

山东省泰安市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题（本大题共 12 个小题，在每小题给出的四个选项中，只有一个是正确的，请把正确的选项选出来，每小题选对 3 分，选错、不选或选出的答案超过一个，均记零分）

1. 计算： $-(-2)+(-2)^0$ 的结果是（ ）

A. -3 B. 0 C. -1 D. 3

【答案】D

【解析】分析：根据相反数的概念、零指数幂的运算法则计算即可.

详解：原式 $=2+1$

$=3$.

故选 D.

点睛：本题考查的是零指数幂的运算，掌握任何非零数的零次幂等于 1 是解题的关键.

2. 下列运算正确的是（ ）

A. $2y^3+y^3=3y^6$ B. $y^2 \cdot y^3=y^6$ C. $(3y^2)^3=9y^6$ D. $y^3 \div y^{-2}=y^5$

【答案】D

【解析】分析：根据合并同类项法则、同底数幂的乘、除法法则、积的乘方法则计算，判断即可.

详解： $2y^3+y^3=3y^3$ ，故 A 错误；

$y^2 \cdot y^3=y^5$ ，故 B 错误；

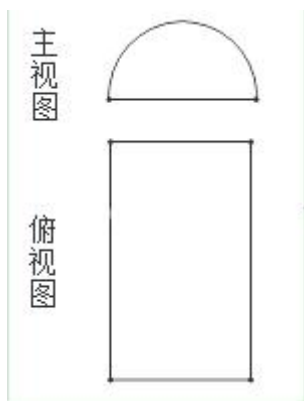
$(3y^2)^3=27y^6$ ，故 C 错误；

$y^3 \div y^{-2}=y^{3-(-2)}=y^5$ ，故 D 正确.

故选 D.

点睛：本题考查的是合并同类项、同底数幂的乘法、积的乘方、同底数幂的除法，掌握它们的运算法则是解题的关键.

3. 如图是下列哪个几何体的主视图与俯视图（ ）



【答案】C

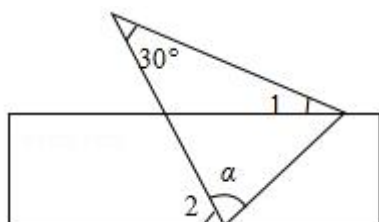
【解析】分析：直接利用主视图以及俯视图的观察角度结合几何体的形状得出答案.

详解：由已知主视图和俯视图可得到该几何体是圆柱体的一半，只有选项 C 符合题意.

故选 C.

点睛：本题主要考查了由三视图判断几何体，正确掌握常见几何体的形状是解题的关键.

4. 如图，将一张含有 30° 角的三角形纸片的两个顶点叠放在矩形的两条对边上，若 $\angle 2 = 44^\circ$ ，则 $\angle 1$ 的大小为 ()



- A. 14° B. 16° C. $90^\circ - \alpha$ D. $\alpha - 44^\circ$

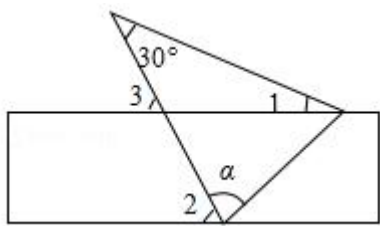
【答案】A

【解析】分析：依据平行线的性质，即可得到 $\angle 2 = \angle 3 = 44^\circ$ ，再根据三角形外角性质，可得 $\angle 3 = \angle 1 + 30^\circ$ ，进而得出结论.

详解：如图， $\because$ 矩形的对边平行， $\therefore \angle 2 = \angle 3 = 44^\circ$ ，根据三角形外角性质，可得： $\angle 3 = \angle 1 + 30^\circ$ ，

$\therefore \angle 1 = 44^\circ - 30^\circ = 14^\circ$.

故选 A.



点睛：本题主要考查了平行线的性质以及三角形外角性质的运用，解题时注意：两直线平行，同位角相等.

5. 某中学九年级二班六级的 8 名同学在一次排球垫球测试中的成绩如下（单位：个）

35 38 42 44 40 47 45 45

则这组数据的中位数、平均数分别是（ ）

A. 42、42 B. 43、42 C. 43、43 D. 44、43

【答案】B

【解析】分析：根据中位数的概念求出中位数，利用算术平均数的计算公式求出平均数.

详解：把这组数据排列顺序得：35 38 40 42 44 45 45 47，则这组数据的中位数为： $\frac{42+44}{2}=43$ ， $\bar{x}=\frac{1}{8}$

$(35+38+42+44+40+47+45+45) \div 8=42$.

故选 B.

点睛：本题考查的是中位数的确定、算术平均数的计算，掌握中位数的概念、算术平均数的计算公式是解题的关键.

6. 夏季来临，某超市试销A、B两种型号的风扇，两周内共销售 30 台，销售收入 5300 元，A型风扇每台 200 元，B型风扇每台 150 元，问A、B两种型号的风扇分别销售了多少台？若设A型风扇销售了x台，B型风扇销售了y台，则根据题意列出方程组为（ ）

A. $\begin{cases} x+y=5300 \\ 200x+150y=30 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x+y=5300 \\ 150x+200y=30 \end{cases}$
C. $\begin{cases} x+y=30 \\ 200x+150y=5300 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x+y=30 \\ 150x+200y=5300 \end{cases}$

【答案】C

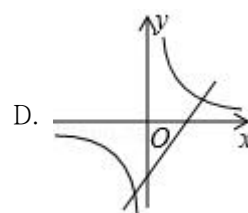
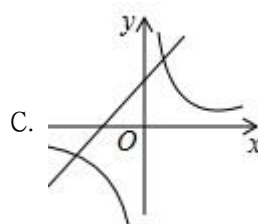
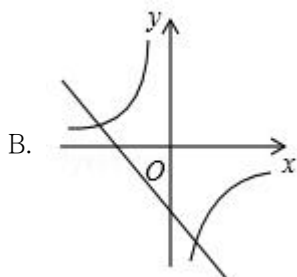
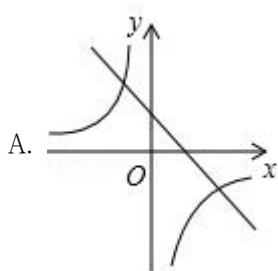
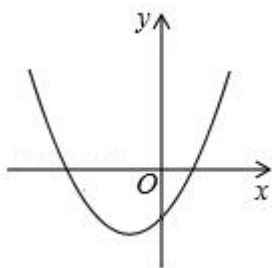
【解析】分析：直接利用两周内共销售 30 台，销售收入 5300 元，分别得出等式进而得出答案.

