

2017 年山东省莱芜市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把正确选项的代码涂在答题卡上，每小题选对得 3 分，选错、不选或选出的答案超过一个均记零分，共 36 分）

1. (3 分) -6 的倒数是 ()

A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. -6 D. 6

2. (3 分) 某种细菌的直径是 0.00000078 米，将数据 0.00000078 用科学记数法表示为 ()

A. 7.8×10^{-7} B. 7.8×10^{-8} C. 0.78×10^{-7} D. 78×10^{-8}

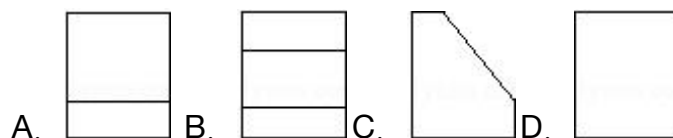
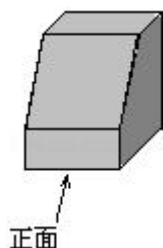
3. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $2x^2 - x^2 = 1$ B. $x^6 \div x^3 = x^2$ C. $4x \cdot x^4 = 4x^5$ D. $(3xy^2)^2 = 6x^2y^4$

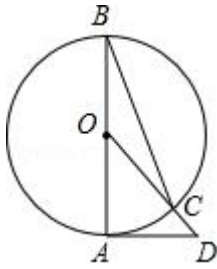
4. (3 分) 电动车每小时比自行车多行驶了 25 千米，自行车行驶 30 千米比电动车行驶 40 千米多用了 1 小时，求两车的平均速度各为多少？设自行车的平均速度为 x 千米/小时，应列方程为 ()

A. $\frac{30}{x} - 1 = \frac{40}{x-25}$ B. $\frac{30}{x} - 1 = \frac{40}{x+25}$ C. $\frac{30}{x} + 1 = \frac{40}{x-25}$ D. $\frac{30}{x} + 1 = \frac{40}{x+25}$

5. (3 分) 将一个正方体沿正面相邻两条棱的中点连线截去一个三棱柱，得到一个如图所示的几何体，则该几何体的左视图是 ()



6. (3 分) 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，直线 DA 与 $\odot O$ 相切与点 A ， DO 交 $\odot O$ 于点 C ，连接 BC ，若 $\angle ABC = 21^\circ$ ，则 $\angle ADC$ 的度数为 ()

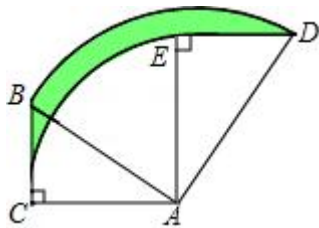


A. 46° B. 47° C. 48° D. 49°

7. (3分) 一个多边形的内角和比其外角和的 2 倍多 180° ，则该多边形的对角线的条数是 ()

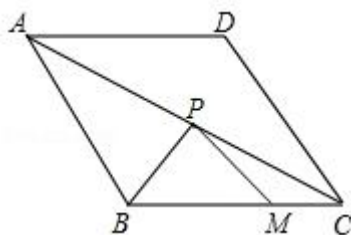
A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

8. (3分) 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BCA=90^\circ$ ， $\angle BAC=30^\circ$ ， $BC=2$ ，将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕 A 点顺时针旋转 90° 得到 $\text{Rt}\triangle ADE$ ，则 BC 扫过的面积为 ()



A. $\frac{\pi}{2}$ B. $(2 - \sqrt{3})\pi$ C. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\pi$ D. π

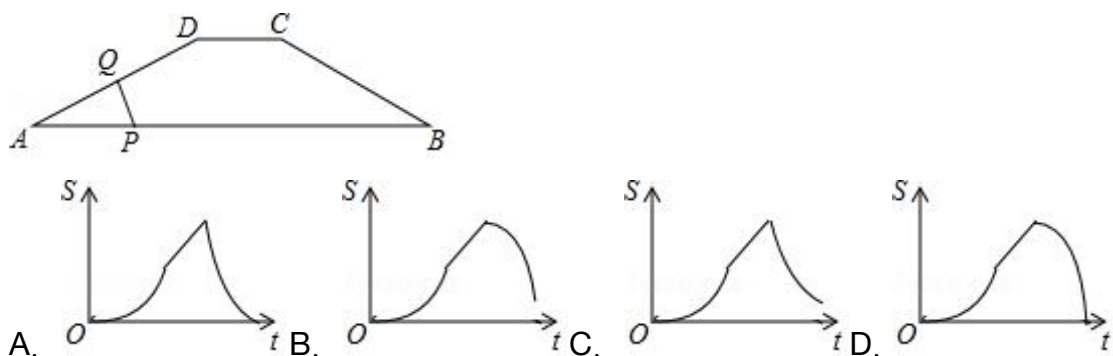
9. (3分) 如图，菱形 ABCD 的边长为 6， $\angle ABC=120^\circ$ ，M 是 BC 边的一个三等分点，P 是对角线 AC 上的动点，当 PB+PM 的值最小时，PM 的长是 ()



A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{26}}{4}$

10. (3分) 如图，在四边形 ABCD 中， $DC \parallel AB$ ， $AD=5$ ， $CD=3$ ， $\sin A = \sin B = \frac{1}{3}$ ，动点 P 自 A 点出发，沿着边 AB 向点 B 匀速运动，同时动点 Q 自点 A 出发，沿着边 AD - DC - CB 匀速运动，速度均为每秒 1 个单位，当其中一个动点到达终

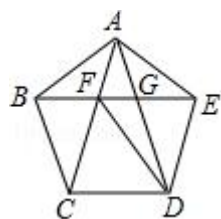
点时，它们同时停止运动，设点 P 运动 t (秒) 时， $\triangle APQ$ 的面积为 s ，则 s 关于 t 的函数图象是 ()



11. (3 分) 对于实数 a, b ，定义符号 $\min\{a, b\}$ ，其意义为：当 $a \geq b$ 时， $\min\{a, b\} = b$ ；当 $a < b$ 时， $\min\{a, b\} = a$ 。例如： $\min\{2, -1\} = -1$ ，若关于 x 的函数 $y = \min\{2x - 1, -x + 3\}$ ，则该函数的最大值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

12. (3 分) 如图，正五边形 $ABCDE$ 的边长为 2，连结 AC 、 AD 、 BE ， BE 分别与 AC 和 AD 相交于点 F 、 G ，连结 DF ，给出下列结论：① $\angle FDG = 18^\circ$ ；② $FG = 3 - \sqrt{5}$ ；③ $(S_{\text{四边形} CDEF})^2 = 9 + 2\sqrt{5}$ ；④ $DF^2 - DG^2 = 7 - 2\sqrt{5}$ 。其中正确结论的个数是 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题 (本大题共 5 小题，每小题填对得 4 分，共 20 分，请填在答题卡上)

13. (4 分) $(-\frac{1}{2})^{-3} - 2\cos 45^\circ + (3.14 - \pi)^0 + \sqrt{8} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. (4 分) 圆锥的底面周长为 $\frac{2\pi}{3}$ ，母线长为 2，点 P 是母线 OA 的中点，一根

细绳（无弹性）从点 P 绕圆锥侧面一周回到点 P，则细绳的最短长度为_____.

