

山东省威海市 2018 年中考数学真题试题

一、选择题

1. (2018 年山东省威海市) -2 的绝对值是 ()

- A. 2 B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. -2

【分析】根据负数的绝对值等于它的相反数可得答案.

【解答】解: -2 的绝对值是 2,

故选: A.

【点评】此题主要考查了绝对值, 关键是掌握绝对值的性质.

2. (2018 年山东省威海市) 下列运算结果正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ B. $-(a-b) = -a+b$ C. $a^2 + a^2 = 2a^4$ D. $a^8 \div a^4 = a^2$

【分析】直接利用合并同类项法则以及同底数幂的乘除运算法则、去括号法则分别计算得出答案.

【解答】解: A、 $a^2 \cdot a^3 = a^5$, 故此选项错误;

B、 $-(a-b) = -a+b$, 正确;

C、 $a^2 + a^2 = 2a^2$, 故此选项错误;

D、 $a^8 \div a^4 = a^4$, 故此选项错误;

故选: B.

【点评】此题主要考查了合并同类项以及同底数幂的乘除运算、去括号法则, 正确掌握相关运算法则是解题关键.

3. (2018 年山东省威海市) 若点 $(-2, y_1)$, $(-1, y_2)$, $(3, y_3)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2 < y_3$ B. $y_3 < y_2 < y_1$ C. $y_2 < y_1 < y_3$ D. $y_3 < y_1 < y_2$

【分析】直接利用反比例函数的性质分析得出答案.

【解答】解: $\because$ 点 $(-2, y_1)$, $(-1, y_2)$, $(3, y_3)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 上,

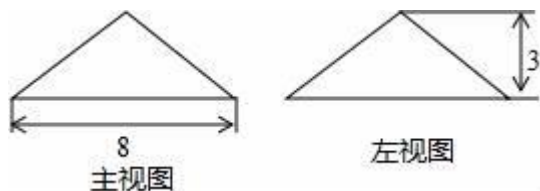
$\therefore (-2, y_1)$, $(-1, y_2)$ 分布在第二象限, $(3, y_3)$ 在第四象限, 每个象限内, y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore y_3 < y_1 < y_2.$$

故选：D.

【点评】此题主要考查了反比例函数的性质，正确掌握反比例函数增减性是解题关键.

4. (2018 年山东省威海市) 如图是某圆锥的主视图和左视图，该圆锥的侧面积是 ()



A. 25π B. 24π C. 20π D. 15π

【分析】求得圆锥的底面周长以及母线长，即可得到圆锥的侧面积.

【解答】解：由题可得，圆锥的底面直径为 8，高为 3，

$\therefore$ 圆锥的底面周长为 8π ，

圆锥的母线长为 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

$\therefore$ 圆锥的侧面积 $= \frac{1}{2} \times 8\pi \times 5 = 20\pi$ ，

故选：C.

【点评】本题主要考查了由三视图判断几何体以及圆锥的计算，圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长.

5. (2018 年山东省威海市) 已知 $5^x = 3$ ， $5^y = 2$ ，则 $5^{2x-3y} = ()$

A. $\frac{3}{4}$ B. 1 C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{9}{8}$

【分析】首先根据幂的乘方的运算方法，求出 5^{2x} 、 5^{3y} 的值；然后根据同底数幂的除法的运算方法，求出 5^{2x-3y} 的值为多少即可.

【解答】解： $\because 5^x = 3$ ， $5^y = 2$ ，

$\therefore 5^{2x} = 3^2 = 9$ ， $5^{3y} = 2^3 = 8$ ，

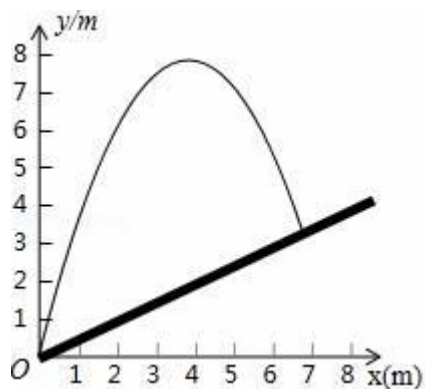
$\therefore 5^{2x-3y} = \frac{5^{2x}}{5^{3y}} = \frac{9}{8}$.

故选：D.

【点评】此题主要考查了同底数幂的除法法则，以及幂的乘方与积的乘方，同底数幂相除，

底数不变，指数相减，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①底数 $a \neq 0$ ，因为 0 不能做除数；②单独的一个字母，其指数是 1，而不是 0；③应用同底数幂除法的法则时，底数 a 可是单项式，也可以是多项式，但必须明确底数是什么，指数是什么.

6. (2018 年山东省威海市) 如图，将一个小球从斜坡的点 O 处抛出，小球的抛出路线可以用二次函数 $y=4x - \frac{1}{2}x^2$ 刻画，斜坡可以用一次函数 $y=\frac{1}{2}x$ 刻画，下列结论错误的是 ()



- A. 当小球抛出高度达到 7.5m 时，小球水平距 O 点水平距离为 3m
- B. 小球距 O 点水平距离超过 4 米呈下降趋势
- C. 小球落地点距 O 点水平距离为 7 米
- D. 斜坡的坡度为 1: 2

【分析】求出当 $y=7.5$ 时， x 的值，判定 A；根据二次函数的性质求出对称轴，根据二次函数性质判断 B；求出抛物线与直线的交点，判断 C，根据直线解析式和坡度的定义判断 D.

【解答】解：当 $y=7.5$ 时， $7.5=4x - \frac{1}{2}x^2$,

整理得 $x^2 - 8x+15=0$,

解得， $x_1=3$, $x_2=5$,

$\therefore$ 当小球抛出高度达到 7.5m 时，小球水平距 O 点水平距离为 3m 或 5 侧面 cm，A 错误，符合题意；

$$y=4x - \frac{1}{2}x^2$$

$$= -\frac{1}{2}(x-4)^2+8,$$

则抛物线的对称轴为 $x=4$,

$\therefore$ 当 $x > 4$ 时， y 随 x 的增大而减小，即小球距 O 点水平距离超过 4 米呈下降趋势，B 正确，不符合题意；

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases},$$

解得, $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 7 \\ y_2 = \frac{7}{2} \end{cases},$

则小球落地点距 O 点水平距离为 7 米, C 正确, 不符合题意;

$\therefore$ 斜坡可以用一次函数 $y = \frac{1}{2}x$ 刻画,

$\therefore$ 斜坡的坡度为 1: 2, D 正确, 不符合题意;

故选: A.

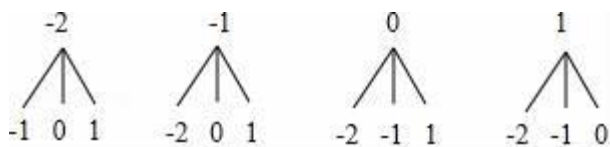
【点评】本题考查的是解直角三角形的 - 坡度问题、二次函数的性质, 掌握坡度的概念、二次函数的性质是解题的关键.

