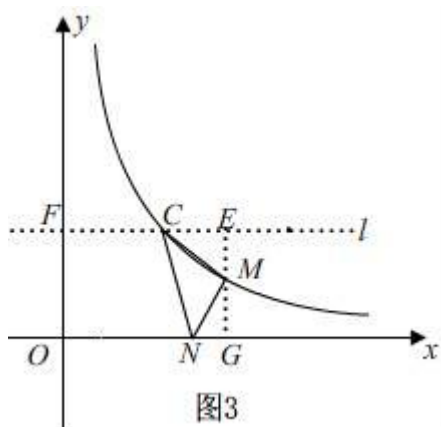
$$\therefore \text{点 } M(2+a, a).$$

将点 $M(2+a, a)$ 代入 $y=\frac{4}{x}$, 得 $a=\frac{4}{2+a}$. 解得 $a_1=\sqrt{5}-1$, $a_2=-\sqrt{5}-1$.

$$\therefore x_M = 2+a = \sqrt{5}+1.$$

$$\therefore \text{点 } M(\sqrt{5}+1, \sqrt{5}-1).$$

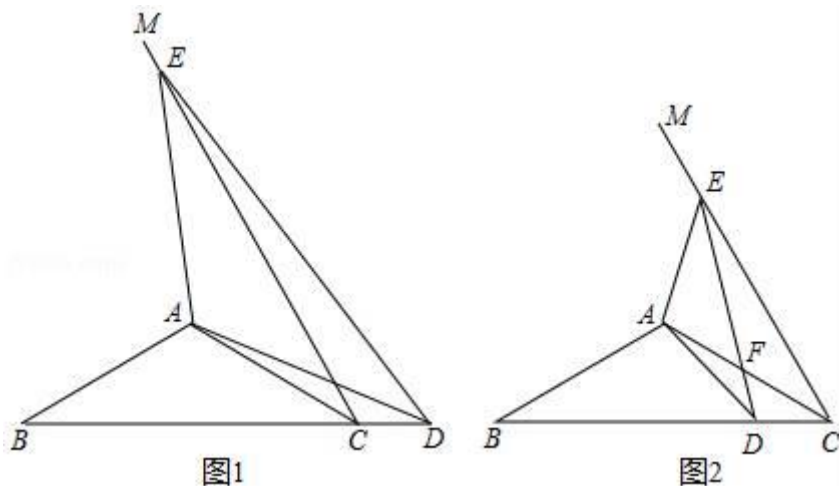
综合①②可知: 点 M 的坐标为 $(4, 1)$ 或 $(\sqrt{5}+1, \sqrt{5}-1)$.



【点评】此题是反比例函数综合题，主要考查了待定系数法，全等三角形的判定和性质，四边形的面积的计算方法，构造出全等三角形是解本题的关键．

26. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC$ ， $\angle BAC=120^\circ$ ，以 CA 为边在 $\angle ACB$ 的另一侧作 $\angle ACM=\angle ACB$ ，点 D 为射线 BC 上任意一点，在射线 CM 上截取 $CE=BD$ ，连接 AD 、 DE 、 AE ．

- (1) 如图 1，当点 D 落在线段 BC 的延长线上时，直接写出 $\angle ADE$ 的度数；
- (2) 如图 2，当点 D 落在线段 BC （不含边界）上时， AC 与 DE 交于点 F ，请问（1）中的结论是否仍成立？如果成立，请给出证明；如果不成立，请说明理由；
- (3) 在（2）的条件下，若 $AB=6$ ，求 CF 的最大值．



- 【分析】(1) 利用 SAS 定理证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$, 根据相似三角形的性质得到 $AD = AE$, $\angle CAE = \angle BAD$, 根据等腰三角形的性质、三角形内角和定理计算即可证明;
- (2) 同 (1) 的证明方法相同;
- (3) 证明 $\triangle ADF \sim \triangle ACD$, 根据相似三角形的性质得到 $AF = \frac{AD^2}{6}$, 求出 AD 的最小值, 得到 AF 的最小值, 求出 CF 的最大值.

【解答】解: (1) $\angle ADE = 30^\circ$.

理由如下: $\because AB = AC, \angle BAC = 120^\circ$,

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 30^\circ,$$

$$\because \angle ACM = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ACM = \angle ABC,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB = AC \\ \angle ABC = \angle ACE, \\ BD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE,$$

$$\therefore AD = AE, \angle CAE = \angle BAD,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ADE = 30^\circ;$$

(2) (1) 中的结论成立,

证明: $\because \angle BAC = 120^\circ, AB = AC$,

$$\therefore \angle B = \angle ACB = 30^\circ.$$

$$\because \angle ACM = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACM = 30^\circ.$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle ABC=\angle ACE, \\ BD=CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACE.$$

$$\therefore AD=AE, \angle BAD = \angle CAE.$$

$$\therefore \angle CAE + \angle DAC = \angle BAD + \angle DAC = \angle BAC = 120^\circ. \text{ 即 } \angle DAE = 120^\circ.$$

$$\therefore AD=AE,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle AED = 30^\circ;$$

$$(3) \because AB=AC, AB=6,$$

$$\therefore AC=6,$$

$$\therefore \angle ADE = \angle ACB = 30^\circ \text{ 且 } \angle DAF = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ADF \sim \triangle ACD.$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AF}{AD}.$$

$$\therefore AD^2 = AF \cdot AC.$$

$$\therefore AD^2 = 6AF.$$

$$\therefore AF = \frac{AD^2}{6}.$$

$\therefore$ 当 AD 最短时, AF 最短、 CF 最长.