详解：设 A 型风扇销售了 x 台，B 型风扇销售了 y 台，则根据题意列出方程组为： $\begin{cases} x+y=30 \\ 200x+150y=5300 \end{cases}$.

故选 C.

点睛：本题主要考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，正确得出等量关系是解题的关键.

7. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示，则反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 与一次函数 $y = ax + b$ 在同一坐标系内的大致图象是 ()



【答案】C

【解析】分析：首先利用二次函数图象得出 a ， b 的取值范围，进而结合反比例函数以及一次函数的性质得出答案.

详解：由二次函数开口向上可得： $a > 0$ ，对称轴在 y 轴左侧，故 a ， b 同号，则 $b > 0$ ，故反比例函数 $y = \frac{a}{x}$ 图象分布在第一、三象限，一次函数 $y = ax + b$ 经过第一、二、三象限.

故选 C.

点睛：本题主要考查了二次函数、一次函数、反比例函数的图象，正确得出 a ， b 的取值范围是解题的关键.

8. 不等式组 $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{1}{2}x < -1 \\ 4(x-1) \leq 2(x-a) \end{cases}$ 有 3 个整数解，则 a 的取值范围是 ()

A. $-6 \leq a < -5$ B. $-6 < a \leq -5$ C. $-6 < a < -5$ D. $-6 \leq a \leq -5$

【答案】B

【解析】分析：解不等式组，可得不等式组的解，根据不等式组有 3 个整数解，可得答案.

详解：不等式组 $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{1}{2}x < -1 \\ 4(x-1) \leq 2(x-a) \end{cases}$ ，由 $\frac{x-1}{3} - \frac{1}{2}x < -1$ ，解得： $x > 4$ ，

由 $4(x-1) \leq 2(x-a)$ ，解得： $x \leq 2-a$ ，

故不等式组的解为: $4 < x \leq 2 - a$,

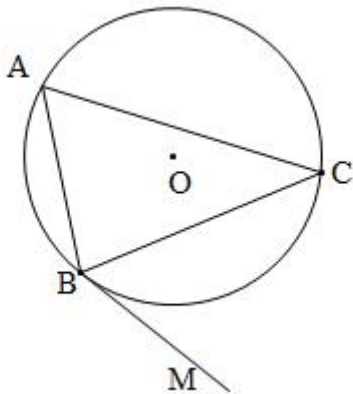
由关于 x 的不等式组 $\begin{cases} \frac{x-1}{3} - \frac{1}{2}x < -1 \\ 4(x-1) \leq 2(x-a) \end{cases}$ 有 3 个整数解,

得: $7 \leq 2 - a < 8$, 解得: $-6 < a \leq -5$.

故选 B.

点睛: 本题考查了解一元一次不等式组, 利用不等式的解得出关于 a 的不等式是解题的关键.

9. 如图, BM 与 $\odot O$ 相切于点 B , 若 $\angle MBA = 140^\circ$, 则 $\angle ACB$ 的度数为 ()



A. 40° B. 50° C. 60° D. 70°

【答案】A

【解析】分析: 连接 OA 、 OB , 由切线的性质知 $\angle OBM = 90^\circ$, 从而得 $\angle ABO = \angle BAO = 50^\circ$, 由三角形内角和定理知 $\angle AOB = 80^\circ$, 根据圆周角定理可得答案.

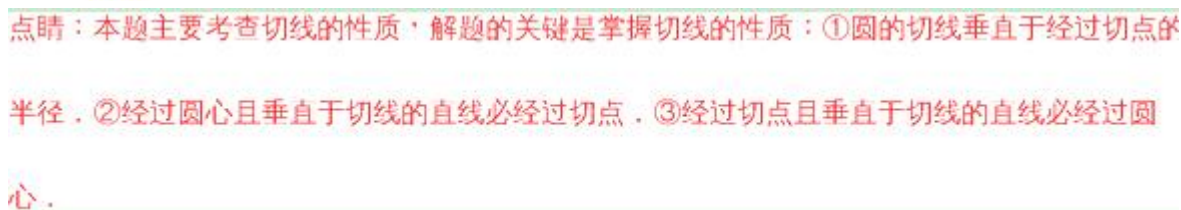
详解: 如图, 连接 OA 、 OB .

$\because BM$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OBM = 90^\circ$.

$\because \angle MBA = 140^\circ$, $\therefore \angle ABO = 50^\circ$.

$\because OA = OB$, $\therefore \angle ABO = \angle BAO = 50^\circ$, $\therefore \angle AOB = 80^\circ$, $\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB = 40^\circ$.

故选 A.



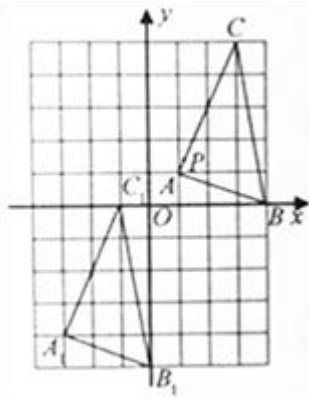
A. 无实数根 B. 有一个正根, 一个负根

【答案】 D

详解: $(x+1)(x-3)=2x-5$

故选 D.