7. (2018 年山东省威海市) 一个不透明的盒子中放入四张卡片, 每张卡片上都写有一个数字, 分别是 -2, -1, 0, 1. 卡片除数字不同外其它均相同, 从中随机抽取两张卡片, 抽取的两张卡片上数字之积为负数的概率是 ()

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

【分析】画树状图展示所有 12 种等可能的结果数, 再找出抽取的两张卡片上数字之积为负数的结果数, 然后根据概率公式求解.

【解答】解: 画树状图如下:



由树状图可知共有 12 种等可能结果, 其中抽取的两张卡片上数字之积为负数的结果有 4 种,

所以抽取的两张卡片上数字之积为负数的概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$,

故选: B.

【点评】本题考查了列表法与树状图法: 利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n, 再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m, 然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率.

8. (2018 年山东省威海市) 化简 $(a-1) \div (\frac{1}{a}-1) \cdot a$ 的结果是 ()

A. $-a^2$ B. 1 C. a^2 D. -1

【分析】根据分式的混合运算顺序和运算法则计算可得.

【解答】解：原式 $= (a-1) \div \frac{1-a}{a} \cdot a$

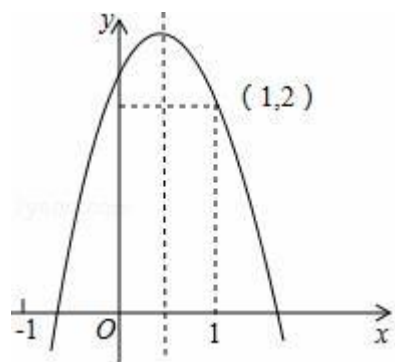
$$= (a-1) \cdot \frac{a}{-(a-1)} \cdot a$$

$$= -a^2,$$

故选：A.

【点评】本题主要考查分式的混合运算，解题的关键是掌握分式的混合运算顺序和运算法则.

9. (2018 年山东省威海市) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 图象如图所示，下列结论错误的是 ()



A. $abc < 0$ B. $a+c < b$ C. $b^2+8a > 4ac$ D. $2a+b > 0$

【分析】根据二次函数的图象与系数的关系即可求出答案.

【解答】解：(A) 由图象开口可知： $a < 0$

由对称轴可知： $-\frac{b}{2a} > 0$,

$\therefore b > 0$,

$\therefore$ 由抛物线与 y 轴的交点可知： $c > 0$,

$\therefore abc < 0$ ，故 A 正确；

(B) 由图象可知： $x = -1$ ， $y < 0$ ，

$\therefore y = a - b + c < 0$ ，

$\therefore a + c < b$ ，故 B 正确；

(C) 由图象可知：顶点的纵坐标大于 2，

$$\therefore \frac{4ac-b^2}{4a} > 2, \quad a < 0,$$

$$\therefore 4ac - b^2 < 8a,$$

$$\therefore b^2 + 8a > 4ac, \text{ 故 C 正确;}$$

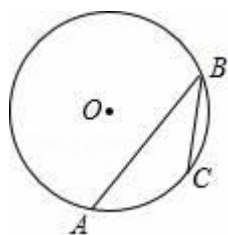
$$(D) \text{ 对称轴 } x = -\frac{b}{2a} < 1, \quad a < 0,$$

$$\therefore 2a + b < 0, \text{ 故 D 错误;}$$

故选: D.

【点评】本题考查二次函数的综合问题, 解题的关键是正确理解二次函数的图象与系数之间的关系, 本题属于中等题型.

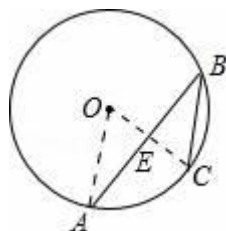
10. (2018年山东省威海市) 如图, $\odot O$ 的半径为 5, AB 为弦, 点 C 为 $\widehat{AB}$ 的中点, 若 $\angle ABC = 30^\circ$, 则弦 AB 的长为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. 5 C. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ D. $5\sqrt{3}$

【分析】连接 OC、OA, 利用圆周角定理得出 $\angle AOC = 60^\circ$, 再利用垂径定理得出 AB 即可.

【解答】解: 连接 OC、OA,



$$\because \angle ABC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOC = 60^\circ,$$

$\because$ AB 为弦, 点 C 为 $\widehat{AB}$ 的中点,

$$\therefore OC \perp AB,$$

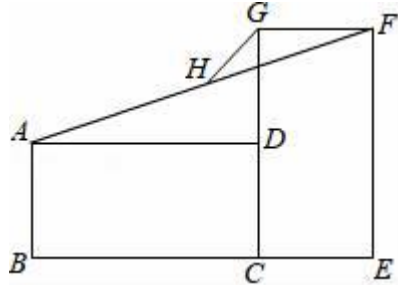
$$\text{在 Rt}\triangle OAE \text{ 中, } AE = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore AB = 5\sqrt{3},$$

故选: D.

【点评】此题考查圆周角定理，关键是利用圆周角定理得出 $\angle AOC=60^\circ$.

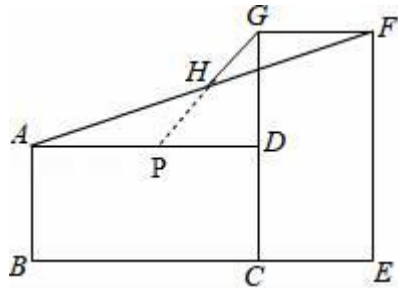
11. (2018 年山东省威海市) 矩形 ABCD 与 CEFG, 如图放置, 点 B, C, E 共线, 点 C, D, G 共线, 连接 AF, 取 AF 的中点 H, 连接 GH. 若 $BC=EF=2$, $CD=CE=1$, 则 $GH=$ ()



- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

【分析】延长 GH 交 AD 于点 P, 先证 $\triangle APH \cong \triangle FGH$ 得 $AP=GF=1$, $GH=PH=\frac{1}{2}PG$, 再利用勾股定理求得 $PG=\sqrt{2}$, 从而得出答案.