15. (4 分) 直线 $y=kx+b$ 与双曲线 $y=-\frac{6}{x}$ 交于 A $(-3, m)$, B $(n, -6)$ 两点,

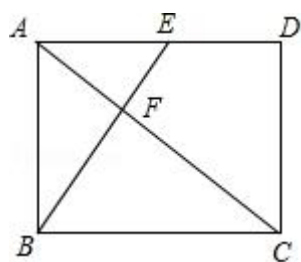
将直线 $y=kx+b$ 向上平移 8 个单位长度后, 与双曲线交于 D, E 两点, 则 $S_{\triangle}$

$ADE=$ _____.

16. (4 分) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a<0$) 图象与 x 轴的交点 A、B 的横坐标分别为 $-3, 1$, 与 y 轴交于点 C, 下面四个结论:

① $16a-4b+c<0$; ② 若 P $(-5, y_1)$, Q $(\frac{5}{2}, y_2)$ 是函数图象上的两点, 则 $y_1 > y_2$; ③ $a=-\frac{1}{3}c$; ④ 若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 则 $b=-\frac{2\sqrt{7}}{3}$. 其中正确的有 (请将结论正确的序号全部填上)

17. (4 分) 如图, 在矩形 ABCD 中, $BE \perp AC$ 分别交 AC、AD 于点 F、E, 若 $AD=1$, $AB=CF$, 则 $AE=$ _____.



三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 64 分, 解答要写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

18. (6 分) 先化简, 再求值: $(a+\frac{6a}{a-3}) \div (a+\frac{9a+9}{a-3})$, 其中 $a=\sqrt{3}-3$.

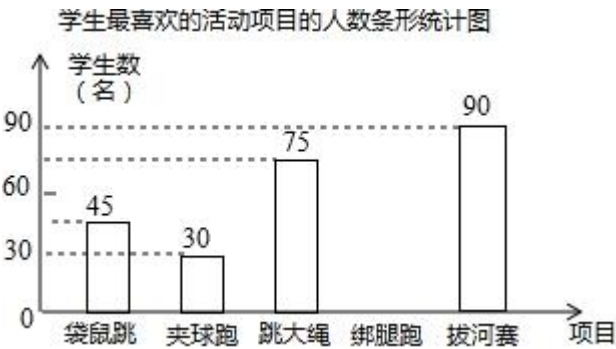
19. (8分) 为了丰富校园文化, 某学校决定举行学生趣味运动会, 将比赛项目确定为袋鼠跳、夹球跑、跳大绳、绑腿跑和拔河赛五种, 为了解学生对这五项运动的喜欢情况, 随机调查了该校 a 名学生最喜欢的一种项目 (每名学生必选且只能选择五项中的一种), 并将调查结果绘制成如图不完整的统计图表:

学生最喜欢的活动项目的人数统计表

项目	学生数 (名)	百分比 (%)
袋鼠跳	45	15
夹球跑	30	c
跳大绳	75	25
绑腿跑	b	20
拔河赛	90	30

根据图表中提供的信息, 解答下列问题:

- (1) $a=$ _____, $b=$ _____, $c=$ _____.
- (2) 请将条形统计图补充完整;
- (3) 根据调查结果, 请你估计该校 3000 名学生中有多少名学生最喜欢绑腿跑;
- (4) 根据调查结果, 某班决定从这五项 (袋鼠跳、夹球跑、跳大绳、绑腿跑和拔河赛可分别记为 A、B、C、D、E) 中任选其中两项进行训练, 用画树状图或列表的方法求恰好选到学生喜欢程度最高的两项的概率.

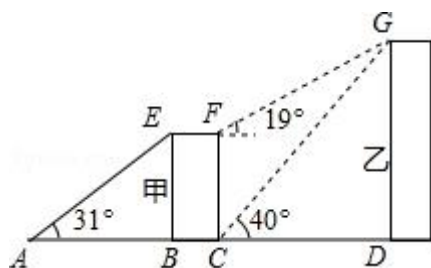


20. (9 分) 某学校教学楼 (甲楼) 的顶部 E 和大门 A 之间挂了一些彩旗. 小颖测得大门 A 距甲楼的距离 AB 是 31cm, 在 A 处测得甲楼顶部 E 处的仰角是 31° .

(1) 求甲楼的高度及彩旗的长度; (精确到 0.01m)

(2) 若小颖在甲楼楼底 C 处测得学校后面医院楼 (乙楼) 楼顶 G 处的仰角为 40° , 爬到甲楼楼顶 F 处测得乙楼楼顶 G 处的仰角为 19° , 求乙楼的高度及甲乙两楼之间的距离. (精确到 0.01m)

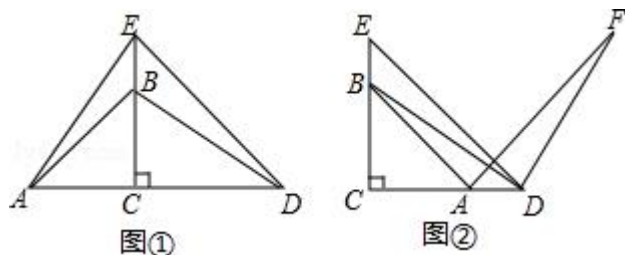
($\cos 31^\circ \approx 0.86$, $\tan 31^\circ \approx 0.60$, $\cos 19^\circ \approx 0.95$, $\tan 19^\circ \approx 0.34$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$)



21. (9 分) 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 是两个大小不同的等腰直角三角形.

(1) 如图①所示, 连接 AE, DB, 试判断线段 AE 和 DB 的数量和位置关系, 并说明理由;

(2) 如图②所示, 连接 DB, 将线段 DB 绕 D 点顺时针旋转 90° 到 DF, 连接 AF, 试判断线段 DE 和 AF 的数量和位置关系, 并说明理由.



22. (10 分) 某网店销售甲、乙两种防雾霾口罩，已知甲种口罩每袋的售价比乙种口罩多 5 元，小丽从该网店网购 2 袋甲种口罩和 3 袋乙种口罩共花费 110 元.

(1) 改网店甲、乙两种口罩每袋的售价各多少元?

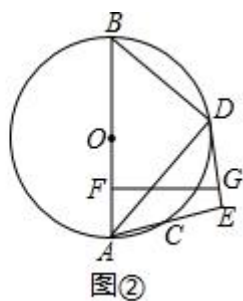
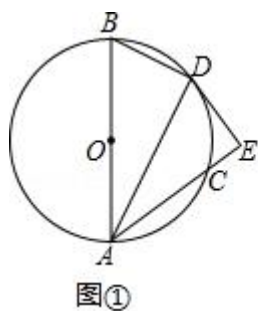
(2) 根据消费者需求，网店决定用不超过 10000 元购进甲、乙两种口罩共 500 袋，且甲种口罩的数量大于乙种口罩的 $\frac{4}{5}$ ，已知甲种口罩每袋的进价为 22.4 元，乙种口罩每袋的进价为 18 元，请你帮助网店计算有几种进货方案？若使网店获利最大，应该购进甲、乙两种口罩各多少袋，最大获利多少元？

23. (10 分) 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径， C 是圆上一点， $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D ，过 D 作 $DE \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 E ，如图①.