易得当 $AD \perp BC$ 时, AF 最短、 CF 最长, 此时 $AD = \frac{1}{2}AB = 3$.

$$\therefore AF_{\text{最短}} = \frac{AD^2}{6} = \frac{3^2}{6} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore CF_{\text{最长}} = AC - AF_{\text{最短}} = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}.$$

【点评】 本题考查的是相似三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质, 掌握相似三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

27. (12 分) 如图 1, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 4$ 过 $A(2, 0)$ 、 $B(4, 0)$ 两点, 交 y 轴于点 C , 过点 C 作 x 轴的平行线与抛物线上的另一个交点为 D , 连接 AC 、 BC . 点 P 是该抛物线上一动点, 设点 P 的横坐标为 m ($m > 4$).

(1) 求该抛物线的表达式和 $\angle ACB$ 的正切值;

(2) 如图 2, 若 $\angle ACP = 45^\circ$, 求 m 的值;

(3) 如图 3, 过点 A、P 的直线与 y 轴于点 N, 过点 P 作 $PM \perp CD$, 垂足为 M, 直线 MN 与 x 轴交于点 Q, 试判断四边形 ADMQ 的形状, 并说明理由.

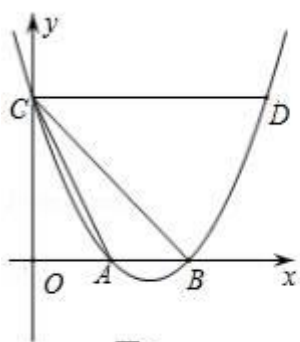


图 1

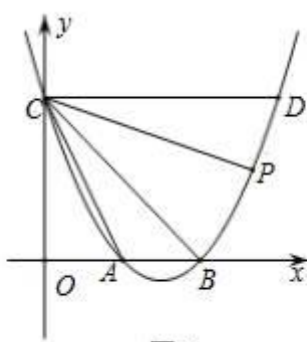


图 2

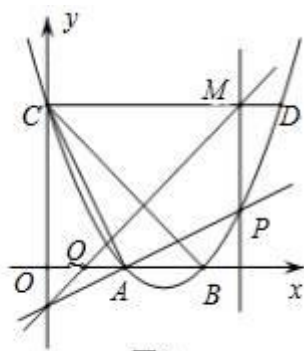


图 3

【分析】 (1) 由点 A、B 坐标利用待定系数法求解可得抛物线解析式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$, 作 $BG \perp CA$, 交 CA 的延长线于点 G, 证 $\triangle GAB \sim \triangle OAC$ 得 $\frac{BG}{AG} = \frac{OC}{OA}$, 据此知 $BG = 2AG$. 在 $Rt \triangle ABG$ 中根据 $BG^2 + AG^2 = AB^2$, 可求得 $AG = \frac{2}{5}\sqrt{5}$. 继而可得

$$BG = \frac{4}{5}\sqrt{5}, CG = AC + AG = \frac{12\sqrt{5}}{5}, \text{ 根据正切函数定义可得答案;}$$

(2) 作 $BH \perp CD$ 于点 H, 交 CP 于点 K, 连接 AK, 易得四边形 OBHC 是正方形, 应用“全角夹半角”可得 $AK = OA + HK$, 设 $K(4, h)$, 则 $BK = h$, $HK = HB - KB = 4 - h$, $AK = OA + HK = 2 + (4 - h) = 6 - h$. 在 $Rt \triangle ABK$ 中, 由勾股定理求得 $h = \frac{8}{3}$, 据此求得点 $K(4, \frac{8}{3})$. 待定系数法求出直线 CK 的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 4$. 设点 P 的坐标为 (x, y) 知 x 是方程 $\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4 = -\frac{1}{3}x + 4$ 的一个解. 解之求得 x 的值即可得出答案.