11. 如图，将正方形网格放置在平面直角坐标系中，其中每个小正方形的边长均为 1， $\triangle ABC$ 经过平移后得到 $\triangle A_1B_1C_1$ ，若 AC 上一点 $P(1.2, 1.4)$ 平移后对应点为 P_1 ，点 P_1 绕原点顺时针旋转 180° ，对应点为 P_2 ，则点 P_2 的坐标为 ()



- A. (2.8,3.6) B. (-2.8,-3.6) C. (3.8,2.6) D. (-3.8,-2.6)

【答案】A

【解析】分析：由题意将点 P 向下平移 5 个单位，再向左平移 4 个单位得到 P_1 ，再根据 P_1 与 P_2 关于原点对称，即可解决问题.

详解：由题意将点 P 向下平移 5 个单位，再向左平移 4 个单位得到 P_1 .

$$\therefore P(1.2, 1.4), \therefore P_1(-2.8, -3.6).$$

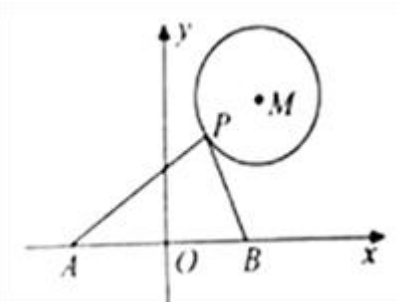
$$\therefore P_1 \text{ 与 } P_2 \text{ 关于原点对称}, \therefore P_2(2.8, 3.6).$$

故选 A.

点睛：本题考查了坐标与图形变化，平移变换，旋转变换等知识，解题的关键是理解题意，灵活

运用所学知识解决问题，属于中考常考题型.

12. 如图， $\odot M$ 的半径为 2，圆心 M 的坐标为 (3,4)，点 P 是 $\odot M$ 上的任意一点， $PA \perp PB$ ，且 PA 、 PB 与 x 轴分别交于 A 、 B 两点，若点 A 、点 B 关于原点 O 对称，则 AB 的最小值为 ()



- A. 3 B. 4 C. 6 D. 8

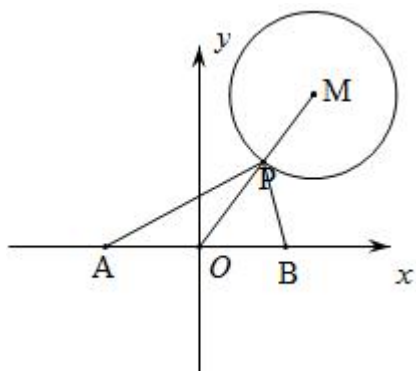
【答案】C

【解析】分析：连接 OP 。由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，得到 $OP = \frac{1}{2}AB$ ，当 OP 最短时， AB 最短。连接 OM 交 $\odot M$ 于点 P ，则此时 OP 最短，且 $OP = OM - PM$ ，计算即可得到结论.

详解：连接 OP .

$\because PA \perp PB, OA=OB, \therefore OP=\frac{1}{2}AB$, 当 OP 最短时, AB 最短.

连接 OM 交 $\odot M$ 于点 P , 则此时 OP 最短, 且 $OP=OM-PM=\sqrt{3^2+4^2}-2=3, \therefore AB$ 的最小值为 $2OP=6$. 故选 C.



点睛: 本题考查了直角三角形斜边上中线的性质以及两点间的距离公式. 解题的关键是利用直角三角形斜边上中线等于斜边的一半把 AB 的长转化为 $2OP$.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 满分 18 分. 只要求填写最后结果, 每小题填对得 3 分)

13. 一个铁原子的质量是 $0.00000000000000000000000093\text{kg}$, 将这个数据用科学记数法表示为_____kg.

【答案】 9.3×10^{-26}

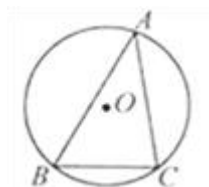
【解析】 分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 < 1 时, n 是负数; n 的绝对值等于第一个非零数前零的个数.

详解: $0.00000000000000000000000093=9.3 \times 10^{-26}$.

故答案为: 9.3×10^{-26} .

点睛: 本题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

14. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, $\angle A = 45^\circ$, $BC = 4$, 则 $\odot O$ 的直径为_____.



【答案】 $4\sqrt{2}$

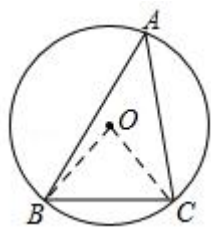
【解析】 分析: 连接 OB, OC , 依据 $\triangle BOC$ 是等腰直角三角形, 即可得到 $BO=CO=BC \cdot \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$, 进而得出 $\odot O$ 的直径为 $4\sqrt{2}$.

详解：如图，连接 OB ， OC 。

$\because \angle A = 45^\circ$ ， $\therefore \angle BOC = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle BOC$ 是等腰直角三角形。

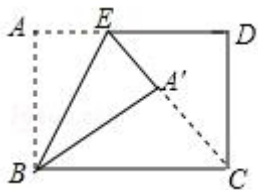
又 $\because BC = 4$ ， $\therefore BO = CO = BC \cdot \cos 45^\circ = 2\sqrt{2}$ ， $\therefore \odot O$ 的直径为 $4\sqrt{2}$ 。

故答案为： $4\sqrt{2}$ 。



点睛：本题主要考查了三角形的外接圆以及圆周角定理的运用，三角形外接圆的圆心是三角形三条边垂直平分线的交点，叫做三角形的外心。

15. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 10$ ，将矩形 $ABCD$ 沿 BE 折叠，点 A 落在 A' 处，若 EA' 的延长线恰好过点 C ，则 $\sin \angle ABE$ 的值为_____。