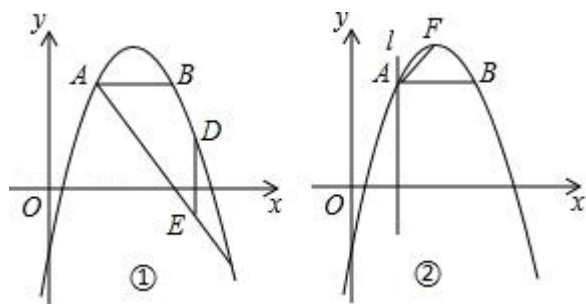
(1) 求证： D 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 若 $AB=10$, $AC=6$, 求 BD 的长;

(3) 如图②, 若 F 是 OA 中点, $FG \perp OA$ 交直线 DE 于点 G , 若 $FG=\frac{19}{4}$, $\tan \angle BAD=\frac{3}{4}$, 求 $\odot O$ 的半径.



24. (12 分) 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过 $A(2, 3)$, $B(4, 3)$, $C(6, -5)$ 三点.



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 如图①, 抛物线上一点 D 在线段 AC 的上方, $DE \perp AB$ 交 AC 于点 E , 若

满足 $\frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 求点 D 的坐标;

(3) 如图②, F 为抛物线顶点, 过 A 作直线 $l \perp AB$, 若点 P 在直线 l 上运动, 点 Q 在 x 轴上运动, 是否存在这样的点 P 、 Q , 使得以 B 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABF$ 相似, 若存在, 求 P 、 Q 的坐标, 并求此时 $\triangle BPQ$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.

2017 年山东省莱芜市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把正确选项的代码涂在答题卡上，每小题选对得 3 分，选错、不选或选出的答案超过一个均记零分，共 36 分）

1. (3 分) (2017•莱芜) -6 的倒数是 ()

A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{6}$ C. -6 D. 6

【考点】17: 倒数.

【分析】乘积是 1 的两数互为倒数.

【解答】解: -6 的倒数是 $-\frac{1}{6}$

故选: A

【点评】本题主要考查的是倒数的定义, 熟练掌握倒数的定义是解题的关键.

2. (3 分) (2017•莱芜) 某种细菌的直径是 0.00000078 米, 将数据 0.00000078 用科学记数法表示为 ()

A. 7.8×10^{-7} B. 7.8×10^{-8} C. 0.78×10^{-7} D. 78×10^{-8}

【考点】1J: 科学记数法—表示较小的数.

【分析】绝对值 < 1 的正数也可以利用科学记数法表示, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 与较大数的科学记数法不同的是其所使用的是负指数幂, 指数由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

【解答】解: 数 0.00000078 用科学记数法表示为 7.8×10^{-7} .

故选 A.

【点评】本题考查用科学记数法表示较小的数, 一般形式为 $a \times 10^{-n}$, 其中 $1 \leq$

$|a| < 10$, n 为由原数左边起第一个不为零的数字前面的 0 的个数所决定.

3. (3 分) (2017•莱芜) 下列运算正确的是 ()

A. $2x^2 - x^2 = 1$ B. $x^6 \div x^3 = x^2$ C. $4x \cdot x^4 = 4x^5$ D. $(3xy^2)^2 = 6x^2y^4$

【考点】4I: 整式的混合运算.

【分析】各项计算得到结果, 即可作出判断.

【解答】解: A、原式= x^2 , 不符合题意;

B、原式= x^3 , 不符合题意;

C、原式= $4x^5$, 符合题意;

D、原式= $9x^2y^4$, 不符合题意,

故选 C

【点评】此题考查了整式的混合运算, 熟练掌握运算是解本题的关键.

4. (3 分) (2017•莱芜) 电动车每小时比自行车多行驶了 25 千米, 自行车行驶 30 千米比电动车行驶 40 千米多用了 1 小时, 求两车的平均速度各为多少? 设自行车的平均速度为 x 千米/小时, 应列方程为 ()

A. $\frac{30}{x} - 1 = \frac{40}{x-25}$ B. $\frac{30}{x} - 1 = \frac{40}{x+25}$ C. $\frac{30}{x} + 1 = \frac{40}{x-25}$ D. $\frac{30}{x} + 1 = \frac{40}{x+25}$

【考点】B6: 由实际问题抽象出分式方程.

【分析】根据电动车每小时比自行车多行驶了 25 千米, 可用 x 表示出电动车的速度, 再由自行车行驶 30 千米比电动车行驶 40 千米多用了 1 小时, 可列出方程.

【解答】解:

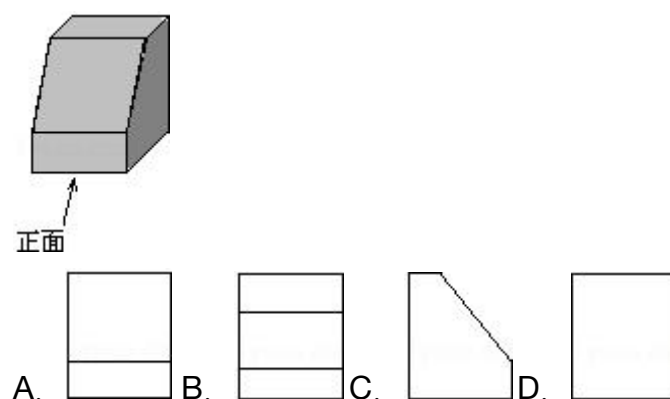
设自行车的平均速度为 x 千米/小时, 则电动车的平均速度为 $(x+25)$ 千米/小时,

由自行车行驶 30 千米比电动车行驶 40 千米多用了 1 小时，可列方程 $\frac{30}{x} - 1 = \frac{40}{x+25}$

故选 B.

【点评】本题主要考查列方程解应用题，确定出题目中的等量关系是解题的关键.

5. (3 分) (2017•莱芜) 将一个正方体沿正面相邻两条棱的中点连线截去一个三棱柱，得到一个如图所示的几何体，则该几何体的左视图是 ()



【考点】U2: 简单组合体的三视图.

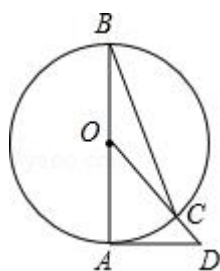
【分析】根据左视图的定义，画出左视图即可判断.

【解答】解：根据左视图的定义，从左边观察得到的图形，是选项 C.

故选 C.

【点评】本题考查三视图、熟练掌握三视图的定义，是解决问题的关键.

6. (3 分) (2017•莱芜) 如图，AB 是⊙O 的直径，直线 DA 与⊙O 相切与点 A，DO 交⊙O 于点 C，连接 BC，若 $\angle ABC = 21^\circ$ ，则 $\angle ADC$ 的度数为 ()



A. 46° B. 47° C. 48° D. 49°

【考点】 MC: 切线的性质.

【分析】 根据等边对等角可得 $\angle B = \angle BCO$, 再根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和可得 $\angle AOD = \angle B + \angle BCO$, 根据切线的性质可得 $\angle OAD = 90^\circ$, 然后根据直角三角形两锐角互余求解即可.

【解答】 解: $\because OB = OC$,

$$\therefore \angle B = \angle BCO = 21^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle B + \angle BCO = 21^\circ + 21^\circ = 42^\circ,$$

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, 直线 DA 与 $\odot O$ 相切与点 A ,

$$\therefore \angle OAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = 90^\circ - \angle AOD = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ.$$

故选 C.

【点评】 本题考查了切线的性质, 等边对等角的性质, 三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质, 熟记各性质并准确识图是解题的关键.