【解答】解: 如图, 延长 GH 交 AD 于点 P,



$\because$ 四边形 ABCD 和四边形 CEFG 都是矩形,

$\therefore \angle ADC = \angle ADG = \angle CGF = 90^\circ$, $AD=BC=2$, $GF=CE=1$,

$\therefore AD \parallel GF$,

$\therefore \angle GFH = \angle PAH$,

又 $\because H$ 是 AF 的中点,

$\therefore AH=FH$,

在 $\triangle APH$ 和 $\triangle FGH$ 中,

$$\therefore \begin{cases} \angle PAH = \angle GFH \\ AH = FH \\ \angle AHP = \angle FHG \end{cases},$$

$\therefore \triangle APH \cong \triangle FGH$ (ASA),

$\therefore AP=GF=1$, $GH=PH=\frac{1}{2}PG$,

$$\therefore PD=AD-AP=1,$$

$$\because CG=2, CD=1,$$

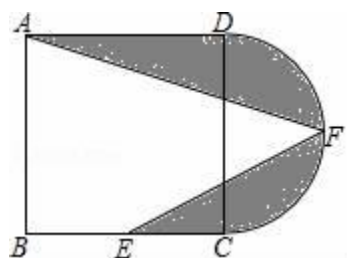
$$\therefore DG=1,$$

$$\text{则 } GH=\frac{1}{2}PG=\frac{1}{2}\times\sqrt{PD^2+DG^2}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

故选: C.

【点评】本题主要考查矩形的性质, 解题的关键是掌握全等三角形的判定与性质、矩形的性质、勾股定理等知识点.

12. (2018 年山东省威海市) 如图, 在正方形 ABCD 中, AB=12, 点 E 为 BC 的中点, 以 CD 为直径作半圆 CFD, 点 F 为半圆的中点, 连接 AF, EF, 图中阴影部分的面积是 ()



A. $18+36\pi$ B. $24+18\pi$ C. $18+18\pi$ D. $12+18\pi$

【分析】作 $FH \perp BC$ 于 H, 连接 FH, 如图, 根据正方形的性质和切线的性质得 $BE=CE=CH=FH=6$, 则利用勾股定理可计算出 $AE=6\sqrt{5}$, 通过 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \triangle EHF$ 得 $\angle AEF=90^\circ$, 然后利用图中阴影部分的面积 $=S_{\text{正方形 } ABCD} + S_{\text{半圆}} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle AEF}$ 进行计算.

【解答】解: 作 $FH \perp BC$ 于 H, 连接 FH, 如图,

$\because$ 点 E 为 BC 的中点, 点 F 为半圆的中点,

$$\therefore BE=CE=CH=FH=6,$$

$$AE=\sqrt{6^2+12^2}=6\sqrt{5},$$

易得 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \triangle EHF$,

$$\therefore \angle AEB=\angle EFH,$$

而 $\angle EFH+\angle FEH=90^\circ$,

$$\therefore \angle AEB+\angle FEH=90^\circ,$$

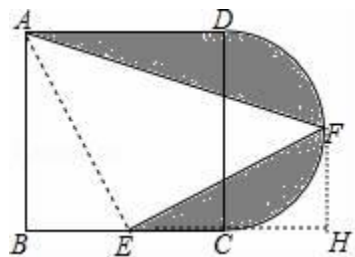
$$\therefore \angle AEF=90^\circ,$$

$$\therefore \text{图中阴影部分的面积} = S_{\text{正方形 } ABCD} + S_{\text{半圆}} - S_{\triangle ABE} - S_{\triangle AEF}$$

$$=12 \times 12 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \times 12 \times 6 - \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{5} \times 6\sqrt{5}$$

$$=18+18\pi.$$

故选：C.



【点评】本题考查了正多边形和圆：利用面积的和差计算不规则图形的面积.

二、填空题（本题包括 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

13. （2018 年山东省威海市）分解因式： $-\frac{1}{2}a^2+2a-2=$ $-\frac{1}{2}(a-2)^2$.

【分析】原式提取公因式，再利用完全平方公式分解即可.

【解答】解：原式 $= -\frac{1}{2}(a^2-4a+4) = -\frac{1}{2}(a-2)^2$,

故答案为： $-\frac{1}{2}(a-2)^2$

【点评】此题考查了因式分解 - 运用公式法，熟练掌握因式分解的方法是解本题的关键.

14. （2018 年山东省威海市）关于 x 的一元二次方程 $(m-5)x^2+2x+2=0$ 有实根，则 m 的最大整数解是 $m=4$.

【分析】若一元二次方程有实根，则根的判别式 $\Delta=b^2-4ac \geq 0$ ，建立关于 m 的不等式，求出 m 的取值范围. 还要注意二次项系数不为 0.

【解答】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $(m-5)x^2+2x+2=0$ 有实根，

$$\therefore \Delta=4-8(m-5) > 0, \text{ 且 } m-5 \neq 0,$$

解得 $m < 5.5$, 且 $m \neq 5$,

则 m 的最大整数解是 $m=4$.

故答案为： $m=4$.

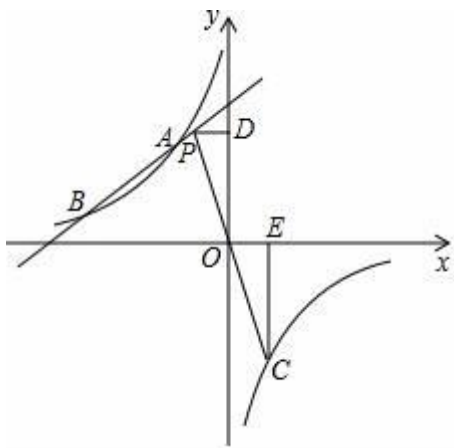
【点评】考查了根的判别式，总结：一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：

(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；

(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；

(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根.

15. (2018 年山东省威海市) 如图, 直线 AB 与双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$) 交于点 A, B, 点 P 是直线 AB 上一动点, 且点 P 在第二象限. 连接 PO 并延长交双曲线于点 C. 过点 P 作 $PD \perp y$ 轴, 垂足为点 D. 过点 C 作 $CE \perp x$ 轴, 垂足为 E. 若点 A 的坐标为 $(-2, 3)$, 点 B 的坐标为 $(m, 1)$, 设 $\triangle POD$ 的面积为 S_1 , $\triangle COE$ 的面积为 S_2 , 当 $S_1 > S_2$ 时, 点 P 的横坐标 x 的取值范围为 $-6 < x < -2$.



【分析】利用待定系数法求出 k 、 m , 再利用图象法即可解决问题;

【解答】解: $\because A(-2, 3)$ 在 $y = \frac{k}{x}$ 上,

$$\therefore k = -6.$$

$\because$ 点 $B(m, 1)$ 在 $y = \frac{-6}{x}$ 上,

$$\therefore m = -6,$$

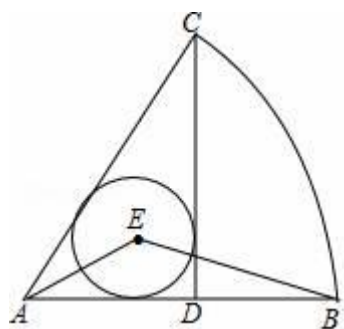
观察图象可知: 当 $S_1 > S_2$ 时, 点 P 在线段 AB 上,

$\therefore$ 点 P 的横坐标 x 的取值范围为 $-6 < x < -2$.