【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】分析：先利用勾股定理求出 $A'C$ ，进而利用勾股定理建立方程求出 AE ，即可求出 BE ，最后用三角函数即可得出结论。

详解：由折叠知， $A'E = AE$ ， $A'B = AB = 6$ ， $\angle BA'E = 90^\circ$ ， $\therefore \angle BA'C = 90^\circ$ 。在 $\text{Rt} \triangle A'CB$ 中，

$A'C = \sqrt{BC^2 - A'B^2} = 8$ ，设 $AE = x$ ，则 $A'E = x$ ， $\therefore DE = 10 - x$ ， $CE = A'C + A'E = 8 + x$ 。在 $\text{Rt} \triangle CDE$ 中，根据勾

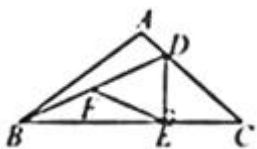
股定理得： $(10 - x)^2 + 36 = (8 + x)^2$ ， $\therefore x = 2$ ， $\therefore AE = 2$ 。在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中，根据勾股定理得：

$$BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = 2\sqrt{10}，\therefore \sin \angle ABE = \frac{AE}{BE} = \frac{\sqrt{10}}{10}。$$

故答案为： $\frac{\sqrt{10}}{10}$ 。

点睛：本题主要考查了折叠的性质，勾股定理，锐角三角函数，充分利用勾股定理求出线段 AE 是解答本题的关键。

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC = 6$ ， $BC = 10$ ， $\tan C = \frac{3}{4}$ ，点 D 是 AC 边上的动点（不与点 C 重合），过 D 作 $DE \perp BC$ ，垂足为 E ，点 F 是 BD 的中点，连接 EF ，设 $CD = x$ ， $\triangle DEF$ 的面积为 S ，则 S 与 x 之间的函数关系式为_____。



【答案】 $y = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{3}{2}x$

【解析】分析：由 $\tan C = \frac{3}{4} = \frac{DE}{CE}$ ， $CD=x$ ，得到 $DE=\frac{3}{5}x$ ， $CE=\frac{4}{5}x$ ，则 $BE=10-\frac{4}{5}x$ ，由 $\triangle DEB$ 的面积 S 等于 $\triangle BDE$ 面积的一半，即可得出结论。

详解： $\because DE \perp BC$ ，垂足为 E ， $\therefore \tan \angle C = \frac{DE}{CE} = \frac{3}{4}$ ， $CD=x$ ， $\therefore DE=\frac{3}{5}x$ ， $CE=\frac{4}{5}x$ ，则 $BE=10-\frac{4}{5}x$ ， $\therefore S = \frac{1}{2} S_{\triangle BED} = \frac{1}{4}$

$$(10 - \frac{4}{5}x) \cdot \frac{3}{5}x$$

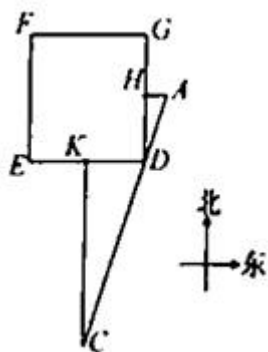
化简得： $y = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{3}{2}x$.

故答案为： $y = -\frac{3}{25}x^2 + \frac{3}{2}x$.

点睛：本题考查了动点问题的函数解析式，解题的关键是设法将 BE 与 DE 都用含有 x 的代数式表示。

17. 《九章算术》是中国传统数学最重要的著作，在“勾股”章中有这样一个问题：“今有邑方二百步，各中开门，出东门十五步有木，问：出南门几步而见木？”

用今天的话说，大意是：如图， $DEFG$ 是一座边长为 200 步（“步”是古代的长度单位）的正方形小城，东门 H 位于 GD 的中点，南门 K 位于 ED 的中点，出东门 15 步的 A 处有一树木，求出南门多少步恰好看到位于 A 处的树木（即点 D 在直线 AC 上）？请你计算 KC 的长为_____步。



【答案】 $\frac{2000}{3}$

【解析】分析：由正方形的性质得到 $\angle EDG=90^\circ$ ，从而 $\angle KDC+\angle HDA=90^\circ$ ，再由 $\angle C+\angle KDC=90^\circ$ ，得到 $\angle C=\angle HDA$ ，即有 $\triangle CKD \sim \triangle DHA$ ，由相似三角形的性质得到 $CK:KD=HD:HA$ ，求解即可得到结论。

详解： $\because DEFG$ 是正方形， $\therefore \angle EDG=90^\circ$ ， $\therefore \angle KDC+\angle HDA=90^\circ$ 。

$\because \angle C+\angle KDC=90^\circ$ ， $\therefore \angle C=\angle HDA$ 。

$\therefore \angle CKD = \angle DHA = 90^\circ$, $\therefore \triangle CKD \sim \triangle DHA$,

$\therefore CK: KD = HD: HA$, $\therefore CK: 100 = 100: 15$,

解得: $CK = \frac{2000}{3}$.

故答案为: $\frac{2000}{3}$.

点睛: 本题考查了相似三角形的应用. 解题的关键是证明 $\triangle CKD \sim \triangle DHA$.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 满分 66 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

18. 先化简, 再求值: $\frac{m^2 - 4m + 4}{m - 1} \div (\frac{3}{m - 1} - m - 1)$, 其中 $m = \sqrt{2} - 2$.

【答案】 $\frac{2 - m}{2 + m}$, $2\sqrt{2} - 1$.