7. (3 分) (2017•莱芜) 一个多边形的内角和比其外角和的 2 倍多 180° , 则该多边形的对角线的条数是 ()

A. 12 B. 13 C. 14 D. 15

【考点】 L3: 多边形内角与外角; L2: 多边形的对角线.

【分析】 多边形的内角和比外角和的 2 倍多 180° , 而多边形的外角和是 360° , 则内角和是 900 度, n 边形的内角和可以表示成 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 设这个多边形的边数是 n , 就得到方程, 从而求出边数, 进而求出对角线的条数.

【解答】 解: 根据题意, 得

$$(n-2) \cdot 180 = 360^\circ \times 2 + 180^\circ,$$

解得: $n=7$.

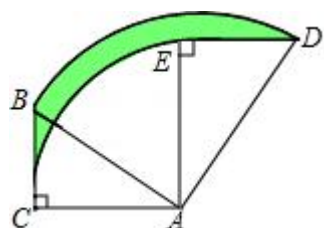
则这个多边形的边数是 7,

$$\text{七边形的对角线条数为} \frac{7 \times (7-3)}{2} = 14,$$

故选 C.

【点评】此题主要考查了多边形内角和定理和外角和定理, 只要结合多边形的内角和公式寻求等量关系, 构建方程即可求解.

8. (3 分) (2017•莱芜) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BCA=90^\circ$, $\angle BAC=30^\circ$, $BC=2$, 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕 A 点顺时针旋转 90° 得到 $\text{Rt}\triangle ADE$, 则 BC 扫过的面积为 ()



- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $(2-\sqrt{3})\pi$ C. $\frac{2-\sqrt{3}}{2}\pi$ D. π

【考点】MO: 扇形面积的计算; KO: 含 30° 度角的直角三角形; R2: 旋转的性质.

【分析】解直角三角形得到 AC, AB, 根据旋转推出 $\triangle ABC$ 的面积等于 $\triangle ADE$ 的面积, 根据扇形和三角形的面积公式即可得到结论.

【解答】解: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle BCA=90^\circ$, $\angle BAC=30^\circ$, $BC=2$,

$$\therefore AC=2\sqrt{3}, AB=4,$$

$\therefore$ 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 得到 $\text{Rt}\triangle ADE$,

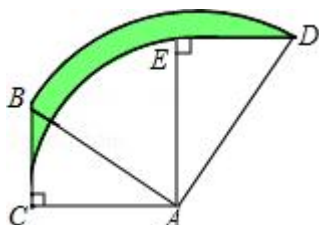
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积等于 } \triangle ADE \text{ 的面积, } \angle CAB = \angle DAE, AE=AC=2\sqrt{3}, AD=AB=4,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle DAB = 90^\circ,$$

∴ 阴影部分的面积 $S = S_{\text{扇形} BAD} + S_{\triangle ABC} - S_{\text{扇形} CAE} - S_{\triangle ADE}$

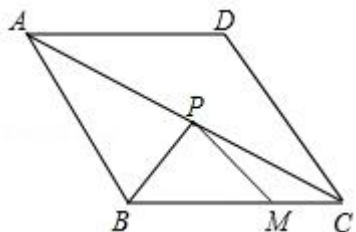
$$= \frac{90\pi \times 4^2}{360} + \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{90\pi \times (2\sqrt{3})^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = \pi.$$

故选 D.



【点评】 本题考查了三角形、扇形的面积，旋转的旋转，勾股定理等知识点的应用，解此题的关键是把求不规则图形的面积转化成求规则图形（如三角形、扇形）的面积.

9. (3 分) (2017•莱芜) 如图，菱形 ABCD 的边长为 6， $\angle ABC = 120^\circ$ ，M 是 BC 边的一个三等分点，P 是对角线 AC 上的动点，当 PB+PM 的值最小时，PM 的长是 ()

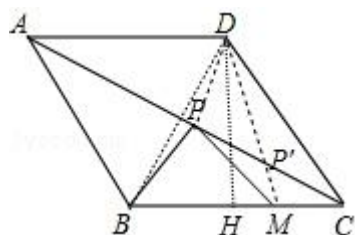


- A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{\sqrt{26}}{4}$

【考点】 PA: 轴对称 – 最短路线问题; L8: 菱形的性质.

【分析】 如图，连接 DP, BD, 作 $DH \perp BC$ 于 H. 当 D、P、M 共线时， $P'B + P'M = DM$ 的值最小，利用勾股定理求出 DM，再利用平行线的性质即可解决问题.

【解答】 解：如图，连接 DP, BD, 作 $DH \perp BC$ 于 H.



∴ 四边形 ABCD 是菱形,

∴ $AC \perp BD$, B、D 关于 AC 对称,

∴ $PB + PM = PD + PM$,

∴ 当 D、P、M 共线时, $P'B + P'M = DM$ 的值最小,

∴ $CM = \frac{1}{3}BC = 2$,

∴ $\angle ABC = 120^\circ$,

∴ $\angle DBC = \angle ABD = 60^\circ$,

∴ $\triangle DBC$ 是等边三角形, ∴ $BC = 6$,

∴ $CM = 2$, $HM = 1$, $DH = 3\sqrt{3}$,

在 $Rt\triangle DMH$ 中, $DM = \sqrt{DH^2 + HM^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2\sqrt{7}$,

∴ $CM \parallel AD$,

∴ $\frac{P'M}{DP'} = \frac{CM}{AD} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

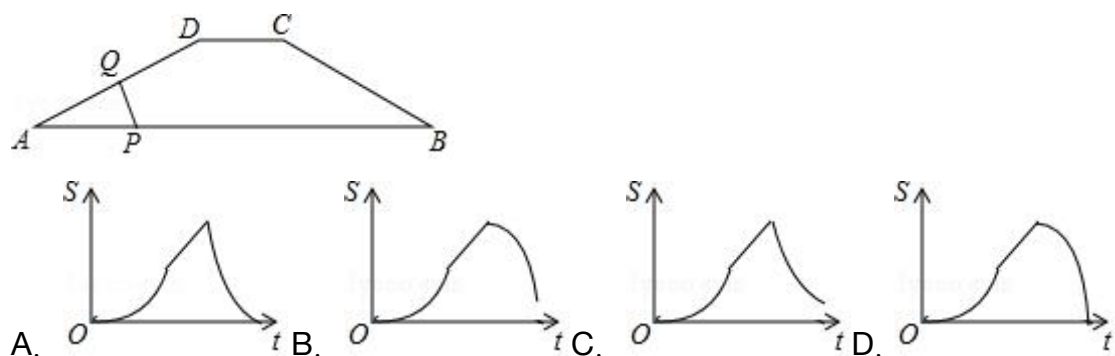
∴ $P'M = \frac{1}{4}DM = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

故选 A.

【点评】 本题考查轴对称 – 最短问题、菱形的性质、等边三角形的判定和性质、勾股定理、平行线分线段成比例定理等知识, 解题的关键是灵活应用所学知识解决问题, 属于中考常考题型.