故答案为 $-6 < x < -2$.

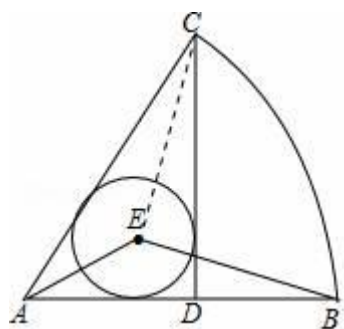
【点评】本题考查反比例函数的性质、三角形的面积、待定系数法等知识, 解题的关键是灵活运用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

16. (2018 年山东省威海市) 如图, 在扇形 CAB 中, $CD \perp AB$, 垂足为 D, $\odot E$ 是 $\triangle ACD$ 的内切圆, 连接 AE, BE, 则 $\angle AEB$ 的度数为 135° .



【分析】如图，连接 EC. 首先证明 $\angle AEC = 135^\circ$ ，再证明 $\triangle EAC \cong \triangle EAB$ 即可解决问题；

【解答】解：如图，连接 EC.



$\because E$ 是 $\triangle ADC$ 的内心，

$$\therefore \angle AEC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ADC = 135^\circ,$$

在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle AEB$ 中，

$$\begin{cases} AE = AE \\ \angle EAC = \angle EAB \\ AC = AB \end{cases}$$

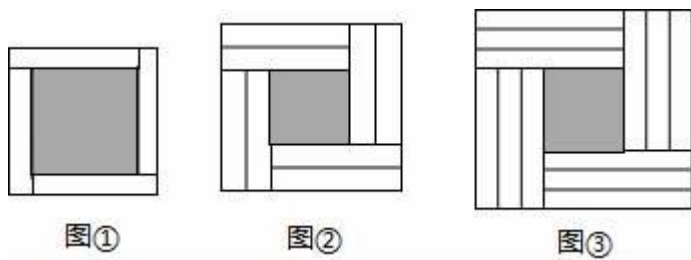
$$\therefore \triangle EAC \cong \triangle EAB,$$

$$\therefore \angle AEB = \angle AEC = 135^\circ,$$

故答案为 135° .

【点评】本题考查三角形的内心、全等三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会添加常用辅助线，构造全等三角形解决问题，属于中考常考题型.

17. (2018 年山东省威海市) 用若干个形状、大小完全相同的矩形纸片围成正方形，4 个矩形纸片围成如图①所示的正方形，其阴影部分的面积为 12；8 个矩形纸片围成如图②所示的正方形，其阴影部分的面积为 8；12 个矩形纸片围成如图③所示的正方形，其阴影部分的面积为 $44 - 16\sqrt{6}$.



【分析】图①中阴影部分的边长为 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ，图②中，阴影部分的边长为 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ；设小矩形的长为 a ，宽为 b ，依据等量关系即可得到方程组，进而得出 a ， b 的值，即可得到图③中，阴影部分的面积.

【解答】解：由图可得，图①中阴影部分的边长为 $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ ，图②中，阴影部分的边长为 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ；

设小矩形的长为 a ，宽为 b ，依题意得

$$\begin{cases} a=b+2\sqrt{3} \\ a=2b+2\sqrt{2} \end{cases}$$

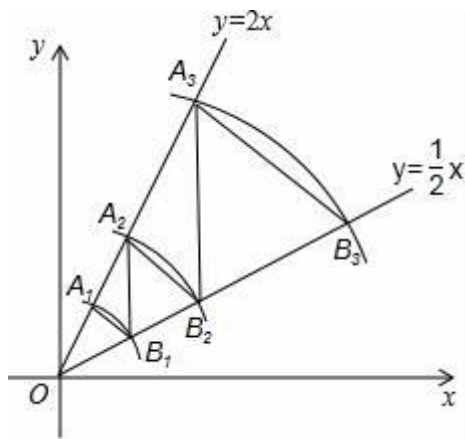
$$\text{解得} \begin{cases} a=4\sqrt{3}-2\sqrt{2} \\ b=2\sqrt{3}-2\sqrt{2} \end{cases}$$

$\therefore$ 图③中，阴影部分的面积为 $(a-3b)^2 = (4\sqrt{3}-2\sqrt{2}-6\sqrt{3}+6\sqrt{2})^2 = 44-16\sqrt{6}$.

故答案为： $44-16\sqrt{6}$.

【点评】本题主要考查了二元一次方程组的应用以及二次根式的化简，当问题较复杂时，有时设与要求的未知量相关的另一些量为未知数，即为间接设元. 无论怎样设元，设几个未知数，就要列几个方程.

18. (2018 年山东省威海市) 如图，在平面直角坐标系中，点 A_1 的坐标为 $(1, 2)$ ，以点 O 为圆心，以 OA_1 长为半径画弧，交直线 $y=\frac{1}{2}x$ 于点 B_1 . 过 B_1 点作 $B_1A_2 \parallel y$ 轴，交直线 $y=2x$ 于点 A_2 ，以 O 为圆心，以 OA_2 长为半径画弧，交直线 $y=\frac{1}{2}x$ 于点 B_2 ；过点 B_2 作 $B_2A_3 \parallel y$ 轴，交直线 $y=2x$ 于点 A_3 ，以点 O 为圆心，以 OA_3 长为半径画弧，交直线 $y=\frac{1}{2}x$ 于点 B_3 ；过 B_3 点作 $B_3A_4 \parallel y$ 轴，交直线 $y=2x$ 于点 A_4 ，以点 O 为圆心，以 OA_4 长为半径画弧，交直线 $y=\frac{1}{2}x$ 于点 B_4 ， $\cdots$ 按照如此规律进行下去，点 B_{2018} 的坐标为 $(2^{2018}, 2^{2017})$.



【分析】根据题意可以求得点 B_1 的坐标，点 A_2 的坐标，点 B_2 的坐标，然后即可发现坐标变化的规律，从而可以求得点 B_{2018} 的坐标.

【解答】解：由题意可得，

点 A_1 的坐标为 $(1, 2)$ ，

设点 B_1 的坐标为 $(a, \frac{1}{2}a)$ ，

$$\sqrt{a^2 + (\frac{1}{2}a)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2}, \text{ 解得, } a=2,$$

$\therefore$ 点 B_1 的坐标为 $(2, 1)$ ，

同理可得，点 A_2 的坐标为 $(2, 4)$ ，点 B_2 的坐标为 $(4, 2)$ ，

点 A_3 的坐标为 $(4, 8)$ ，点 B_3 的坐标为 $(8, 4)$ ，

.....

$\therefore$ 点 B_{2018} 的坐标为 $(2^{2018}, 2^{2017})$ ，

故答案为： $(2^{2018}, 2^{2017})$.

