

2018 年山东省德州市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把正确的选项选出来，每小题选对得 4 分，选错、不选或选出的答案超过一个均记零分。

1. (4 分) 3 的相反数是 ()

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. $-\frac{1}{3}$

2. (4 分) 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



3. (4 分) 一年之中地球与太阳之间的距离随时间而变化，1 个天文单位是地球与太阳之间的平均距离，即 1.496 亿 km ，用科学记数法表示 1.496 亿是 ()

- A. 1.496×10^7 B. 14.96×10^8 C. 0.1496×10^8 D. 1.496×10^8

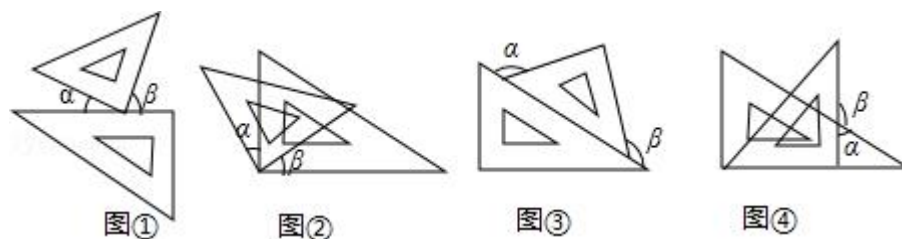
4. (4 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^3 \cdot a^2 = a^6$ B. $(-a^2)^3 = a^6$
C. $a^7 \div a^5 = a^2$ D. $-2mn - mn = -mn$

5. (4 分) 已知一组数据：6, 2, 8, x , 7，它们的平均数是 6，则这组数据的中位数是 ()

- A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

6. (4 分) 如图，将一副三角尺按不同的位置摆放，下列方式中 $\angle \alpha$ 与 $\angle \beta$ 互余的是 ()

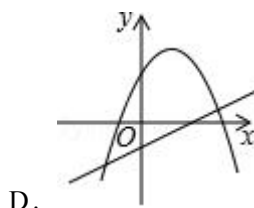
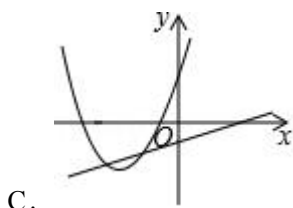


- A. 图① B. 图② C. 图③ D. 图④

7. (4 分) 如图，函数 $y = ax^2 - 2x + 1$ 和 $y = ax - a$ (a 是常数，且 $a \neq 0$) 在同一平面直角坐标系的图象可能是 ()



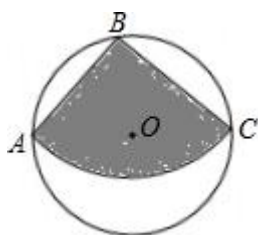
- A. B.



8. (4分) 分式方程 $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$ 的解为 ()

- A. $x = 1$ B. $x = 2$ C. $x = -1$ D. 无解

9. (4分) 如图, 从一块直径为 $2m$ 的圆形铁皮上剪出一个圆心角为 90° 的扇形, 则此扇形的面积为 ()



- A. $\frac{\pi}{2} m^2$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2} \pi m^2$ C. πm^2 D. $2\pi m^2$

10. (4分) 给出下列函数: ① $y = -3x+2$; ② $y = \frac{3}{x}$; ③ $y = 2x^2$; ④ $y = 3x$, 上述函数中符合条件“当 $x > 1$ 时, 函数值 y 随自变量 x 增大而增大”的是 ()

- A. ①③ B. ③④ C. ②④ D. ②③

11. (4分) 我国南宋数学家杨辉所著的《详解九章算术》一书中, 用如图的三角形解释二项式 $(a+b)^n$ 的展开式的各项系数, 此三角形称为“杨辉三角”

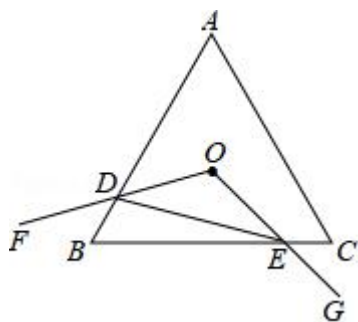
$$\begin{array}{ccccccc}
 (a+b)^0 & \cdots & \cdots & \cdots & & & 1 \\
 (a+b)^1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & 1 \\
 (a+b)^2 & \cdots & \cdots & 1 & 2 & 1 & \\
 (a+b)^3 & \cdots & \cdots & 1 & 3 & 3 & 1 \\
 (a+b)^4 & \cdots & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
 (a+b)^5 & \cdots & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
 & \cdots & & & & & &
 \end{array}$$

根据“杨辉三角”请计算 $(a+b)^8$ 的展开式中从左起第四项的系数为 ()

- A. 84 B. 56 C. 35 D. 28

12. (4分) 如图, 等边三角形 ABC 的边长为 4, 点 O 是 $\triangle ABC$ 的中心, $\angle FOG = 120^\circ$, 绕点 O 旋转 $\angle FOG$, 分别交线段 AB 、 BC 于 D 、 E 两点, 连接 DE , 给出下列四个结论:

- ① $OD = OE$; ② $S_{\triangle ODE} = S_{\triangle BDE}$; ③ 四边形 $ODBE$ 的面积始终等于 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; ④ $\triangle BDE$ 周长的最小值为 6. 上述结论中正确的个数是 ()



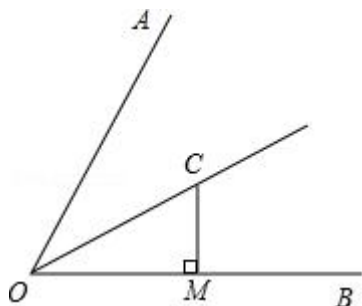
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题：本大题共 6 小题，共 24 分，只要求填写最后结果，每小题填对得 4 分。

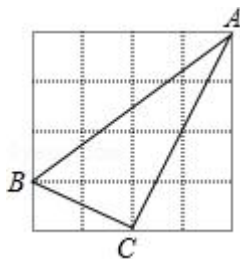
13. (4 分) 计算： $|-2+3| = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. (4 分) 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + x - 2 = 0$ 的两个实数根，则 $x_1 + x_2 + x_1 x_2 = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. (4 分) 如图， OC 为 $\angle AOB$ 的平分线， $CM \perp OB$ ， $OC = 5$ ， $OM = 4$ ，则点 C 到射线 OA 的距离为 $\underline{\hspace{2cm}}$.