10. (3 分) (2017•莱芜) 如图, 在四边形 ABCD 中, $DC \parallel AB$, $AD = 5$, $CD = 3$,

$\sin A = \sin B = \frac{1}{3}$, 动点 P 自 A 点出发, 沿着边 AB 向点 B 匀速运动, 同时动点 Q 自点 A 出发, 沿着边 $AD - DC - CB$ 匀速运动, 速度均为每秒 1 个单位, 当其中一个动点到达终点时, 它们同时停止运动, 设点 P 运动 t (秒) 时, $\triangle APQ$ 的面积为 s , 则 s 关于 t 的函数图象是 ()



【考点】 E7: 动点问题的函数图象.

【分析】 过点 Q 做 $QM \perp AB$ 于点 M , 分点 Q 在线段 AD 、 DC 、 CB 上三种情况考虑, 根据三角形的面积公式找出 s 关于 t 的函数关系式, 再结合四个选项即可得出结论.

【解答】 解: 过点 Q 做 $QM \perp AB$ 于点 M .

当点 Q 在线段 AD 上时, 如图 1 所示,

$$\therefore AP=AQ=t \quad (0 \leq t \leq 5), \quad \sin A = \frac{1}{3}$$

$$\therefore QM = \frac{1}{3}t,$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}AP \cdot QM = \frac{1}{6}t^2;$$

当点 Q 在线段 CD 上时, 如图 2 所示,

$$\therefore AP=t \quad (5 \leq t \leq 8), \quad QM=AD \cdot \sin A = \frac{5}{3}$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}AP \cdot QM = \frac{5}{6}t;$$

当点 Q 在线段 CB 上时, 如图 3 所示,

$$\therefore AP=t \quad (8 \leq t \leq \frac{20\sqrt{2}}{3}+3) \quad (\text{利用解直角三角形求出 } AB = \frac{20\sqrt{2}}{3}+3), \quad BQ=5+3+5-$$

$$t=13-t, \sin B=\frac{1}{3},$$

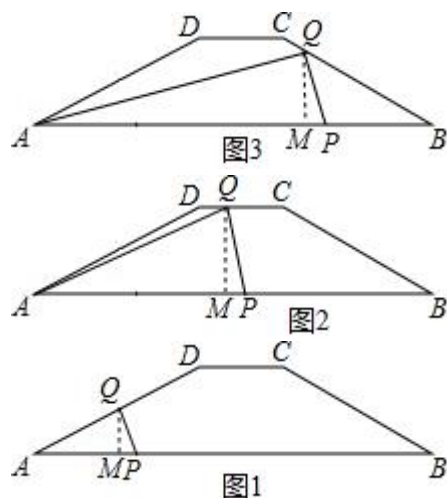
$$\therefore QM=\frac{1}{3}(13-t),$$

$$\therefore s=\frac{1}{2}AP \cdot QM=-\frac{1}{6}(t^2-13t),$$

$$\therefore s=-\frac{1}{6}(t^2-13t) \text{ 的对称轴为直线 } x=\frac{13}{2}.$$

综上观察函数图象可知 B 选项中的图象符合题意.

故选 B.



【点评】 本题考查了动点问题的函数图象以及三角形的面积, 分点 Q 在线段 AD、DC、CB 上三种情况找出 s 关于 t 的函数关系式是解题的关键.

11. (3 分) (2017·莱芜) 对于实数 a, b, 定义符号 $\min\{a, b\}$, 其意义为: 当 $a \geq b$ 时, $\min\{a, b\}=b$; 当 $a < b$ 时, $\min\{a, b\}=a$. 例如: $\min\{2, -1\}=-1$, 若关于 x 的函数 $y=\min\{2x-1, -x+3\}$, 则该函数的最大值为 ()

- A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{5}{3}$

【考点】 F5: 一次函数的性质.

【分析】 根据定义先列不等式: $2x-1 \geq -x+3$ 和 $2x-1 < -x+3$, 确定其 $y=\min\{2x-1, -x+3\}$ 对应的函数, 画图象可知其最大值.

【解答】解：由题意得： $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = -x + 3 \end{cases}$ 解得： $\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$

当 $2x - 1 \geq -x + 3$ 时， $x \geq \frac{4}{3}$

$\therefore$ 当 $x \geq \frac{4}{3}$ 时， $y = \min\{2x - 1, -x + 3\} = -x + 3$,

由图象可知：此时该函数的最大值为 $\frac{5}{3}$;

当 $2x - 1 < -x + 3$ 时， $x < \frac{4}{3}$

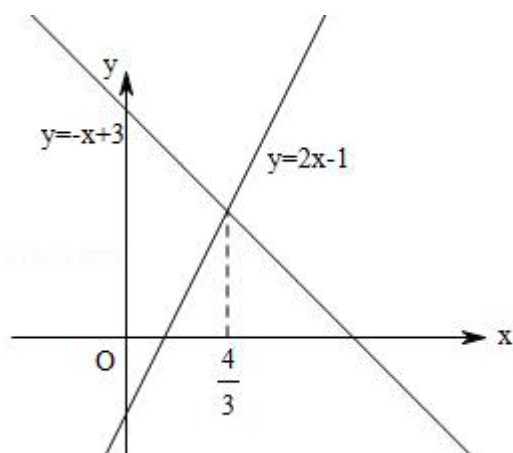
$\therefore$ 当 $x < \frac{4}{3}$ 时， $y = \min\{2x - 1, -x + 3\} = 2x - 1$,

由图象可知：此时该函数的最大值为 $\frac{5}{3}$;

综上所述， $y = \min\{2x - 1, -x + 3\}$ 的最大值是当 $x = \frac{4}{3}$ 所对应的 y 的值，

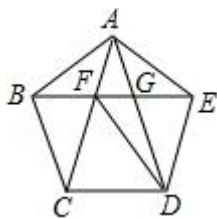
如图所示，当 $x = \frac{4}{3}$ 时， $y = \frac{5}{3}$

故选 D.



【点评】本题考查了新定义、一元一次不等式及一次函数的交点问题，认真阅读理解其意义，并利用数形结合的思想解决函数的最值问题.

12. (3 分) (2017•莱芜) 如图，正五边形 $ABCDE$ 的边长为 2，连结 AC 、 AD 、 BE ， BE 分别与 AC 和 AD 相交于点 F 、 G ，连结 DF ，给出下列结论：① $\angle FDG = 18^\circ$ ；② $FG = 3 - \sqrt{5}$ ；③ $(S_{\text{四边形} CDEF})^2 = 9 + 2\sqrt{5}$ ；④ $DF^2 - DG^2 = 7 - 2\sqrt{5}$. 其中正确结论的个数是 ()



A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【考点】MM: 正多边形和圆; S9: 相似三角形的判定与性质.

【分析】①先根据正五边形 ABCDE 的性质得: $\angle ABC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$, 由等边对等角可得: $\angle BAC = \angle ACB = 36^\circ$, 再利用角相等求 $BC = CF = CD$, 得 $\angle CDF = \angle CFD = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$, 可得 $\angle FDG = 18^\circ$;

②证明 $\triangle ABF \sim \triangle ACB$, 得 $\frac{AB}{AC} = \frac{EG}{ED}$, 代入可得 FG 的长;

③如图 1, 先证明四边形 CDEF 是平行四边形, 根据平行四边形的面积公式可得:

$$(S_{\text{四边形 CDEF}})^2 = EF^2 \cdot DM^2 = 4 \times \frac{10 + 2\sqrt{5}}{4} = 10 + 2\sqrt{5};$$

④如图 2, $\square CDEF$ 是菱形, 先计算 $EC = BE = 4 - FG = 1 + \sqrt{5}$, 由 $S_{\text{四边形 CDEF}} = \frac{1}{2} FD \cdot EC = 2 \times \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}}$, 可得 $FD^2 = 10 - 2\sqrt{5}$, 计算可得结论.