【点评】本题考查一次函数图象上点的坐标特征、点的坐标，解答本题的关键是明确题意，发现题目中坐标的变化规律，求出相应的点的坐标.

三、解答题（本题包括 7 小题，共 66 分）

19. （2018 年山东省威海市）解不等式组，并将解集在数轴上表示出来.

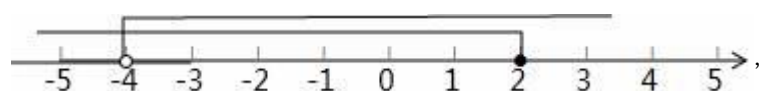
$$\begin{cases} 2x-7 < 3(x-1), & \text{①} \\ 5-\frac{1}{2}(x+4) \geq x. & \text{②} \end{cases}$$

【分析】根据解一元一次不等式组的步骤，大小小大中间找，可得答案

【解答】解：解不等式①，得 $x > -4$ ，

解不等式②，得 $x \leq 2$ ，

把不等式①②的解集在数轴上表示如图



原不等式组的解集为 $-4 < x \leq 2$.

【点评】 本题考查了解一元一次不等式组，利用不等式组的解集的表示方法是解题关键.

20. (2018 年山东省威海市) 某自动化车间计划生产 480 个零件，当生产任务完成一半时，停止生产进行自动化程序软件升级，用时 20 分钟，恢复生产后工作效率比原来提高了 $\frac{1}{3}$ ，结果完成任务时比原计划提前了 40 分钟，求软件升级后每小时生产多少个零件？

【分析】 设软件升级前每小时生产 x 个零件，则软件升级后每小时生产 $(1+\frac{1}{3})x$ 个零件，根据工作时间=工作总量÷工作效率结合软件升级后节省的时间，即可得出关于 x 的分式方程，解之经检验后即可得出结论.

【解答】 解：设软件升级前每小时生产 x 个零件，则软件升级后每小时生产 $(1+\frac{1}{3})x$ 个零件，

根据题意得： $\frac{240}{x} - \frac{240}{(1+\frac{1}{3})x} = \frac{40}{60} + \frac{20}{60}$,

解得： $x=60$,

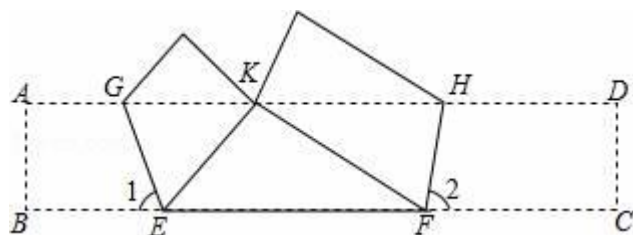
经检验， $x=60$ 是原方程的解，且符合题意，

$\therefore (1+\frac{1}{3})x=80$.

答：软件升级后每小时生产 80 个零件.

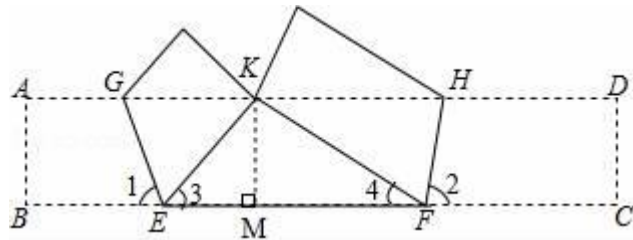
【点评】 本题考查了分式方程的应用，找准等量关系，正确列出分式方程是解题的关键.

21. (2018 年山东省威海市) 如图，将矩形 ABCD (纸片) 折叠，使点 B 与 AD 边上的点 K 重合，EG 为折痕；点 C 与 AD 边上的点 K 重合，FH 为折痕. 已知 $\angle 1=67.5^\circ$ ， $\angle 2=75^\circ$ ， $EF=\sqrt{3}+1$ ，求 BC 的长.



【分析】由题意知 $\angle 3 = 180^\circ - 2\angle 1 = 45^\circ$ 、 $\angle 4 = 180^\circ - 2\angle 2 = 30^\circ$ 、 $BE = KE$ 、 $KF = FC$ ，作 $KM \perp BC$ ，设 $KM = x$ ，知 $EM = x$ 、 $MF = \sqrt{3}x$ ，根据 EF 的长求得 $x = 1$ ，再进一步求解可得。

【解答】解：由题意，得： $\angle 3 = 180^\circ - 2\angle 1 = 45^\circ$ ， $\angle 4 = 180^\circ - 2\angle 2 = 30^\circ$ ， $BE = KE$ 、 $KF = FC$ ，如图，过点 K 作 $KM \perp BC$ 于点 M ，



设 $KM = x$ ，则 $EM = x$ 、 $MF = \sqrt{3}x$ ，

$$\therefore x + \sqrt{3}x = \sqrt{3} + 1,$$

解得： $x = 1$ ，

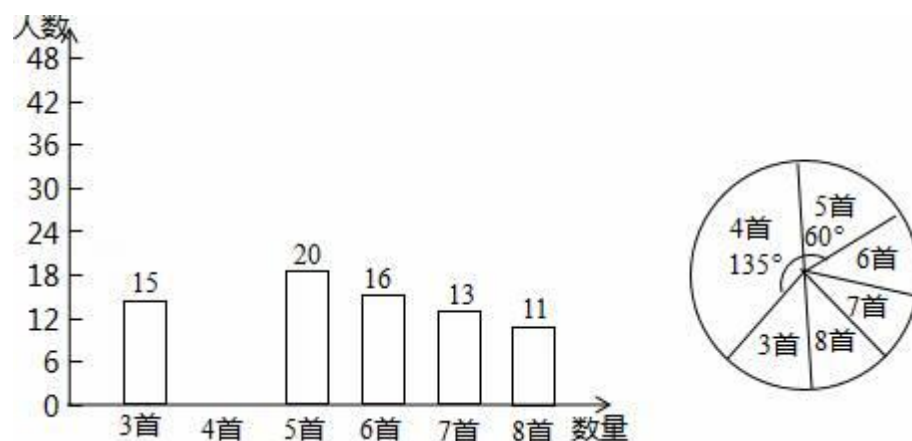
$$\therefore EK = \sqrt{2}, KF = 2,$$

$$\therefore BC = BE + EF + FC = EK + EF + KF = 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3},$$

$$\therefore BC \text{ 的长为 } 3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

【点评】本题主要考查翻折变换，解题的关键是掌握翻折变换的性质：折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等。

22. （2018 年山东省威海市）为积极响应“弘扬传统文化”的号召，某学校倡导全校 1200 名学生进行经典诗词诵背活动，并在活动之后举办经典诗词大赛，为了解本次系列活动的持续效果，学校团委在活动启动之初，随机抽取部分学生调查“一周诗词诵背数量”，根据调查结果绘制成的统计图（部分）如图所示。



大赛结束后一个月，再次抽查这部分学生“一周诗词诵背数量”，绘制成统计表

一周诗词诵背数量	3 首	4 首	4 首	6 首	7 首	8 首
人数	10	10	15	40	25	20

请根据调查的信息分析:

- (1) 活动启动之初学生“一周诗词诵背数量”的中位数为 4.5 首;
- (2) 估计大赛后一个月该校学生一周诗词诵背 6 首 (含 6 首) 以上的人数;
- (3) 选择适当的统计量, 从两个不同的角度分析两次调查的相关数据, 评价该校经典诗词诵背系列活动的效果.