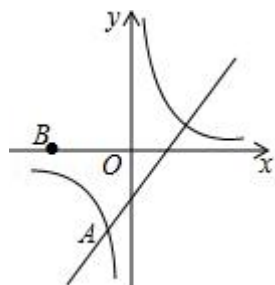
16. (4 分) 如图，在 4×4 的正方形方格图形中，小正方形的顶点称为格点， $\triangle ABC$ 的顶点都在格点上，则 $\angle BAC$ 的正弦值是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



17. (4 分) 对于实数 a, b ，定义运算 “ $\blacklozenge$ ”： $a \blacklozenge b = \begin{cases} \sqrt{a^2 + b^2}, & a \geq b \\ ab, & a < b \end{cases}$ ，例如 $4 \blacklozenge 3$ ，因为

$4 > 3$ ，所以 $4 \blacklozenge 3 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. 若 x, y 满足方程组 $\begin{cases} 4x - y = 8 \\ x + 2y = 29 \end{cases}$ ，则 $x \blacklozenge y = \underline{\hspace{2cm}}$.

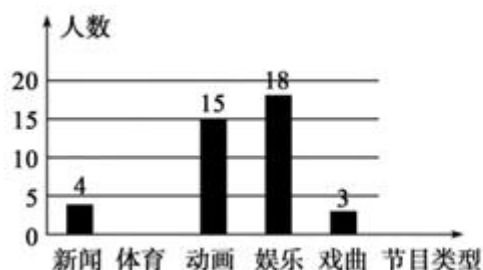
18. (4分) 如图, 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 与一次函数 $y = x - 2$ 在第三象限交于点 A , 点 B 的坐标为 $(-3, 0)$, 点 P 是 y 轴左侧的一点, 若以 A, O, B, P 为顶点的四边形为平行四边形, 则点 P 的坐标为_____.



三、解答题: 本大题共 7 小题, 共 78 分。解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

19. (8分) 先化简, 再求值 $\frac{x-3}{x^2-1} \div \frac{x-3}{x^2+2x+1} - (\frac{1}{x-1} + 1)$, 其中 x 是不等式组 $\begin{cases} 5x-3 > 3(x+1) \\ \frac{1}{2}x-1 < 9-\frac{3}{2}x \end{cases}$ 的整数解.

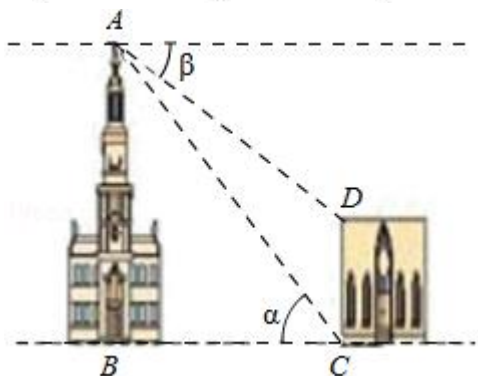
20. (10分) 某学校为了解全校学生对电视节目的喜爱情况(新闻, 体育, 动画, 娱乐, 戏曲), 从全校学生中随机抽取部分学生进行问卷调查, 并把调查结果绘制成两幅不完整的统计图.



请根据以上信息, 解答下列问题:

- (1) 这次被调查的学生共有多少人?
 - (2) 请将条形统计图补充完整;
 - (3) 若该校约有 1500 名学生, 估计全校学生中喜欢娱乐节目的有多少人?
 - (4) 该校广播站需要广播员, 现决定从喜欢新闻节目的甲、乙、丙、丁四名同学中选取 2 名, 求恰好选中甲、乙两位同学的概率(用树状图或列表法解答).
21. (10分) 如图, 两座建筑物的水平距离 BC 为 $60m$, 从 C 点测得 A 点的仰角 α 为 53° , 从 A 点测得 D 点的俯角 β 为 37° , 求两座建筑物的高度(参考数据: $\sin 37^\circ \approx \frac{3}{5}$, $\cos 37^\circ$

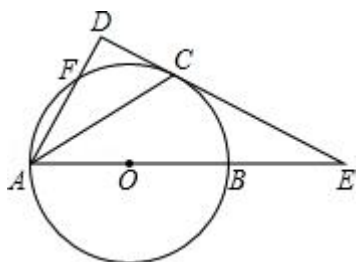
$$\approx \frac{4}{5}, \tan 37^\circ \approx \frac{3}{4}, \sin 53^\circ \approx \frac{4}{5}, \cos 53^\circ \approx \frac{3}{5}, \tan 53^\circ \approx \frac{4}{3}).$$



22. (12分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 直线 CD 与 $\odot O$ 相切于点 C , 且与 AB 的延长线交于点 E , 点 C 是 $\widehat{BF}$ 的中点.

(1) 求证: $AD \perp CD$;

(2) 若 $\angle CAD = 30^\circ$, $\odot O$ 的半径为 3, 一只蚂蚁从点 B 出发, 沿着 $BE - EC - \widehat{CB}$ 爬回至点 B , 求蚂蚁爬过的路程 ($\pi \approx 3.14$, $\sqrt{3} \approx 1.73$, 结果保留一位小数).