【解答】解: ① $\because$ 五边形 ABCDE 是正五边形,

$$\therefore AB = BC, \quad \angle ABC = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACB = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ,$$

同理得: $\angle ADE = 36^\circ$,

$$\therefore \angle BAE = 108^\circ, \quad AB = AE,$$

$$\therefore \angle ABE = 36^\circ,$$

$$\therefore \angle CBF = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ,$$

$$\therefore BC = FC,$$

$$\therefore BC=CD,$$

$$\therefore CD=CF,$$

$$\therefore \angle CDF = \angle CFD = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ,$$

$$\therefore \angle FDG = \angle CDE - \angle CDF - \angle ADE = 108^\circ - 54^\circ - 36^\circ = 18^\circ;$$

所以①正确;

$$\textcircled{2} \because \angle ABE = \angle ACB = 36^\circ, \quad \angle BAC = \angle BAF,$$

$$\therefore \triangle ABF \sim \triangle ACB,$$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{EG}{ED},$$

$$\therefore AB \cdot ED = AC \cdot EG,$$

$$\because AB = ED = 2, \quad AC = BE = BG + EF - FG = 2AB - FG = 4 - FG, \quad EG = BG - FG = 2 - FG,$$

$$\therefore 2^2 = (2 - FG)(4 - FG),$$

$$\therefore FG = 3 + \sqrt{5} > 2 \text{ (舍)}, \quad FG = 3 - \sqrt{5};$$

所以②正确;

$$\textcircled{3} \text{如图 1, } \because \angle EBC = 72^\circ, \quad \angle BCD = 108^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC + \angle BCD = 180^\circ,$$

$$\therefore EF \parallel CD,$$

$$\therefore EF = CD = 2,$$

$\therefore$ 四边形 CDEF 是平行四边形,

过 D 作 $DM \perp EG$ 于 M,

$$\therefore DG = DE,$$

$$\therefore EM = MG = \frac{1}{2}EG = \frac{1}{2}(EF - FG) = \frac{1}{2}(2 - 3 + \sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{2},$$

$$\text{由勾股定理得: } DM = \sqrt{DE^2 - EM^2} = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10 + 2\sqrt{5}}{4}},$$

$$\therefore (S_{\text{四边形 CDEF}})^2 = EF^2 \cdot DM^2 = 4 \times \frac{10+2\sqrt{5}}{4} = 10+2\sqrt{5};$$

所以③不正确;

④如图 2, 连接 EC,

$$\therefore EF=ED,$$

$\therefore \square CDEF$ 是菱形,

$$\therefore FD \perp EC,$$

$$\therefore EC=BE=4-FG=4-(3-\sqrt{5})=1+\sqrt{5},$$

$$\therefore S_{\text{四边形 CDEF}} = \frac{1}{2} FD \cdot EC = 2 \times \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}},$$

$$\frac{1}{2} \times FD \times (1+\sqrt{5}) = \sqrt{10+2\sqrt{5}},$$

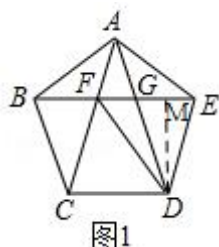
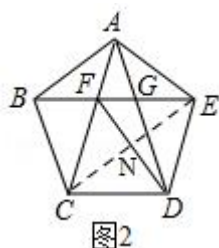
$$FD^2 = 10 - 2\sqrt{5},$$

$$\therefore DF^2 - DG^2 = 10 - 2\sqrt{5} - 4 = 6 - 2\sqrt{5},$$

所以④不正确;

本题正确的有两个,

故选 B.



【点评】 本题考查了相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 正五边形的性质、平行四边形和菱形的判定和性质, 有难度, 熟练掌握正五边形的性质是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题填对得 4 分, 共 20 分, 请填在答题卡上)

13. (4 分) (2017•莱芜) $(-\frac{1}{2})^{-3} - 2\cos 45^\circ + (3.14 - \pi)^0 + \sqrt{8} = \underline{-7 + \sqrt{2}}$.

【考点】 2C: 实数的运算; 6E: 零指数幂; 6F: 负整数指数幂; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 原式利用零指数幂、负整数指数幂法则, 以及特殊角的三角函数值计算即可得到结果.

【解答】 解: 原式 $= -8 - \sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} = -7 + \sqrt{2}$,

故答案为: $-7 + \sqrt{2}$

【点评】 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

14. (4 分) (2017•莱芜) 圆锥的底面周长为 $\frac{2\pi}{3}$, 母线长为 2, 点 P 是母线 OA 的中点, 一根细绳 (无弹性) 从点 P 绕圆锥侧面一周回到点 P, 则细绳的最短长度为 $\underline{2\sqrt{3}}$.

【考点】 KV: 平面展开 – 最短路径问题; MP: 圆锥的计算.

【分析】 连接 AA', 根据弧长公式可得出圆心角的度数, 由勾股定理可得出 AA'.

【解答】 解: 如图, 连接 AA',

$$\because \text{底面周长为 } \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore \text{弧长} = \frac{n\pi \times 2}{180} = \frac{2\pi}{3},$$

$$\therefore n = 60^\circ \text{ 即 } \angle AOA' = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 60^\circ,$$

作 $OB \perp AA'$ 于 B, 在 $\text{Rt}\triangle OBA$ 中,

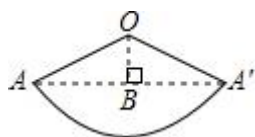
$$\therefore OA = 2,$$

$$\therefore OB=1,$$

$$\therefore AB=\sqrt{3},$$

$$\therefore AA'=2\sqrt{3}.$$

故答案是: $2\sqrt{3}$.



【点评】 本题考查了圆锥的计算，平面展开 - 路径最短问题，注意“数形结合”数学思想的应用.

15. (4 分) (2017•莱芜) 直线 $y=kx+b$ 与双曲线 $y=-\frac{6}{x}$ 交于 A $(-3, m)$, B $(n, -6)$ 两点, 将直线 $y=kx+b$ 向上平移 8 个单位长度后, 与双曲线交于 D, E 两点, 则 $S_{\triangle ADE}=\underline{16}$.

【考点】 G8: 反比例函数与一次函数的交点问题.

【分析】 利用待定系数法求出平移后的直线的解析式, 求出点 D、E 的左边, 再利用分割法求出三角形的面积即可.

【解答】 解: 由题意 A $(-3, 2)$, B $(1, -6)$,

$\therefore$ 直线 $y=kx+b$ 经过点 A $(-3, 2)$, B $(1, -6)$,

$$\therefore \begin{cases} -3k + b = 2 \\ k + b = -6 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -2 \\ b = -4 \end{cases},$$

$\therefore y = -2x - 4$, 向上平移 8 个单位得到直线 $y = -2x + 4$,

$$\text{由} \begin{cases} y = -\frac{6}{x} \\ y = -2x + 4 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{和} \begin{cases} x = -1 \\ y = 6 \end{cases},$$

不妨设 D (3, -2), E (-1, 6),

$$\therefore S_{\triangle ADE} = 6 \times 8 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 6 \times 4 - \frac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16,$$

故答案为 16.