【分析】(1) 根据统计图中的数据可以求得这组数据的中位数;

(2) 根基表格中的数据可以解答本题;

(3) 根据统计图和表格中的数据可以分别计算出比赛前后的众数和中位数, 从而可以解答本题.

【解答】解: (1) 本次调查的学生有: $20 \div \frac{60^\circ}{360^\circ} = 120$ (名),

背诵 4 首的有: $120 - 15 - 20 - 16 - 13 - 11 = 45$ (人),

$\therefore 15 + 45 = 60$,

$\therefore$ 这组数据的中位数是: $(4+5) \div 2 = 4.5$ (首),

故答案为: 4.5 首;

(2) 大赛后一个月该校学生一周诗词诵背 6 首 (含 6 首) 以上的有: $1200 \times \frac{40+25+20}{120} = 850$ (人),

答: 大赛后一个月该校学生一周诗词诵背 6 首 (含 6 首) 以上的有 850 人;

(3) 活动启动之初的中位数是 4.5 首, 众数是 4 首,

大赛比赛后一个月时的中位数是 6 首, 众数是 6 首,

由比赛前后的中位数和众数看, 比赛后学生背诵诗词的积极性明显提高, 这次举办后的效果比较理想.

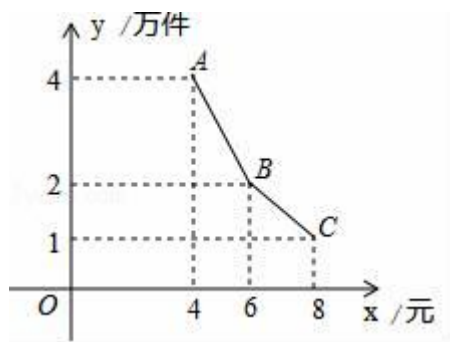
【点评】本题考查扇形统计图、条形统计图、用样本估计总体、统计量的选择, 解答本题的关键是明确题意, 找出所求问题需要的条件, 利用数形结合的思想解答.

23. (2018 年山东省威海市) 为了支持大学生创业, 某市政府出台了一项优惠政策: 提供 10 万元的无息创业贷款. 小王利用这笔贷款, 注册了一家淘宝网店, 招收 5 名员工, 销售一种火爆的电子产品, 并约定用该网店经营的利润, 逐月偿还这笔无息贷款. 已知该产品的

成本为每件 4 元，员工每人每月的工资为 4 千元，该网店还需每月支付其它费用 1 万元. 该产品每月销售量 y (万件) 与销售单价 x (元) 万件之间的函数关系如图所示.

(1) 求该网店每月利润 w (万元) 与销售单价 x (元) 之间的函数表达式;

(2) 小王自网店开业起，最快在第几个月可还清 10 万元的无息贷款?



【分析】 (1) y (万件) 与销售单价 x 是分段函数，根据待定系数法分别求直线 AB 和 BC 的解析式，又分两种情况，根据利润 = (售价 - 成本) $\times$ 销售量 - 费用，得结论;

(2) 分别计算两个利润的最大值，比较可得出利润的最大值，最后计算时间即可求解.

【解答】解： (1) 设直线 AB 的解析式为: $y=kx+b$,

代入 A (4, 4), B (6, 2) 得:
$$\begin{cases} 4k+b=4 \\ 6k+b=2 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} k=-1 \\ b=8 \end{cases}$$

$\therefore$ 直线 AB 的解析式为: $y=-x+8$, (2 分)

同理代入 B (6, 2), C (8, 1) 可得直线 BC 的解析式为: $y=-\frac{1}{2}x+5$, (2018 年山东省威海市)

$\therefore$ 工资及其他费作为: $0.4 \times 5 + 1 = 3$ 万元,

$\therefore$ 当 $4 \leq x \leq 6$ 时, $w_1 = (x-4)(-x+8) - 3 = -x^2 + 12x - 35$, (2018 年山东省威海市)

当 $6 \leq x \leq 8$ 时, $w_2 = (x-4)(-\frac{1}{2}x+5) - 3 = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 23$; (2018 年山东省威海市)

(2) 当 $4 \leq x \leq 6$ 时,

$$w_1 = -x^2 + 12x - 35 = -(x-6)^2 + 1,$$

$\therefore$ 当 $x=6$ 时, w_1 取最大值是 1, (2018 年山东省威海市)

当 $6 \leq x \leq 8$ 时,

$$w_2 = -\frac{1}{2}x^2 + 7x - 23 = -\frac{1}{2}(x-7)^2 + \frac{3}{2},$$

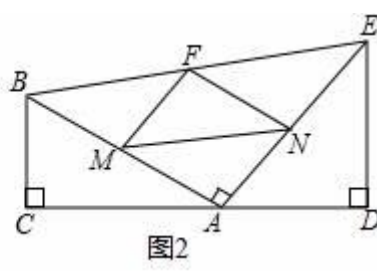
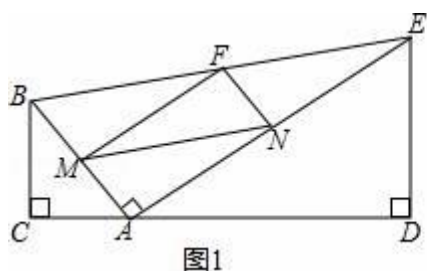
当 $x=7$ 时, w_2 取最大值是 1.5, (2018 年山东省威海市)

$$\therefore \frac{10}{1.5} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3},$$

即最快在第 7 个月可还清 10 万元的无息贷款. (2018 年山东省威海市)

【点评】本题主要考查学生利用待定系数法求解一次函数关系式，一次函数与一次不等式的应用，利用数形结合的思想，是一道综合性较强的代数应用题，能力要求比较高.

24. (2018 年山东省威海市) 如图①，在四边形 BCDE 中， $BC \perp CD$ ， $DE \perp CD$ ， $AB \perp AE$ ，垂足分别为 C，D，A， $BC \neq AC$ ，点 M，N，F 分别为 AB，AE，BE 的中点，连接 MN，MF，NF.