23. (12分) 为积极响应新旧动能转换, 提高公司经济效益, 某科技公司近期研发出一种新型高科技设备, 每台设备成本价为 30 万元, 经过市场调研发现, 每台售价为 40 万元时, 年销售量为 600 台; 每台售价为 45 万元时, 年销售量为 550 台. 假定该设备的年销售量 y (单位: 台) 和销售单价 x (单位: 万元) 成一次函数关系.

(1) 求年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式;

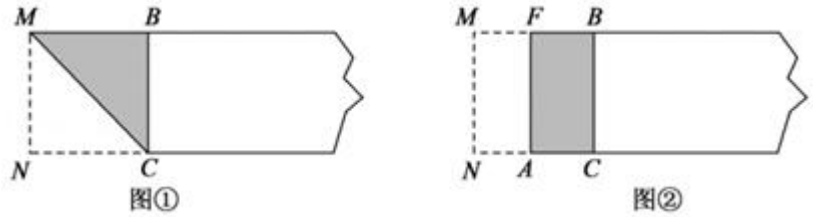
(2) 根据相关规定, 此设备的销售单价不得高于 70 万元, 如果该公司想获得 10000 万元的年利润, 则该设备的销售单价应是多少万元?

24. (12分) 再读教材:

宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (约为 0.618) 的矩形叫做黄金矩形, 黄金矩形给我们以协调、匀称的美感, 世界各国许多著名的建筑, 为取得最佳的视觉效果, 都采用了黄金矩形的设计, 下面, 我们用宽为 2 的矩形纸片折叠黄金矩形. (提示: $MN = 2$)

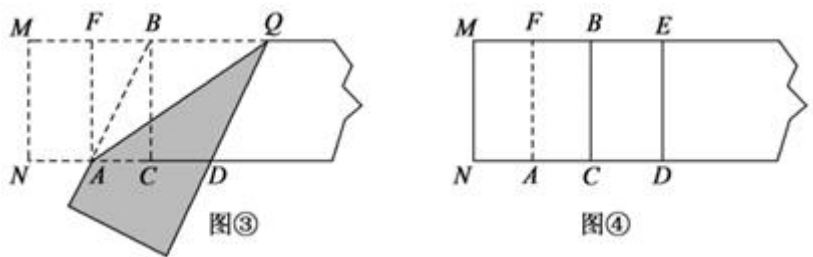
第一步, 在矩形纸片一端, 利用图①的方法折出一个正方形, 然后把纸片展平.

第二步，如图②，把这个正方形折成两个相等的矩形，再把纸片展平。



第三步，折出内侧矩形的对角线 AB ，并把 AB 折到图③中所示的 AD 处。

第四步，展平纸片，按照所得的点 D 折出 DE ，使 $DE \perp ND$ ，则图④中就会出现黄金矩形。



问题解决：

- (1) 图③中 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ (保留根号)；
- (2) 如图③，判断四边形 $BADQ$ 的形状，并说明理由；
- (3) 请写出图④中所有的黄金矩形，并选择其中一个说明理由。

实际操作

- (4) 结合图④，请在矩形 $BCDE$ 中添加一条线段，设计一个新的黄金矩形，用字母表示出来，并写出它的长和宽。

25. (14分) 如图 1，在平面直角坐标系中，直线 $y = x - 1$ 与抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 交于 A 、 B 两点，其中 $A(m, 0)$ 、 $B(4, n)$ ，该抛物线与 y 轴交于点 C ，与 x 轴交于另一点 D 。

- (1) 求 m 、 n 的值及该抛物线的解析式；
- (2) 如图 2，若点 P 为线段 AD 上的一动点 (不与 A 、 D 重合)，分别以 AP 、 DP 为斜边，在直线 AD 的同侧作等腰直角 $\triangle APM$ 和等腰直角 $\triangle DPN$ ，连接 MN ，试确定 $\triangle MPN$ 面积最大时 P 点的坐标；
- (3) 如图 3，连接 BD 、 CD ，在线段 CD 上是否存在点 Q ，使得以 A 、 D 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABD$ 相似，若存在，请直接写出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由。

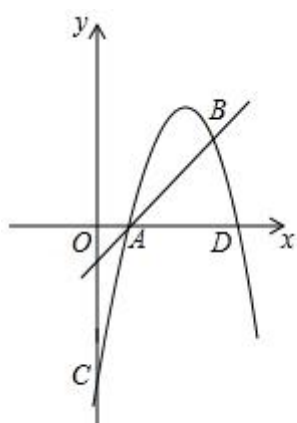


图1

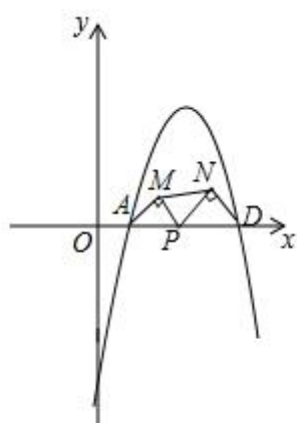


图2

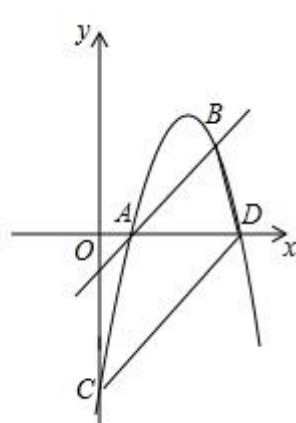


图3

2018 年山东省德州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把正确的选项选出来，每小题选对得 4 分，选错、不选或选出的答案超过一个均记零分。