【点评】 本题考查反比例函数与一次函数的交点问题，解题的关键是熟练掌握待定系数法，学会利用分割法求三角形的面积.

16. (4 分) (2017•莱芜) 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a < 0$) 图象与 x 轴的交点 A、B 的横坐标分别为 -3, 1, 与 y 轴交于点 C, 下面四个结论:

① $16a - 4b + c < 0$; ② 若 P (-5, y_1), Q ($\frac{5}{2}$, y_2) 是函数图象上的两点, 则 $y_1 > y_2$; ③ $a = -\frac{1}{3}c$; ④ 若 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 则 $b = -\frac{2\sqrt{7}}{3}$. 其中正确的有 ①③ (请将结论正确的序号全部填上)

【考点】 H4: 二次函数图象与系数的关系; HA: 抛物线与 x 轴的交点; KH: 等腰三角形的性质.

【分析】 ① 根据抛物线开口方向和与 x 轴的两交点可知: 当 $x = -4$ 时, $y < 0$, 即 $16a - 4b + c < 0$;

② 根据图象与 x 轴的交点 A、B 的横坐标分别为 -3, 1 确定对称轴是: $x = -1$, 可得: (-4.5, y_3) 与 Q ($\frac{5}{2}$, y_2) 是对称点, 所以 $y_1 < y_2$;

③ 根据对称轴和 $x=1$ 时, $y=0$ 可得结论;

④ 要使 $\triangle ACB$ 为等腰三角形, 则必须保证 $AB=BC=4$ 或 $AB=AC=4$ 或 $AC=BC$, 先计算 c 的值, 再联立方程组可得结论.

【解答】 解: ① $\because a < 0$,

$\therefore$ 抛物线开口向下,

$\therefore$ 图象与 x 轴的交点 A、B 的横坐标分别为 -3, 1,

$\therefore$ 当 $x = -4$ 时, $y < 0$,

即 $16a - 4b + c < 0$;

故①正确;

② $\because$ 图象与 x 轴的交点 A 、 B 的横坐标分别为 -3 , 1 ,

$\therefore$ 抛物线的对称轴是: $x = -1$,

$\because P(-5, y_1)$, $Q(\frac{5}{2}, y_2)$,

$-1 - (-5) = 4$, $\frac{5}{2} - (-1) = 3.5$,

由对称性得: $(-4.5, y_3)$ 与 $Q(\frac{5}{2}, y_2)$ 是对称点,

$\therefore$ 则 $y_1 < y_2$;

故②不正确;

③ $\because -\frac{b}{2a} = -1$,

$\therefore b = 2a$,

当 $x = 1$ 时, $y = 0$, 即 $a + b + c = 0$,

$3a + c = 0$,

$a = -\frac{1}{3}c$;

④要使 $\triangle ACB$ 为等腰三角形, 则必须保证 $AB = BC = 4$ 或 $AB = AC = 4$ 或 $AC = BC$,

当 $AB = BC = 4$ 时,

$\because AO = 1$, $\triangle BOC$ 为直角三角形,

又 $\because OC$ 的长即为 $|c|$,

$\therefore c^2 = 16 - 9 = 7$,

$\because$ 由抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上,

$\therefore c = \sqrt{7}$,

与 $b = 2a$ 、 $a + b + c = 0$ 联立组成解方程组, 解得 $b = -\frac{2\sqrt{7}}{3}$;

同理当 $AB=AC=4$ 时

$\because AO=1$, $\triangle AOC$ 为直角三角形,

又 $\because OC$ 的长即为 $|c|$,

$$\therefore c^2 = 16 - 1 = 15,$$

$\because$ 由抛物线与 y 轴的交点在 y 轴的正半轴上,

$$\therefore c = \sqrt{15}$$

与 $b=2a$ 、 $a+b+c=0$ 联立组成解方程组, 解得 $b = -\frac{2\sqrt{15}}{3}$;

同理当 $AC=BC$ 时

在 $\triangle AOC$ 中, $AC^2 = 1 + c^2$,

在 $\triangle BOC$ 中 $BC^2 = c^2 + 9$,

$$\therefore AC=BC,$$

$$\therefore 1 + c^2 = c^2 + 9, \text{ 此方程无实数解.}$$

经解方程组可知有两个 b 值满足条件.

故⑤错误.

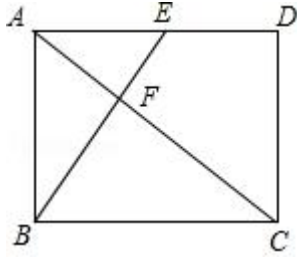
综上所述, 正确的结论是①③.

故答案是: ①③.

【点评】 本题考查了等腰三角形的判定、方程组的解、抛物线与坐标轴的交点、二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与系数的关系: 当 $a < 0$, 抛物线开口向下; 抛物线的对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$; 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, c)$, 与 x 轴的交点为 $(x_1, 0)$ 、 $(x_2, 0)$.

17. (4 分) (2017•莱芜) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $BE \perp AC$ 分别交 AC 、 AD 于

点 F 、 E , 若 $AD=1$, $AB=CF$, 则 $AE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质; KD: 全等三角形的判定与性质; LB: 矩形的性质.

【分析】利用互余先判断出 $\angle ABE = \angle FCB$, 进而得出 $\triangle ABE \cong \triangle FCB$, 即可得出 $BF = AE$, $BE = BC = 1$, 再判断出 $\angle BAF = \angle AEB$, 进而得出 $\triangle ABE \sim \triangle FBA$, 即可得出 $AE = AB^2$, 最后用勾股定理即可得出结论.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore BC = AD = 1, \quad \angle BAF = \angle ABC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle CBF = 90^\circ,$$

$$\because BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle BFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BCF + \angle CBF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle FCB,$$

$$\text{在 } \triangle ABE \text{ 和 } \triangle FCB \text{ 中, } \begin{cases} \angle EAB = \angle BFC = 90^\circ \\ AB = CF \\ \angle ABE = \angle FCB \end{cases}, \therefore$$

$$\triangle ABE \cong \triangle FCB,$$

$$\therefore BF = AE, \quad BE = BC = 1,$$

$$\because BE \perp AC,$$

$$\therefore \angle BAF + \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF + \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAF = \angle AEB,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle AFB,$$

$$\therefore \triangle ABE \sim \triangle FBA,$$

$$\therefore \frac{AB}{BF} = \frac{BE}{AB},$$

$$\therefore \frac{AB}{AE} = \frac{1}{AB},$$

$$\therefore AE = AB^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中, $BE=1$, 根据勾股定理得, $AB^2 + AE^2 = BE^2 = 1$,

$$\therefore AE + AE^2 = 1,$$

$$\therefore AE > 0,$$

$$\therefore AE = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

【点评】 此题主要考查了矩形的性质, 全等三角形的判定和性质, 相似三角形的判定和性质, 勾股定理, 解本题的关键是判断出 $AE = AB^2$.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 64 分, 解答要写出必要的文字说明、证明过程或推演步骤)

18. (6 分) (2017·莱芜) 先化简, 再求值: $(a + \frac{6a}{a-3}) \div (a + \frac{9a+9}{a-3})$, 其中 $a = \sqrt{3} - 3$.

【考点】 6D: 分式的化简求值.