【解析】 分析: 先根据分式的混合运算顺序和运算法则化简原式, 再将 m 的值代入计算可得.

$$\begin{aligned}\text{详解: 原式} &= \frac{(m - 2)^2}{m - 1} \div \left(\frac{3}{m - 1} - \frac{m^2 - 1}{m - 1} \right) \\ &= \frac{(m - 2)^2}{m - 1} \div \frac{4 - m^2}{m - 1} \\ &= \frac{(m - 2)^2}{m - 1} \cdot \frac{m - 1}{-(m + 2)(m - 2)} \\ &= -\frac{m - 2}{m + 2} \\ &= \frac{2 - m}{2 + m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{当 } m = \sqrt{2} - 2 \text{ 时, 原式} &= -\frac{\sqrt{2} - 2 - 2}{\sqrt{2} - 2 + 2} \\ &= -\frac{\sqrt{2} - 4}{\sqrt{2}} \\ &= -1 + 2\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 1.\end{aligned}$$

点睛: 本题主要考查分式的化简求值, 解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

19. 文美书店决定用不多于 20000 元购进甲乙两种图书共 1200 本进行销售. 甲、乙两种图书的进价分别为每本 20 元、14 元, 甲种图书每本的售价是乙种图书每本售价的 1.4 倍, 若用 1680 元在文美书店可购买甲种图书的本数比用 1400 元购买乙种图书的本数少 10 本.

(1) 甲乙两种图书的售价分别为每本多少元?

(2) 书店为了让利读者, 决定甲种图书售价每本降低 3 元, 乙种图书售价每本降低 2 元, 问书店应如何进货才能获得最大利润? (购进的两种图书全部销售完.)

【答案】(1) 甲种图书售价每本 28 元, 乙种图书售价每本 20 元; (2) 甲种图书进货 533 本, 乙种图书进货 667 本时利润最大.

【解析】分析: (1) 乙种图书售价每本 x 元, 则甲种图书售价为每本 $1.4x$ 元, 根据 “用 1680 元在文美书店可购买甲种图书的本数比用 1400 元购买乙种图书的本数少 10 本” 列出方程求解即可;

(2) 设甲种图书进货 a 本, 总利润 w 元, 根据题意列出不等式及一次函数, 解不等式求出解集, 从而确定方案, 进而求出利润最大的方案.

详解: (1) 设乙种图书售价每本 x 元, 则甲种图书售价为每本 $1.4x$ 元. 由题意得:

$$\frac{1400}{x} - \frac{1600}{1.4x} = 10,$$

解得: $x = 20$.

经检验, $x = 20$ 是原方程的解.

所以, 甲种图书售价为每本 $1.4 \times 20 = 28$ 元,

答: 甲种图书售价每本 28 元, 乙种图书售价每本 20 元.

(2) 设甲种图书进货 a 本, 总利润 w 元, 则

$$w = (28 - 20 - 3)a + (20 - 14 - 2)(1200 - a) = a + 4800.$$

$$\text{又} \because 20a + 14 \times (1200 - a) \leq 20000,$$

$$\text{解得: } a \leq \frac{1600}{3}.$$

$\therefore w$ 随 a 的增大而增大,

$\therefore$ 当 a 最大时 w 最大,

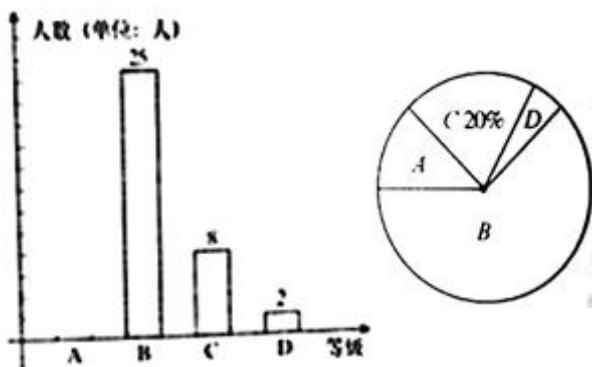
$\therefore$ 当 $a = 533$ 本时 w 最大,

此时, 乙种图书进货本数为 $1200 - 533 = 667$ (本).

答: 甲种图书进货 533 本, 乙种图书进货 667 本时利润最大.

点睛: 本题考查了一次函数的应用, 分式方程的应用, 一元一次不等式的应用, 理解题意找到题目蕴含的相等关系或不等关系是解应用题的关键.

20. 为增强学生的安全意识, 我市某中学组织初三年级 1000 名学生参加了 “校园安全知识竞赛”, 随机抽取了一个班学生的成绩进行整理, 分为 A, B, C, D 四个等级, 并把结果整理绘制成条形统计图与扇形统计图 (部分), 请依据如图提供的信息, 完成下列问题:



(1) 请估计本校初三年级等级为A的学生人数;

(2) 学校决定从得满分的3名女生和2名男生中随机抽取3人参加市级比赛, 请求出恰好抽到2名女生和1名男生的概率.

【答案】(1) 估计该校初三等级为A的学生人数约为125人; (2) 恰有2名女生, 1名男生的概率为 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

【解析】分析: (1) 先根据C等级人数及其所占百分比求得总人数, 用总人数减去B、C、D的人数求得A等级人数, 再用总人数乘以样本中A等级人数所占比例;

(2) 列出从3名女生和2名男生中随机抽取3人的所有等可能结果, 再从中找到恰好抽到2名女生和1名男生的结果数, 根据概率公式计算可得.