- (1) 如图②，当 $BC=4$ ， $DE=5$ ， $\tan \angle FMN=1$ 时，求 $\frac{AC}{AD}$ 的值；
- (2) 若 $\tan \angle FMN=\frac{1}{2}$ ， $BC=4$ ，则可求出图中哪些线段的长？写出解答过程；
- (3) 连接 CM，DN，CF，DF. 试证明 $\triangle FMC$ 与 $\triangle DNF$ 全等；
- (4) 在 (3) 的条件下，图中还有哪些其它的全等三角形？请直接写出.

【分析】(1) 根据四边形 ANFM 是平行四边形， $AB \perp AE$ ，即可得到四边形 ANFM 是矩形，再根据 $FN=FM$ ，即可得出矩形 ANFM 是正方形， $AB=AE$ ，结合 $\angle 1=\angle 3$ ， $\angle C=\angle D=90^\circ$ ，即可得到 $\triangle ABC \cong \triangle EAD$ ，进而得到 $BC=AD$ ， $CA=DE$ ，即可得出 $\frac{AC}{AD}=\frac{5}{4}$ ；

(2) 依据四边形 MANF 为矩形， $MF=\frac{1}{2}AE$ ， $NF=\frac{1}{2}AB$ ， $\tan \angle FMN=\frac{1}{2}$ ，即可得到 $\frac{AB}{AE}=\frac{1}{2}$ ，依据 $\triangle ABC \sim \triangle EAD$ ，即可得到 $\frac{AB}{AE}=\frac{BC}{AD}=\frac{1}{2}$ ，即可得到 AD 的长；

(3) 根据 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 都是直角三角形，M，N 分别是 AB，AE 的中点，即可得到 $BM=CM$ ， $NA=ND$ ，进而得出 $\angle 4=2\angle 1$ ， $\angle 5=2\angle 3$ ，根据 $\angle 4=\angle 5$ ，即可得到 $\angle FMC=\angle FND$ ，再根据 $FM=DN$ ， $CM=NF$ ，可得 $\triangle FMC \cong \triangle DNF$ ；

(4) 由 $BM=AM=FN$ ， $MF=AN=NE$ ， $\angle FMB=\angle MFN=\angle MAN=\angle ENF=90^\circ$ ，即可得到： $\triangle BMF \cong \triangle NFM \cong \triangle MAN \cong \triangle FNE$.

【解答】解：(1) $\because$ 点 M，N，F 分别为 AB，AE，BE 的中点，

∴ MF, NF 都是△ABE 的中位线,

$$\therefore MF = \frac{1}{2}AE = AN, \quad NF = \frac{1}{2}AB = AM,$$

∴ 四边形 ANFM 是平行四边形,

又 ∵ AB ⊥ AE,

∴ 四边形 ANFM 是矩形,

又 ∵ tan ∠FMN = 1,

$$\therefore FN = FM,$$

∴ 矩形 ANFM 是正方形, AB = AE,

又 ∵ ∠1 + ∠2 = 90°, ∠2 + ∠3 = 90°,

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle C = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle EAD \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BC = AD = 4, \quad CA = DE = 5,$$

$$\therefore \frac{AC}{AD} = \frac{5}{4};$$

(2) 可求线段 AD 的长.

由 (1) 可得, 四边形 MANF 为矩形, $MF = \frac{1}{2}AE$, $NF = \frac{1}{2}AB$,

$$\therefore \tan \angle FMN = \frac{1}{2}, \text{ 即 } \frac{FN}{FM} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3, \quad \angle C = \angle D = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle EAD,$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{BC}{AD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore BC = 4,$$

$$\therefore AD = 8;$$

(3) ∵ BC ⊥ CD, DE ⊥ CD,

∴ △ABC 和 △ADE 都是直角三角形,

∵ M, N 分别是 AB, AE 的中点,

$\therefore BM=CM, NA=ND,$
 $\therefore \angle 4=2\angle 1, \angle 5=2\angle 3,$
 $\therefore \angle 1=\angle 3,$
 $\therefore \angle 4=\angle 5,$
 $\therefore \angle FMC=90^\circ + \angle 4, \angle FND=90^\circ + \angle 5,$
 $\therefore \angle FMC=\angle FND,$
 $\therefore FM=DN, CM=NF,$
 $\therefore \triangle FMC \cong \triangle DNF \text{ (SAS)} ;$

(4) 在 (3) 的条件下, $BM=AM=FN, MF=AN=NE, \angle FMB=\angle MFN=\angle MAN=\angle ENF=90^\circ,$
 $\therefore$ 图中有: $\triangle BMF \cong \triangle NFM \cong \triangle MAN \cong \triangle FNE.$

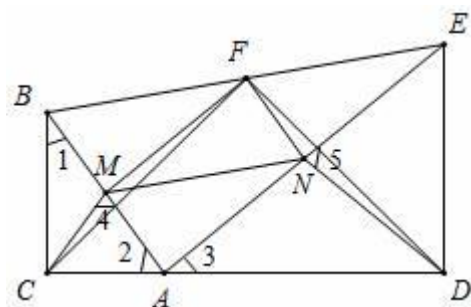


图1

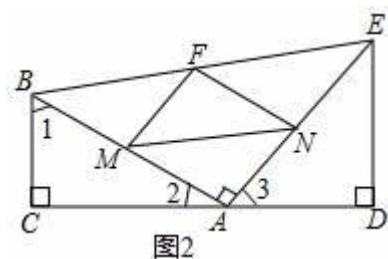


图2

【点评】 本题属于相似形综合题, 主要考查了全等三角形的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 直角三角形的性质以及矩形的判定与性质的综合运用, 解决问题的关键是判定全等三角形或相似三角形, 利用全等三角形的对应边相等, 相似三角形的对应边成比例得出有关结论.

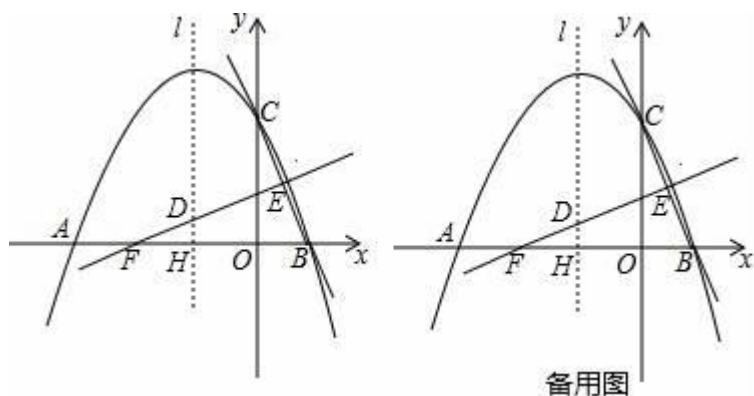
25. (2018 年山东省威海市) 如图, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(-4, 0)$, $B(2, 0)$, 与 y 轴交于点 $C(0, 4)$, 线段 BC 的中垂线与对称轴 l 交于点 D , 与 x 轴交于点 F , 与 BC 交于点 E , 对称轴 l 与 x 轴交于点 H .