1. 【分析】根据相反数的定义，即可解答．

【解答】解：3 的相反数是 -3，故选：C．

【点评】本题考查了相反数，解决本题的关键是熟记相反数的定义．

2. 【分析】观察四个选项中的图形，找出既是轴对称图形又是中心对称图形的那个即可得出结论．

【解答】解：A 是中心对称图形；B 既是轴对称图形又是中心对称图形；C 是轴对称图形；D 既不是轴对称图形又不是中心对称图形．

故选：B．

【点评】本题考查了中心对称图形以及轴对称图形，牢记轴对称及中心对称图形的特点是解题的关键．

3. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

【解答】解：数据 1.496 亿用科学记数法表示为 1.496×10^8 ，

故选：D．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

4. 【分析】根据同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加；幂的乘方法则：底数不变，指数相乘；同底数幂的除法法则：底数不变，指数相减；合并同类项的法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变分别进行计算即可．

【解答】解：A、 $a^3 \cdot a^2 = a^5$ ，故原题计算错误；

B、 $(-a^2)^3 = -a^6$ ，故原题计算错误；

C、 $a^7 \div a^5 = a^2$ ，故原题计算正确；

D、 $-2mn - mn = -3mn$ ，故原题计算错误；

故选：C．

【点评】此题主要考查了同底数幂的乘除法、合并同类项、积的乘方，关键是掌握各计算法则.

5. **【分析】**首先根据平均数为 6 求出 x 的值，然后根据中位数的概念求解.

【解答】解：由题意得 $6+2+8+x+7=6 \times 5$,

解得： $x=7$,

这组数据按照从小到大的顺序排列为：2, 6, 7, 7, 8,

则中位数为 7.

故选：A.

【点评】本题考查了中位数和平均数的知识，将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数；平均数是指在—组数据中所有数据之和再除以数据的个数.

6. **【分析】**根据平角的定义，同角的余角相等，等角的补角相等和邻补角的定义对各小题分析判断即可得解.

【解答】解：图①， $\angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ，互余；

图②，根据同角的余角相等， $\angle \alpha = \angle \beta$ ；

图③，根据等角的补角相等 $\angle \alpha = \angle \beta$ ；

图④， $\angle \alpha + \angle \beta = 180^\circ$ ，互补.

故选：A.

【点评】本题考查了余角和补角，是基础题，熟记概念与性质是解题的关键.

7. **【分析】**可先根据一次函数的图象判断 a 的符号，再判断二次函数图象与实际是否相符，判断正误即可.

【解答】解：A、由一次函数 $y = ax - a$ 的图象可得： $a < 0$ ，此时二次函数 $y = ax^2 - 2x + 1$ 的图象应该开口向下，故选项错误；

B、由一次函数 $y = ax - a$ 的图象可得： $a > 0$ ，此时二次函数 $y = ax^2 - 2x + 1$ 的图象应该开口向上，对称轴 $x = -\frac{-2}{2a} > 0$ ，故选项正确；

C、由一次函数 $y = ax - a$ 的图象可得： $a > 0$ ，此时二次函数 $y = ax^2 - 2x + 1$ 的图象应该开口向上，对称轴 $x = -\frac{-2}{2a} > 0$ ，和 x 轴的正半轴相交，故选项错误；

D、由一次函数 $y = ax - a$ 的图象可得： $a > 0$ ，此时二次函数 $y = ax^2 - 2x + 1$ 的图象应该开

口向上，故选项错误.

故选：B.

【点评】本题考查了二次函数以及一次函数的图象，解题的关键是熟记一次函数 $y = ax - a$ 在不同情况下所在的象限，以及熟练掌握二次函数的有关性质：开口方向、对称轴、顶点坐标等.

8. 【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

【解答】解：去分母得： $x^2 + 2x - x^2 - x + 2 = 3$,

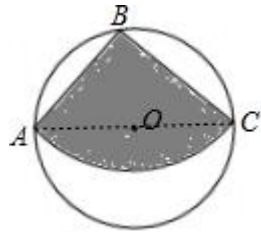
解得： $x = 1$,

经检验 $x = 1$ 是增根，分式方程无解.

故选：D.

【点评】此题考查了分式方程的解，始终注意分母不为 0 这个条件.

9. 【分析】连接 AC ，根据圆周角定理得出 AC 为圆的直径，解直角三角形求出 AB ，根据扇形面积公式求出即可.



【解答】解：

连接 AC ,

$\because$ 从一块直径为 $2m$ 的圆形铁皮上剪出一个圆心角为 90° 的扇形，即 $\angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore AC$ 为直径，即 $AC = 2m$ ， $AB = BC$ （扇形的半径相等），

$\therefore AB^2 + BC^2 = 2^2$,

$\therefore AB = BC = \sqrt{2}m$,

$\therefore$ 阴影部分的面积是 $\frac{90\pi \times (\sqrt{2})^2}{360} = \frac{1}{2}\pi (m^2)$,

故选：A.

【点评】本题考查了圆周角定理和扇形的面积计算，能熟记扇形的面积公式是解此题的关键.

10. 【分析】分别利用一次函数、正比例函数、反比例函数、二次函数的增减性分析得出答案.

【解答】解：① $y = -3x+2$ ，当 $x > 1$ 时，函数值 y 随自变量 x 增大而减小，故此选项错误；

② $y = \frac{3}{x}$ ，当 $x > 1$ 时，函数值 y 随自变量 x 增大而减小，故此选项错误；

③ $y = 2x^2$ ，当 $x > 1$ 时，函数值 y 随自变量 x 增大而增大，故此选项正确；

④ $y = 3x$ ，当 $x > 1$ 时，函数值 y 随自变量 x 增大而增大，故此选项正确；

故选：B.

【点评】此题主要考查了一次函数、正比例函数、反比例函数、二次函数的性质，正确把握相关性质是解题关键.

11. 【分析】根据图形中的规律即可求出 $(a+b)^8$ 的展开式中从左起第四项的系数.