详解: (1) $\because$ 所抽取学生的总数为 $8 \div 20\% = 40$ 人, $\therefore$ 该班级等级为A的学生人数为 $40 - (25 + 8 + 2) = 5$ 人, 则估计本校初三年级等级为A的学生人数为 $1000 \times \frac{5}{40} = 125$ 人;

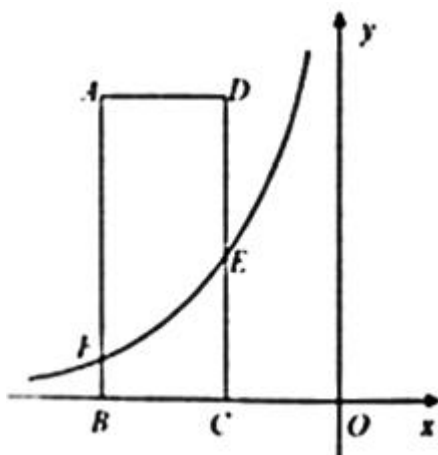
(2) 设两位满分的男生记为 A_1 、 A_2 、三位满分的女生记为 B_1 、 B_2 、 B_3 , 从这5名同学中选3人的所有等可能结果为:

(B_1, B_2, B_3) 、 (A_2, B_2, B_3) 、 (A_2, B_1, B_3) 、 (A_2, B_1, B_2) 、 (A_1, B_2, B_3) 、

(A_1, B_1, B_3) 、 (A_1, B_1, B_2) 、 (A_1, A_2, B_3) 、 (A_1, A_2, B_2) 、 (A_1, A_2, B_1) , 其中恰好有2名女生、1名男生的结果有6种, 所以恰好抽到2名女生和1名男生的概率为 $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$.

点睛: 本题考查了列表法或树状图法求概率以及条形统计图与扇形统计图. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

21. 如图, 矩形ABCD的两边AD、AB的长分别为3、8, E是DC的中点, 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象经过点E, 与AB交于点F.



(1) 若点B坐标为 $(-6,0)$, 求 m 的值及图象经过A、E两点的一次函数的表达式;

(2) 若 $AF-AE=2$, 求反比例函数的表达式.

【答案】(1) $m=-12$, $y=-\frac{4}{3}x$; (2) $y=-\frac{4}{x}$.

【解析】分析: (1) 由已知求出A、E的坐标, 即可得出 m 的值和一次函数函数的解析式;

(2) 由 $AD=3$, $DE=4$, 得到 $AE=5$, 由 $AF-AE=2$, 得到 $AF=7$, $BF=1$. 设E点坐标为 $(a, 4)$, 则点F坐标为 $(a-3, 1)$, 代入反比例函数解析式即可得到结论.

详解: (1) $\because B(-6, 0)$, $AD=3$, $AB=8$, E为CD的中点,

$\therefore E(-3, 4)$, $A(-6, 8)$.

$\because$ 反比例函数图象过点 $E(-3, 4)$,

$\therefore m = -3 \times 4 = -12$.

设图象经过A、E两点的一次函数表达式为: $y=kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} -6k+b=8 \\ -3k+b=4 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=-\frac{4}{3} \\ b=0 \end{cases},$$

$$\therefore y = -\frac{4}{3}x.$$

(2) $\because AD=3$, $DE=4$,

$\therefore AE=5$.

$\because AF-AE=2$,

$\therefore AF=7$,

$\therefore BF=1$.

设E点坐标为 $(a, 4)$, 则点F坐标为 $(a-3, 1)$.

$\therefore E, F$ 两点在 $y = \frac{m}{x}$ 图象上,

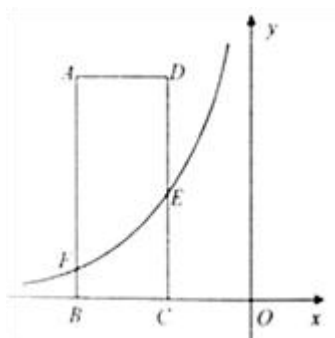
$$\therefore 4a = a - 3,$$

解得: $a = -1$,

$$\therefore E(-1, 4),$$

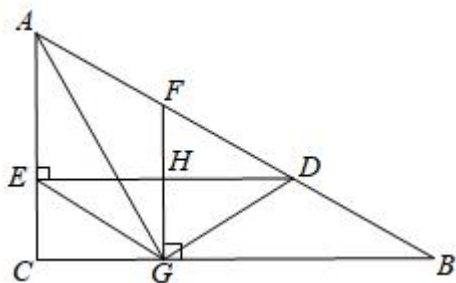
$$\therefore m = -4,$$

$$\therefore y = -\frac{4}{x}.$$



点睛: 本题考查了矩形的性质以及反比例函数一次函数的解析式. 解题的关键是求出点 A, E, F 的坐标.

22. 如图, $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 上一点, $DE \perp AC$ 于点 E , F 是 AD 的中点, $FG \perp BC$ 于点 G , 与 DE 交于点 H , 若 $FG = AF$, AG 平分 $\angle CAB$, 连接 GE, GD .



- (1) 求证: $\triangle ECG \cong \triangle GHD$;
- (2) 小亮同学经过探究发现: $AD = AC + EC$. 请你帮助小亮同学证明这一结论.
- (3) 若 $\angle B = 30^\circ$, 判定四边形 $AEGF$ 是否为菱形, 并说明理由.

【答案】 (1) 证明见解析; (2) 证明见解析; (3) 四边形 $AEGF$ 是菱形, 理由见解析.

【解析】 分析: (1) 由条件得出 $\angle C = \angle DHG = 90^\circ$, $\angle CGE = \angle GED$, 由 F 是 AD 的中点, $FG \parallel AE$, 即可得到 FG 是线段 ED 的垂直平分线, 进而得到 $GE = GD$, $\angle CGE = \angle GDE$, 利用 AAS 即可判定 $\triangle ECG \cong \triangle GHD$;

(2) 过点 G 作 $GP \perp AB$ 于 P , 判定 $\triangle CAG \cong \triangle PAG$, 可得 $AC = AP$, 由 (1) 可得 $EG = DG$, 即可得到 $\text{Rt} \triangle ECG \cong \text{Rt} \triangle GPD$, 依据 $EC = PD$, 即可得出 $AD = AP + PD = AC + EC$;

(3) 由 $\angle B=30^\circ$, 可得 $\angle ADE=30^\circ$, 进而得到 $AE=\frac{1}{2}AD$, 故 $AE=AF=FG$, 再根据四边形 $AECF$ 是平行四边形, 即可得到四边形 $AEGF$ 是菱形.

详解: (1) $\because AF=FG, \therefore \angle FAG=\angle FGA$.