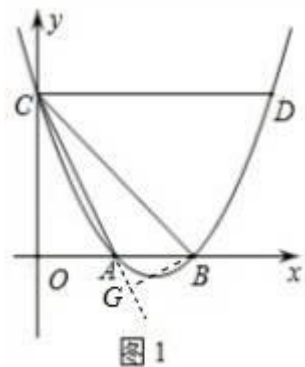
(3) 先求出点 D 坐标为 $(6, 4)$, 设 $P(m, \frac{1}{2}m^2 - 3m + 4)$ 知 $M(m, 4)$, $H(m, 0)$. 及 $PH = \frac{1}{2}m^2 - 3m + 4$, $OH = m$, $AH = m - 2$, $MH = 4$. ①当 $4 < m < 6$ 时, 由 $\triangle OAN \sim \triangle HAP$ 知 $\frac{ON}{PH} = \frac{OA}{AH}$. 据此得 $ON = m - 4$. 再证 $\triangle ONQ \sim \triangle HMQ$ 得 $\frac{ON}{HM} = \frac{OQ}{HQ}$. 据此求得 $OQ = m - 4$. 从而得出 $AQ = DM = 6 - m$. 结合 $AQ \parallel DM$ 可得答案. ②当 $m > 6$ 时, 同理可得.

【解答】 解: (1) 将点 A $(2, 0)$ 和点 B $(4, 0)$ 分别代入 $y = ax^2 + bx + 4$, 得 $\begin{cases} 4a + 2b + 4 = 0 \\ 16a + 4b + 4 = 0 \end{cases}$,

$$\text{解得: } \begin{cases} a=\frac{1}{2} \\ b=-3 \end{cases}.$$

$\therefore$ 该抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+4$.

过点 B 作 $BG \perp CA$, 交 CA 的延长线于点 G (如图 1 所示), 则 $\angle G=90^\circ$.



$\because \angle COA = \angle G = 90^\circ$, $\angle CAO = \angle BAG$,

$\therefore \triangle GAB \sim \triangle OAC$.

$$\therefore \frac{BG}{AG} = \frac{OC}{OA} = \frac{4}{2} = 2.$$

$\therefore BG = 2AG$.

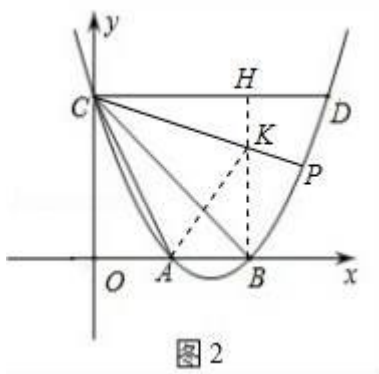
在 $Rt\triangle ABG$ 中, $\because BG^2 + AG^2 = AB^2$,

$$\therefore (2AG)^2 + AG^2 = 2^2. \text{ 解得: } AG = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\therefore BG = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \quad CG = AC + AG = 2\sqrt{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{12\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{在 } Rt\triangle BCG \text{ 中, } \tan \angle ACB = \frac{BG}{CG} = \frac{1}{3}.$$

(2) 如图 2, 过点 B 作 $BH \perp CD$ 于点 H, 交 CP 于点 K, 连接 AK. 易得四边形 OBHC 是正方形.



应用“全角夹半角”可得 $AK=OA+HK$.

设 $K(4, h)$, 则 $BK=h$, $HK=HB-KB=4-h$, $AK=OA+HK=2+(4-h)=6-h$.

在 $Rt\triangle ABK$ 中, 由勾股定理, 得 $AB^2+BK^2=AK^2$.

$$\therefore 2^2+h^2=(6-h)^2. \text{ 解得 } h=\frac{8}{3}.$$

$$\therefore \text{点 } K\left(4, \frac{8}{3}\right).$$

设直线 CK 的解析式为 $y=hx+4$.

$$\text{将点 } K\left(4, \frac{8}{3}\right) \text{ 代入上式, 得 } \frac{8}{3}=4h+4. \text{ 解得 } h=-\frac{1}{3}.$$

$$\therefore \text{直线 } CK \text{ 的解析式为 } y=-\frac{1}{3}x+4.$$

设点 P 的坐标为 (x, y) , 则 x 是方程 $\frac{1}{2}x^2-3x+4=-\frac{1}{3}x+4$ 的一个解.

将方程整理, 得 $3x^2-16x=0$.

$$\text{解得 } x_1=\frac{16}{3}, x_2=0 \text{ (不合题意, 舍去)}.$$

$$\text{将 } x_1=\frac{16}{3} \text{ 代入 } y=-\frac{1}{3}x+4, \text{ 得 } y=\frac{20}{9}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{16}{3}, \frac{20}{9}\right).$$

(3) 四边形 $ADMQ$ 是平行四边形. 理由如下:

$\because CD \parallel x$ 轴,

$$\therefore y_C=y_D=4.$$

$$\text{将 } y=4 \text{ 代入 } y=\frac{1}{2}x^2-3x+4, \text{ 得 } 4=\frac{1}{2}x^2-3x+4.$$

$$\text{解得 } x_1=0, x_2=6.$$

$$\therefore \text{点 } D(6, 4).$$

式、相似三角形的判定与性质、平行四边形的判定与性质及勾股定理、三角函数等知识点.