【解答】解：找规律发现 $(a+b)^4$ 的第四项系数为 $4 = 3+1$ ；

$(a+b)^5$ 的第四项系数为 $10 = 6+4$ ；

$(a+b)^6$ 的第四项系数为 $20 = 10+10$ ；

$(a+b)^7$ 的第四项系数为 $35 = 15+20$ ；

$\therefore (a+b)^8$ 第四项系数为 $21+35 = 56$.

故选：B.

【点评】此题考查了数字变化规律，通过观察、分析、归纳发现其中的规律，并应用发现的规律解决问题的能力.

12. 【分析】连接 OB 、 OC ，如图，利用等边三角形的性质得 $\angle ABO = \angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$ ，再证明 $\angle BOD = \angle COE$ ，于是可判断 $\triangle BOD \cong \triangle COE$ ，所以 $BD = CE$ ， $OD = OE$ ，则可对①进行判断；利用 $S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COE}$ 得到四边形 $ODBE$ 的面积 $= \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$ ，则可对③进行判断；作 $OH \perp DE$ ，如图，则 $DH = EH$ ，计算出 $S_{\triangle ODE} = \frac{\sqrt{3}}{4}OE^2$ ，利用 $S_{\triangle ODE}$ 随 OE 的变化而变化而四边形 $ODBE$ 的面积为定值可对②进行判断；由于 $\triangle BDE$ 的周长 $= BC+DE = 4+DE = 4+\sqrt{3}OE$ ，根据垂线段最短，当 $OE \perp BC$ 时， OE 最小， $\triangle BDE$ 的周长最小，计算出此时 OE 的长则可对④进行判断.

【解答】解：连接 OB 、 OC ，如图，

$\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 60^\circ$ ，

$\because$ 点 O 是 $\triangle ABC$ 的中心，

$\therefore OB = OC$ ， OB 、 OC 分别平分 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$ ，

$$\therefore \angle ABO = \angle OBC = \angle OCB = 30^\circ$$

$$\therefore \angle BOC = 120^\circ, \text{ 即 } \angle BOE + \angle COE = 120^\circ,$$

$$\text{而 } \angle DOE = 120^\circ, \text{ 即 } \angle BOE + \angle BOD = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle BOD = \angle COE,$$

在 $\triangle BOD$ 和 $\triangle COE$ 中

$$\begin{cases} \angle BOD = \angle COE \\ BO = CO \\ \angle OBD = \angle OCE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BOD \cong \triangle COE,$$

$$\therefore BD = CE, OD = OE, \text{ 所以①正确};$$

$$\therefore S_{\triangle BOD} = S_{\triangle COE},$$

$$\therefore \text{四边形 } ODBE \text{ 的面积} = S_{\triangle OBC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = \frac{4}{3} \sqrt{3}, \text{ 所以③正确};$$

作 $OH \perp DE$, 如图, 则 $DH = EH$,

$$\because \angle DOE = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ODE = \angle OEH = 30^\circ,$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2} OE, HE = \sqrt{3} OH = \frac{\sqrt{3}}{2} OE,$$

$$\therefore DE = \sqrt{3} OE,$$

$$\therefore S_{\triangle ODE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} OE \cdot \sqrt{3} OE = \frac{\sqrt{3}}{4} OE^2,$$

即 $S_{\triangle ODE}$ 随 OE 的变化而变化,

而四边形 $ODBE$ 的面积为定值,

$$\therefore S_{\triangle ODE} \neq S_{\triangle BDE}; \text{ 所以②错误};$$

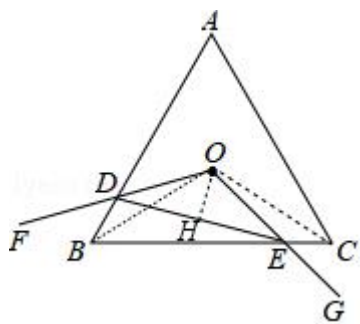
$$\because BD = CE,$$

$$\therefore \triangle BDE \text{ 的周长} = BD + BE + DE = CE + BE + DE = BC + DE = 4 + DE = 4 + \sqrt{3} OE,$$

$$\text{当 } OE \perp BC \text{ 时, } OE \text{ 最小, } \triangle BDE \text{ 的周长最小, 此时 } OE = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \triangle BDE \text{ 周长的最小值} = 4 + 2 = 6, \text{ 所以④正确}.$$

故选: C.



【点评】 本题考查了旋转的性质：对应点到旋转中心的距离相等；对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角；旋转前、后的图形全等．也考查了等边三角形的性质和全等三角形的判定与性质．

二、填空题：本大题共 6 小题，共 24 分，只要求填写最后结果，每小题填对得 4 分。

13. 【分析】 根据有理数的加法解答即可．

【解答】 解： $|-2+3|=1$ ，

故答案为： 1

【点评】 此题考查有理数的加法，关键是根据法则计算．

14. 【分析】 根据根与系数的关系即可求出答案．

【解答】 解： 由根与系数的关系可知： $x_1+x_2=-1$ ， $x_1x_2=-2$

$$\therefore x_1+x_2+x_1x_2=-3$$

故答案为： - 3

【点评】 本题考查根与系数的关系，解题的关键是熟练运用根与系数的关系，本题属于基础题型．

15. 【分析】 过 C 作 $CF \perp AO$ ，根据勾股定理可得 CM 的长，再根据角的平分线上的点到角的两边的距离相等可得 $CF = CM$ ，进而可得答案．