$\because AG$ 平分 $\angle CAB, \therefore \angle CAG=\angle FGA, \therefore \angle CAG=\angle FGA, \therefore AC \parallel FG$.

$\because DE \perp AC, \therefore FG \perp DE$.

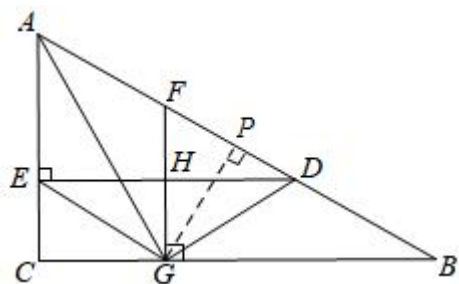
$\because FG \perp BC, \therefore DE \parallel BC, \therefore AC \perp BC, \therefore \angle C=\angle DHG=90^\circ, \angle CGE=\angle GED$.

$\because F$ 是 AD 的中点, $FG \parallel AE, \therefore H$ 是 ED 的中点, $\therefore FG$ 是线段 ED 的垂直平分线, $\therefore GE=GD, \angle GDE=\angle GED, \therefore \angle CGE=\angle GDE, \therefore \triangle ECG \cong \triangle GHD$;

(2) 过点 G 作 $GP \perp AB$ 于 $P, \therefore GC=GP$, 而 $AG=AG, \therefore \triangle CAG \cong \triangle PAG, \therefore AC=AP$, 由 (1) 可得 $EG=DG, \therefore \text{Rt} \triangle ECG \cong \text{Rt} \triangle GPD, \therefore EC=PD, \therefore AD=AP+PD=AC+EC$;

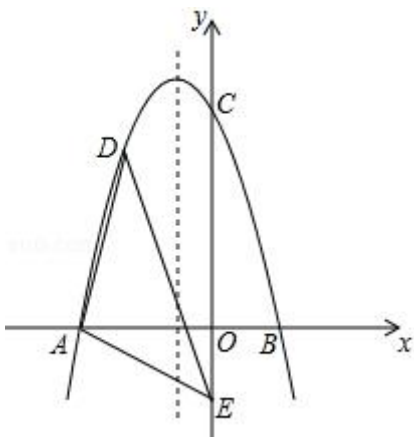
(3) 四边形 $AEGF$ 是菱形. 证明如下:

$\because \angle B=30^\circ, \therefore \angle ADE=30^\circ, \therefore AE=\frac{1}{2}AD, \therefore AE=AF=FG$, 由 (1) 得 $AE \parallel FG, \therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形, $\therefore$ 四边形 $AEGF$ 是菱形.



点睛: 本题属于四边形综合题, 主要考查了菱形的判定、全等三角形的判定和性质, 线段垂直平分线的判定与性质以及含 30° 角的直角三角形的性质的综合运用, 利用全等三角形的对应边相等, 对应角相等是解决问题的关键.

23. 如图, 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 交 x 轴于点 $A(-4, 0)$ 、 $B(2, 0)$, 交 y 轴于点 $C(0, 6)$, 在 y 轴上有一点 $E(0, -2)$, 连接 AE .



- (1) 求二次函数的表达式;
- (2) 若点D为抛物线在x轴负半轴上方的一个动点, 求 $\triangle ADE$ 面积的最大值;
- (3) 抛物线对称轴上是否存在点P, 使 $\triangle AEP$ 为等腰三角形, 若存在, 请直接写出所有P点的坐标, 若不存在请说明理由.

【答案】 (1) 二次函数的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$; (2) 当 $x = -\frac{2}{3}$ 时, $\triangle ADE$ 的面积取得最大值 $\frac{50}{3}$; (3) P点的坐标为 $(-1, 1)$, $(-1, \pm\sqrt{11})$, $(-1, -2 \pm \sqrt{19})$.

【解析】 分析: (1) 把已知点坐标代入函数解析式, 得出方程组求解即可;

(2) 根据函数解析式设出点D坐标, 过点D作 $DG \perp x$ 轴, 交AE于点F, 表示 $\triangle ADE$ 的面积, 运用二次函数分析最值即可;

(3) 设出点P坐标, 分 $PA=PE$, $PA=AE$, $PE=AE$ 三种情况讨论分析即可.

详解: (1) $\because$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点A(-4, 0)、B(2, 0)、C(0, 6),

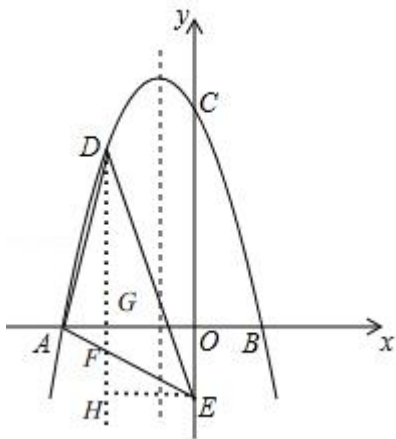
$$\therefore \begin{cases} 16a - 4b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \\ c = 6 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = 6 \end{cases}$$

所以二次函数的解析式为: $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$;

(2) 由A(-4, 0), E(0, -2), 可求AE所在直线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - 2$,

过点D作 $DN \perp x$ 轴, 交AE于点F, 交x轴于点G, 过点E作 $EH \perp DF$, 垂足为H, 如图,



设 $D(m, -\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6)$, 则点 $F(m, -\frac{1}{2}m - 2)$,

$$\therefore DF = -\frac{3}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + 6 - (-\frac{1}{2}m - 2) = -\frac{3}{4}m^2 - m + 8,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle EDF} = \frac{1}{2} \times DF \times AG + \frac{1}{2} \times DF \times EH$$

$$= \frac{1}{2} \times DF \times AG + \frac{1}{2} \times DF \times EH$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times DF$$

$$= 2 \times (-\frac{3}{4}m^2 - m + 8)$$

$$= -\frac{3}{2}(m + \frac{2}{3})^2 + \frac{50}{3},$$

$\therefore$ 当 $m = -\frac{2}{3}$ 时, $\triangle ADE$ 的面积取得最大值为 $\frac{50}{3}$.