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 求点 D 的坐标;

(3) 点 P 为 x 轴上一点, $\odot P$ 与直线 BC 相切于点 Q , 与直线 DE 相切于点 R . 求点 P 的坐标;

(4) 点 M 为 x 轴上方抛物线上的点, 在对称轴 l 上是否存在一点 N , 使得以点 D, P, M, N 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 则直接写出 N 点坐标; 若不存在, 请说明理由.



【分析】(1) 利用待定系数法问题可解;

(2) 依据垂直平分线性质, 利用勾股定理构造方程;

(3) 由题意画示意图可以发现由两种可能性, 确定方案后利用锐角三角函数定义构造方程, 求出半径及点 P 坐标;

(4) 通过分类讨论画出可能图形, 注意利用平行四边形的性质, 同一对角线上的两个端点到另一对角线距离相等.

【解答】解: (1) $\because$ 抛物线过点 $A(-4, 0)$, $B(2, 0)$

$\therefore$ 设抛物线表达式为: $y=a(x+4)(x-2)$

把 $C(0, 4)$ 带入得

$$4=a(0+4)(0-2)$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{抛物线表达式为: } y=-\frac{1}{2}(x+4)(x-2)=-\frac{1}{2}x^2-x+4$$

(2) 由 (1) 抛物线对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a} = -1$

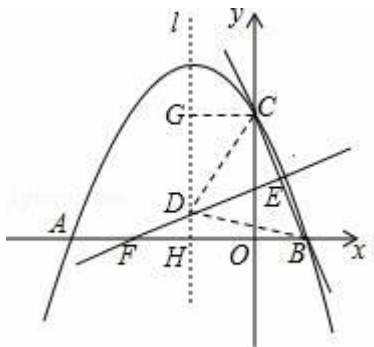
∴ 线段 BC 的中垂线与对称轴 l 交于点 D

∴ 点 D 在对称轴上

设点 D 坐标为 $(-1, m)$

过点 C 做 $CG \perp l$ 于 G, 连 DC, DB

∴ $DC = DB$



在 $Rt\triangle DCG$ 和 $Rt\triangle DBH$ 中

$$\therefore DC^2 = 1^2 + (4 - m)^2, DB^2 = m^2 + (2 + 1)^2$$

$$\therefore 12 + (4 - m)^2 = m^2 + (2 + 1)^2$$

解得: $m = 1$

∴ 点 D 坐标为 $(-1, 1)$

(3) ∵ 点 B 坐标为 $(2, 0)$, C 点坐标为 $(0, 4)$

$$\therefore BC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

∵ EF 为 BC 中垂线

$$\therefore BE = \sqrt{5}$$

在 $Rt\triangle BEF$ 和 $Rt\triangle BOC$ 中,

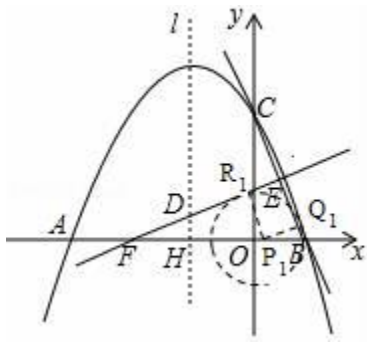
$$\cos \angle CBF = \frac{BE}{BF} = \frac{OB}{BC}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{BF} = \frac{2}{2\sqrt{5}}$$

$$\therefore BF = 5, EF = \sqrt{BF^2 - BE^2} = 2\sqrt{5}, OF = 3$$

设 $\odot P$ 的半径为 r , $\odot P$ 与直线 BC 和 EF 都相切

如图:



①当圆心 P_1 在直线 BC 左侧时, 连 P_1Q_1 , P_1R_1 , 则 $P_1Q_1=P_1R_1=r_1$

$$\therefore \angle P_1Q_1E = \angle P_1R_1E = \angle R_1EQ_1 = 90^\circ$$

$\therefore$ 四边形 $P_1Q_1ER_1$ 是正方形

$$\therefore ER_1 = P_1Q_1 = r_1$$

在 $Rt\triangle BEF$ 和 $Rt\triangle FR_1P_1$ 中

$$\tan \angle 1 = \frac{BE}{EF} = \frac{P_1R_1}{FR_1}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{r_1}{2\sqrt{5} - r_1}$$

$$\therefore r_1 = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$$\therefore \sin \angle 1 = \frac{BE}{BF} = \frac{P_1R_1}{FP_1}$$

$$\therefore FP_1 = \frac{10}{3}, \quad OP_1 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{点 } P_1 \text{ 坐标为 } \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

②同理, 当圆心 P_2 在直线 BC 右侧时,

$$\text{可求 } r_2 = 2\sqrt{5}, \quad OP_2 = 7$$

$$\therefore P_2 \text{ 坐标为 } (7, 0)$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 坐标为 } \left(\frac{1}{3}, 0\right) \text{ 或 } (7, 0)$$

(4) 存在

当点 P 坐标为 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ 时,

①若 DN 和 MP 为平行四边形对边, 则有 $DN=MP$

$$\text{当 } x=\frac{1}{3} \text{ 时, } y=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}+4=\frac{65}{18}$$

$$\therefore DN=MP=\frac{65}{18}$$

$$\therefore \text{点 } N \text{ 坐标为 } \left(-1, \frac{83}{18}\right)$$

②若 MN、DP 为平行四边形对边时，M、P 点到 ND 距离相等

$$\text{则点 } M \text{ 横坐标为 } -\frac{7}{3}$$

$$\text{则 } M \text{ 纵坐标为 } -\frac{1}{2} \times \left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \frac{7}{3} + 4 = \frac{65}{18}$$

由平行四边形中心对称性可知，点 M 到 N 的垂直距离等于点 P 到点 D 的垂直距离

$$\text{当点 } N \text{ 在 } D \text{ 点上方时, 点 } N \text{ 纵坐标为 } \frac{65}{18} - 1 = \frac{47}{18}$$

$$\text{此时点 } N \text{ 坐标为 } \left(-1, \frac{47}{18}\right)$$

$$\text{当点 } N \text{ 在 } x \text{ 轴下方时, 点 } N \text{ 坐标为 } \left(-1, -\frac{47}{18}\right)$$

当点 P 坐标为 (7, 0) 时，所求 N 点不存在.

$$\text{故答案为: } \left(-1, \frac{83}{18}\right), \left(-1, \frac{47}{18}\right), \left(-1, -\frac{47}{18}\right)$$

【点评】本题综合考查二次函数、圆和平行四边形存在性的判定等相关知识，应用了数形结合思想和分类讨论的数学思想.