【解答】 解： 过 C 作 $CF \perp AO$ ，

$\because OC$ 为 $\angle AOB$ 的平分线， $CM \perp OB$ ，

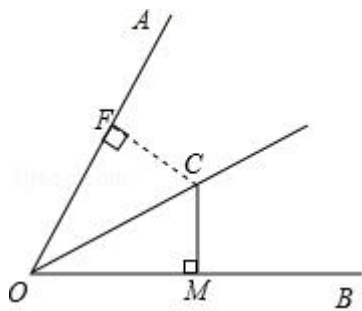
$$\therefore CM = CF,$$

$$\because OC = 5, OM = 4,$$

$$\therefore CM = 3,$$

$$\therefore CF = 3,$$

故答案为： 3．



【点评】此题主要考查了角平分线的性质，关键是掌握角的平分线上的点到角的两边的距离相等．

16. 【分析】先根据勾股定理的逆定理判断出 $\triangle ABC$ 的形状，再由锐角三角函数的定义即可得出结论．

【解答】解： $\because AB^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ 、 $AC^2 = 2^2 + 4^2 = 20$ 、 $BC^2 = 1^2 + 2^2 = 5$ ，

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ，

$$\text{则 } \sin \angle BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

故答案为： $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ．

【点评】本题考查的是勾股定理的逆定理以及锐角三角函数，熟知在一个三角形中，如果两条边长的平方之和等于第三边长的平方，那么这个三角形是直角三角形是解答此题的关键．

17. 【分析】根据二元一次方程组的解法以及新定义运算法则即可求出答案．

【解答】解：由题意可知：
$$\begin{cases} 4x - y = 8 \\ x + 2y = 29 \end{cases},$$

$$\text{解得：} \begin{cases} x = 5 \\ y = 12 \end{cases}$$

$$\because x < y,$$

$$\therefore \text{原式} = 5 \times 12 = 60$$

故答案为：60

【点评】本题考查二元一次方程组的解法，解题的关键是熟练运用二元一次方程组的解法以及正确理解新定义运算法则，本题属于基础题型．

18. 【分析】联立直线和反比例函数解析式可求出 A 点的坐标，再分以 AB 为对角线、以 OA 为对角线和以 OB 为对角线三种情况，利用平行四边形的性质可分别求得满足条件的 P 点的坐标．

【解答】解：由题意得 $\begin{cases} y=x-2 \\ y=\frac{3}{x} \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{3}{x}$ 与一次函数 $y=x-2$ 在第三象限交于点 A ，

$\therefore A(-1, -3)$ 。

当以 AB 为对角线时， AB 的中点坐标 M 为 $(-2, -1.5)$ ，

$\therefore$ 平行四边形的对角线互相平分，

$\therefore M$ 为 OP 中点，

设 P 点坐标为 (x, y) ，

则 $\frac{x+0}{2} = -2$ ， $\frac{y+0}{2} = -1.5$ ，

解得 $x = -4$ ， $y = -3$ ，

$\therefore P(-4, -3)$ 。

当 OB 为对角线时，

由 O 、 B 坐标可求得 OB 的中点坐标 $M(-\frac{3}{2}, 0)$ ，设 P 点坐标为 (x, y) ，

由平行四边形的性质可知 M 为 AP 的中点，

结合中点坐标公式可得 $\frac{x-1}{2} = -\frac{3}{2}$ ， $\frac{y-3}{2} = 0$ ，解得 $x = -2$ ， $y = 3$ ，

$\therefore P(-2, 3)$ ；

当以 OA 为对角线时，

由 O 、 A 坐标可求得 OA 的中点坐标 $M(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ ，设 P 点坐标为 (x, y) ，

由平行四边形的性质可知 M 为 BP 中点，

结合中点坐标公式可得 $\frac{x-3}{2} = -\frac{1}{2}$ ， $\frac{y+0}{2} = -\frac{3}{2}$ ，解得 $x = 2$ ， $y = -3$ ，

$\therefore P(2, -3)$ (舍去)。

综上所述， P 点的坐标为 $(-4, -3)$ ， $(-2, 3)$ 。

故答案为： $(-4, -3)$ ， $(-2, 3)$ 。

【点评】本题考查的是反比例函数与一次函数的交点问题，熟知反比例函数图象上点的坐标特点、平行四边形的判定与性质及中点坐标公式是解答此题的关键。

三、解答题：本大题共 7 小题，共 78 分。解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤。

19. 【分析】原式利用除法法则变形，约分后计算得到最简结果，求出 x 的值，代入计算即

可求出值.

【解答】解：原式 = $\frac{x-3}{(x+1)(x-1)} \cdot \frac{(x+1)^2}{x-3} - \frac{1+x-1}{x-1} = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$,

不等式组解得： $3 < x < 5$ ，即整数解 $x = 4$,

则原式 = $\frac{1}{3}$.

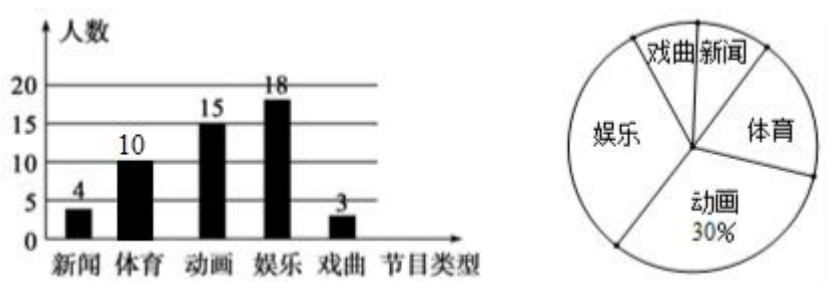
【点评】此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. 【分析】（1）根据动画类人数及其百分比求得总人数；
（2）总人数减去其他类型人数可得体育类人数，据此补全图形即可；
（3）用样本估计总体的思想解决问题；
（4）根据题意先画出列表，得出所有情况数，再根据概率公式即可得出答案.