(3) $y = -\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 6$ 的对称轴为 $x = -1$, 设 $P(-1, n)$, 又 $E(0, -2)$, $A(-4, 0)$, 可求 $PA = \sqrt{9 + n^2}$,

$PE = \sqrt{1 + (n+2)^2}$, $AE = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$, 分三种情况讨论:

当 $PA = PE$ 时, $\sqrt{9 + n^2} = \sqrt{1 + (n+2)^2}$, 解得: $n = 1$, 此时 $P(-1, 1)$;

当 $PA = AE$ 时, $\sqrt{9 + n^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$, 解得: $n = \pm\sqrt{11}$, 此时点 P 坐标为 $(-1, \pm\sqrt{11})$;

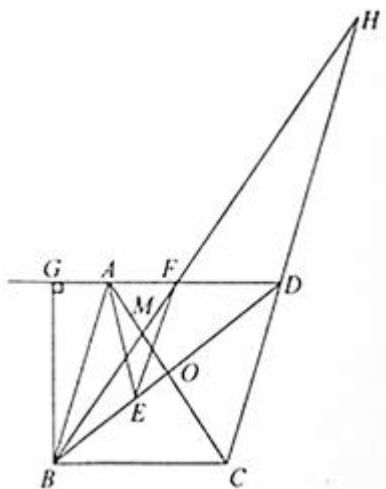
当 $PE = AE$ 时, $\sqrt{1 + (n+2)^2} = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$, 解得: $n = -2 \pm \sqrt{19}$, 此时点 P 坐标为: $(-1, -2 \pm \sqrt{19})$.

综上所述: P 点的坐标为: $(-1, 1)$, $(-1, \pm\sqrt{11})$, $(-1, -2 \pm \sqrt{19})$.

点睛: 本题主要考查二次函数的综合问题, 会求抛物线解析式, 会运用二次函数分析三角形面积的最大值, 会分类讨论解决等腰三角形的顶点的存在问题时解决此题的关键.

24. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , E 是 BD 上一点, $EF \parallel AB$, $\angle EAB = \angle EBA$, 过点 B 作 DA

的垂线，交 DA 的延长线于点 G .



- (1) $\angle DEF$ 和 $\angle AEF$ 是否相等？若相等，请证明；若不相等，请说明理由；
- (2) 找出图中与 $\triangle AGB$ 相似的三角形，并证明；
- (3) BF 的延长线交 CD 的延长线于点 H ，交 AC 于点 M 。求证： $BM^2 = MF \cdot MH$ 。

【答案】(1) $\angle DEF = \angle AEF$ ，理由见解析；(2) $\triangle EOA \sim \triangle AGB$ ，证明见解析；(3) 证明见解析。

【解析】分析：(1) 先判断出 $\angle DEF = \angle EBA$ ， $\angle AEF = \angle EAB$ ，即可得出结论；

(2) 先判断出 $\angle GAB = \angle ABE + \angle ADB = 2\angle ABE$ ，进而得出 $\angle GAB = \angle AEO$ ，即可得出结论；

(3) 先判断出 $BM = DM$ ， $\angle ADM = \angle ABM$ ，进而得出 $\angle ADM = \angle H$ ，判断出 $\triangle MFD \sim \triangle MDH$ ，即可得出结论。

详解：(1) $\angle DEF = \angle AEF$ ，理由如下：

$\because EF \parallel AB$ ， $\therefore \angle DEF = \angle EBA$ ， $\angle AEF = \angle EAB$ 。

$\because \angle EAB = \angle EBA$ ， $\therefore \angle DEF = \angle AEF$ ；

(2) $\triangle EOA \sim \triangle AGB$ ，理由如下：

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形， $\therefore AB = AD$ ， $AC \perp BD$ ，

$\therefore \angle GAB = \angle ABE + \angle ADB = 2\angle ABE$ 。

$\because \angle AEO = \angle ABE + \angle BAE = 2\angle ABE$ 。

$\because \angle GAB = \angle AEO$ ， $\angle GAB = \angle AOE = 90^\circ$ ， $\therefore \triangle EOA \sim \triangle AGB$ ；

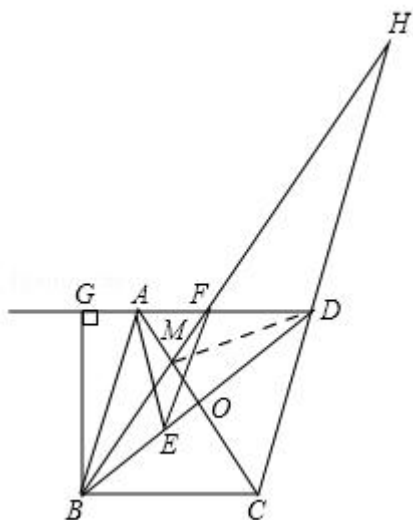
(3) 如图，连接 DM 。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形，由对称性可知， $BM = DM$ ， $\angle ADM = \angle ABM$ 。

$\because AB \parallel CH$ ， $\therefore \angle ABM = \angle H$ ， $\therefore \angle ADM = \angle H$ 。

$$\because \angle DMH = \angle FMD, \therefore \triangle MFD \sim \triangle MDH, \therefore \frac{DM}{MH} = \frac{MF}{DM}, \therefore DM^2 = MF \cdot MH,$$

$$\therefore BM^2 = MF \cdot MH.$$



点睛：本题是相似形综合题，主要考查了菱形的性质，对称性，相似三角形的判定和性质，判断出 $\triangle EOA \sim \triangle AGB$ 是解答本题的关键.