【解答】解：（1）这次被调查的学生人数为 $15 \div 30\% = 50$ 人；

（2）喜爱“体育”的人数为 $50 - (4+15+18+3) = 10$ 人，

补全图形如下：



（3）估计全校学生中喜欢娱乐节目的有 $1500 \times \frac{18}{50} = 540$ 人；

（4）列表如下：

	甲	乙	丙	丁
甲	- - -	(乙, 甲)	(丙, 甲)	(丁, 甲)
乙	(甲, 乙)	- - -	(丙, 乙)	(丁, 乙)
丙	(甲, 丙)	(乙, 丙)	- - -	(丁, 丙)
丁	(甲, 丁)	(乙, 丁)	(丙, 丁)	- - -

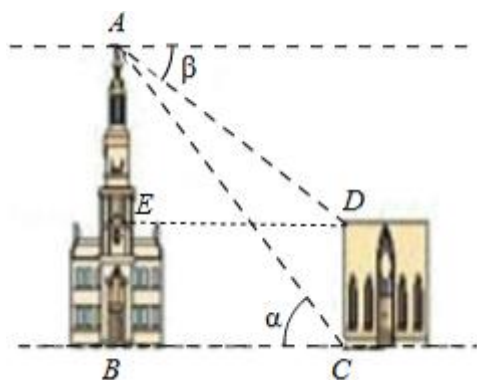
所有等可能的结果为 12 种，恰好选中甲、乙两位同学的有 2 种结果，

所以恰好选中甲、乙两位同学的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点评】 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小．

21. **【分析】** 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，则 $DE = BC = 60m$ ，在 $Rt\triangle ABC$ 中，求出 AB ，在 $Rt\triangle ADE$ 中求出 AE 即可解决问题；

【解答】 解：过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E ，则 $DE = BC = 60m$ ，



在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\tan 53^\circ = \frac{AB}{BC}$ ，

$$\therefore \frac{AB}{60} = \frac{4}{3},$$

$$\therefore AB = 80 (m),$$

在 $Rt\triangle ADE$ 中， $\tan 37^\circ = \frac{AE}{DE}$ ，

$$\therefore \frac{3}{4} = \frac{AE}{60},$$

$$\therefore AE = 45 (m),$$

$$\therefore BE = CD = AB - AE = 35 (m),$$

答：两座建筑物的高度分别为 $80m$ 和 $35m$ ．

【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，根据题意作出辅助线，构造出直角三角形是解答此题的关键．

22. **【分析】** (1) 连接 OC ，根据切线的性质得到 $OC \perp CD$ ，证明 $OC \parallel AD$ ，根据平行线的性质证明；

(2) 根据圆周角定理得到 $\angle COE = 60^\circ$ ，根据勾股定理、弧长公式计算即可．

【解答】 (1) 证明：连接 OC ，

∵ 直线 CD 与 $\odot O$ 相切,

∴ $OC \perp CD$,

∵ 点 C 是 $\widehat{BF}$ 的中点,

∴ $\angle DAC = \angle EAC$,

∵ $OA = OC$,

∴ $\angle OCA = \angle EAC$,

∴ $\angle DAC = \angle OCA$,

∴ $OC \parallel AD$,

∴ $AD \perp CD$;

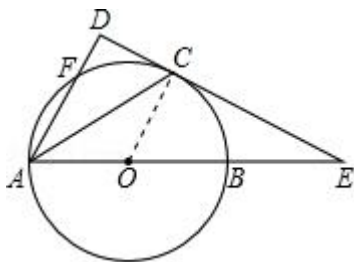
(2) 解: ∵ $\angle CAD = 30^\circ$,

∴ $\angle CAE = \angle CAD = 30^\circ$,

由圆周角定理得, $\angle COE = 60^\circ$,

∴ $OE = 2OC = 6$, $EC = \sqrt{3}OC = 3\sqrt{3}$, $\widehat{BC} = \frac{60\pi \times 3}{180} = \pi$,

∴ 蚂蚁爬过的路程 $= 3 + 3\sqrt{3} + \pi \approx 11.3$.



【点评】 本题考查的是切线的性质、弧长的计算, 掌握圆的切线垂直于经过切点的半径、弧长公式是解题的关键.

23. **【分析】** (1) 根据点的坐标, 利用待定系数法即可求出年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式;

(2) 设此设备的销售单价为 x 万元/台, 则每台设备的利润为 $(x - 30)$ 万元, 销售数量为 $(-10x + 1000)$ 台, 根据总利润 = 单台利润 $\times$ 销售数量, 即可得出关于 x 的一元二次方程, 解之取其小于 70 的值即可得出结论.

【解答】 解: (1) 设年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

将 $(40, 600)$ 、 $(45, 550)$ 代入 $y = kx + b$, 得:

$$\begin{cases} 40k + b = 600 \\ 45k + b = 550 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} k = -10 \\ b = 1000 \end{cases},$$

∴年销售量 y 与销售单价 x 的函数关系式为 $y = -10x + 1000$.

(2) 设此设备的销售单价为 x 万元/台, 则每台设备的利润为 $(x - 30)$ 万元, 销售数量为 $(-10x + 1000)$ 台,

根据题意得: $(x - 30)(-10x + 1000) = 10000$,

整理, 得: $x^2 - 130x + 4000 = 0$,

解得: $x_1 = 50$, $x_2 = 80$.

∵此设备的销售单价不得高于 70 万元,

∴ $x = 50$.

答: 该设备的销售单价应是 50 万元/台.

【点评】 本题考查了待定系数法求一次函数解析式以及一元二次方程的应用, 解题的关键是: (1) 根据点的坐标, 利用待定系数法求出函数关系式; (2) 找准等量关系, 正确列出一元二次方程.

24. **【分析】** (1) 理由勾股定理计算即可;

(2) 根据菱形的判定方法即可判断;

(3) 根据黄金矩形的定义即可判断;

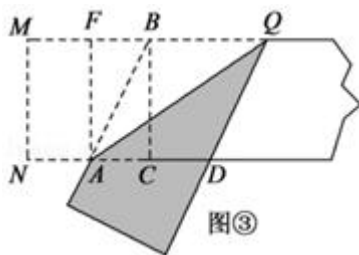
(4) 如图④ - 1 中, 在矩形 $BCDE$ 上添加线段 GH , 使得四边形 $GCDH$ 为正方形, 此时四边形 $BGHE$ 为所求是黄金矩形;

【解答】 解: (1) 如图 3 中, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$,

故答案为 $\sqrt{5}$.

(2) 结论: 四边形 $BADQ$ 是菱形.

理由: 如图③中,



∵四边形 $ACBF$ 是矩形,

∴ $BQ \parallel AD$,

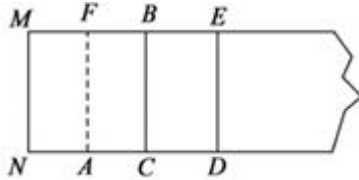
∴ $AB \parallel DQ$,

∴ 四边形 $ABQD$ 是平行四边形,

由翻折可知: $AB = AD$,

∴ 四边形 $ABQD$ 是菱形.

(3) 如图④中, 黄金矩形有矩形 $BCDE$, 矩形 $MNDE$.



图④

$$\because AD = \sqrt{5}, AN = AC = 1,$$

$$CD = AD - AC = \sqrt{5} - 1,$$

$$\because BC = 2,$$

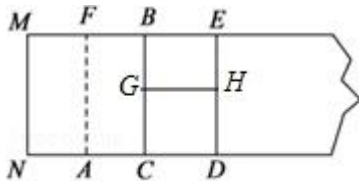
$$\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

∴ 矩形 $BCDE$ 是黄金矩形.

$$\therefore \frac{MN}{DN} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

∴ 矩形 $MNDE$ 是黄金矩形.

(4) 如图④-1 中, 在矩形 $BCDE$ 上添加线段 GH , 使得四边形 $GCDH$ 为正方形, 此时四边形 $BGHE$ 为所求是黄金矩形.



图④-1

$$\text{长 } GH = \sqrt{5} - 1, \text{ 宽 } HE = 3 - \sqrt{5}.$$

【点评】 本题考查几何变换综合题、黄金矩形的定义、勾股定理、翻折变换等知识, 解题的关键是理解题意, 灵活运用所学知识解决问题, 属于中考创新题目.

25. **【分析】** (1) 把 A 与 B 坐标代入一次函数解析式求出 m 与 n 的值, 确定出 A 与 B 坐标, 代入二次函数解析式求出 b 与 c 的值即可;

(2) 由等腰直角 $\triangle APM$ 和等腰直角 $\triangle DPN$, 得到 $\angle MPN$ 为直角, 由两直角边乘积的一

半表示出三角形 MPN 面积, 利用二次函数性质确定出三角形面积最大时 P 的坐标即可;

(3) 存在, 分两种情况, 根据相似得比例, 求出 AQ 的长, 利用两点间的距离公式求出 Q 坐标即可.

【解答】解: (1) 把 $A(m, 0)$, $B(4, n)$ 代入 $y = x - 1$ 得: $m = 1$, $n = 3$,

$\therefore A(1, 0)$, $B(4, 3)$,

$\because y = -x^2 + bx + c$ 经过点 A 与点 B ,

$$\therefore \begin{cases} -1 + b + c = 0 \\ -16 + 4b + c = 3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b = 6 \\ c = -5 \end{cases},$$

则二次函数解析式为 $y = -x^2 + 6x - 5$;

(2) 如图 2, $\triangle APM$ 与 $\triangle DPN$ 都为等腰直角三角形,

$$\therefore \angle APM = \angle DPN = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MPN = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle MPN$ 为直角三角形,

令 $-x^2 + 6x - 5 = 0$, 得到 $x = 1$ 或 $x = 5$,

$\therefore D(5, 0)$, 即 $DA = 5 - 1 = 4$,

设 $AP = m$, 则有 $DP = 4 - m$,

$$\therefore PM = \frac{\sqrt{2}}{2}m, PN = \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - m),$$

$$\therefore S_{\triangle MPN} = \frac{1}{2}PM \cdot PN = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}m \times \frac{\sqrt{2}}{2}(4 - m) = -\frac{1}{4}m^2 + m = -\frac{1}{4}(m - 2)^2 + 1,$$

$\therefore$ 当 $m = 2$, 即 $AP = 2$ 时, $S_{\triangle MPN}$ 最大, 此时 $OP = 3$, 即 $P(3, 0)$;

(3) 存在,

易得直线 CD 解析式为 $y = x - 5$, 设 $Q(x, x - 5)$,

由题意得: $\angle BAD = \angle ADC = 45^\circ$,

$$\text{当 } \triangle ABD \sim \triangle DAQ \text{ 时, } \frac{AB}{DA} = \frac{BD}{AQ}, \text{ 即 } \frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{AQ},$$

$$\text{解得: } AQ = \frac{4\sqrt{5}}{3},$$

$$\text{由两点间的距离公式得: } (x - 1)^2 + (x - 5)^2 = \frac{80}{9},$$

$$\text{解得: } x = \frac{7}{3} \text{ 或 } x = \frac{11}{3}, \text{ 此时 } Q\left(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}\right) \text{ 或 } \left(\frac{11}{3}, -\frac{4}{3}\right) \text{ (舍去);}$$

当 $\triangle ABD \sim \triangle DQA$ 时, $\frac{BD}{AQ} = 1$, 即 $AQ = \sqrt{10}$,

$$\therefore (x-1)^2 + (x-5)^2 = 10,$$

解得: $x=2$ 或 $x=4$, 此时 $Q(2, -3)$ 或 $(4, -1)$ (舍去),

综上, 点 Q 的坐标为 $(2, -3)$ 或 $(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3})$.

【点评】 此题属于二次函数综合题, 涉及的知识有: 待定系数法求函数解析式, 二次函数的图象与性质, 相似三角形的判定与性质, 两点间的距离公式, 熟练掌握各自的性质是解本题的关键.