【分析】 先将原分式化简成 $\frac{a}{a+3}$, 再代入 a 的值, 即可求出结论.

【解答】 解: 原式 = $\frac{a(a-3)+6a}{a-3} \div \frac{a(a-3)+9a+9}{a-3},$

$$= \frac{a^2+3a}{a-3} \times \frac{a-3}{a^2+6a+9},$$

$$= \frac{a(a+3)}{a-3} \times \frac{a-3}{(a+3)^2},$$

$$= \frac{a}{a+3}.$$

$$\text{当 } a=\sqrt{3}-3 \text{ 时, 原式} = \frac{a}{a+3} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}-3+3} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了分式的化简求值，将原分式化简成 $\frac{a}{a+3}$ 是解题的关键.

19. (8 分) (2017•莱芜) 为了丰富校园文化，某学校决定举行学生趣味运动会，将比赛项目确定为袋鼠跳、夹球跑、跳大绳、绑腿跑和拔河赛五种，为了解学生对这五项运动的喜欢情况，随机调查了该校 a 名学生最喜欢的一种项目（每名学生必选且只能选择五项中的一种），并将调查结果绘制成如图不完整的统计图表：

学生最喜欢的活动项目的人数统计表

项目	学生数（名）	百分比（%）
袋鼠跳	45	15
夹球跑	30	c
跳大绳	75	25
绑腿跑	b	20
拔河赛	90	30

根据图表中提供的信息，解答下列问题：

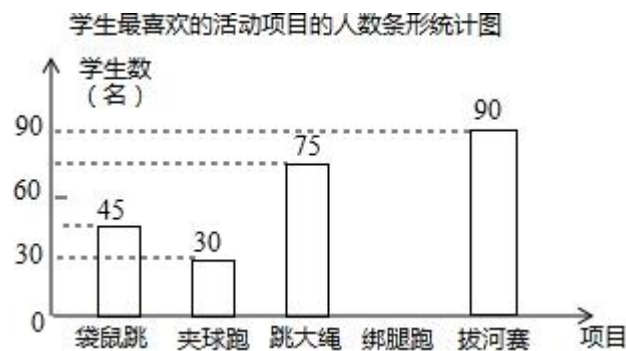
(1) $a = \underline{300}$ ， $b = \underline{60}$ ， $c = \underline{10}$.

(2) 请将条形统计图补充完整；

(3) 根据调查结果，请你估计该校 3000 名学生中有多少名学生最喜欢绑腿跑；

(4) 根据调查结果，某班决定从这五项（袋鼠跳、夹球跑、跳大绳、绑腿跑和

拔河赛可分别记为 A、B、C、D、E) 中任选其中两项进行训练，用画树状图或列表的方法求恰好选到学生喜欢程度最高的两项的概率.



【考点】 X6: 列表法与树状图法; V5: 用样本估计总体; VA: 统计表; VC: 条形统计图.

【分析】 (1) 根据学生数和相应的百分比，即可得到 a 的值，根据总人数乘以百分比，即可得到 b 的值，根据学生数除以总人数，可得百分比，即可得出 c 的值;

(2) 根据 b 的值，即可将条形统计图补充完整;

(3) 根据最喜欢绑腿跑的百分比乘以该校学生数，即可得到结果;

(4) 根据树状图或列表的结果中，选到“C”和“E”的占 2 种，即可得出恰好选到学生喜欢程度最高的两项的概率.

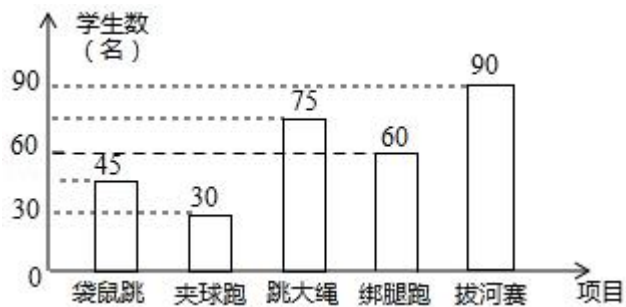
【解答】 解: (1) 由题可得, $a=45 \div 15\%=300$,

$$b=300 \times 20\%=60,$$

$$c=\frac{30}{300} \times 100=10,$$

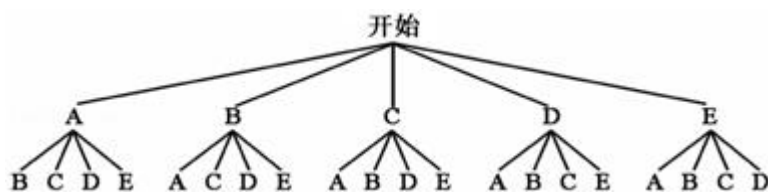
故答案为: 300, 60, 10;

(2) 如图:



(3) $3000 \times 20\% = 600$ (名);

(4) 树状图为:



共 20 种情况，其中选到“C”和“E”的有 2 种，

$\therefore$ 恰好选到“C”和“E”的概率是 $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

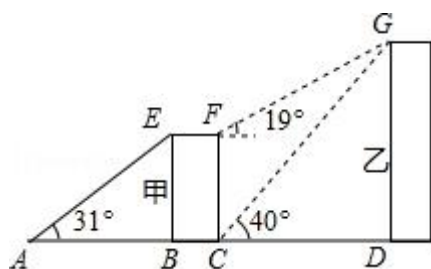
【点评】 此题考查了列表法与树状图法，扇形统计图，以及条形统计图的应用，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (9 分) (2017•莱芜) 某学校教学楼 (甲楼) 的顶部 E 和大门 A 之间挂了一些彩旗. 小颖测得大门 A 距甲楼的距离 AB 是 31m, 在 A 处测得甲楼顶部 E 处的仰角是 31° .

(1) 求甲楼的高度及彩旗的长度; (精确到 0.01m)

(2) 若小颖在甲楼楼底 C 处测得学校后面医院楼 (乙楼) 楼顶 G 处的仰角为 40° , 爬到甲楼楼顶 F 处测得乙楼楼顶 G 处的仰角为 19° , 求乙楼的高度及甲乙两楼之间的距离. (精确到 0.01m)

($\cos 31^\circ \approx 0.86$, $\tan 31^\circ \approx 0.60$, $\cos 19^\circ \approx 0.95$, $\tan 19^\circ \approx 0.34$, $\cos 40^\circ \approx 0.77$, $\tan 40^\circ \approx 0.84$)



【考点】TA: 解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题.

【分析】(1) 在直角三角形 ABE 中, 利用锐角三角函数定义求出 AE 与 BE 的长即可;

(2) 过点 F 作 $FM \perp GD$, 交 GD 于 M, 在直角三角形 GMF 中, 利用锐角三角函数定义表示出 GM 与 GD, 设甲乙两楼之间的距离为 xm , 根据题意列出方程, 求出方程的解即可得到结果.

【解答】解: (1) 在 $Rt \triangle ABE$ 中, $BE = AB \cdot \tan 31^\circ = 31 \cdot \tan 31^\circ \approx 18.60$,

$$AE = \frac{AB}{\cos 31^\circ} = \frac{31}{\cos 31^\circ} \approx 36.05,$$

则甲楼的高度为 18.60m, 彩旗的长度为 36.05m;

(2) 过点 F 作 $FM \perp GD$, 交 GD 于 M,

在 $Rt \triangle GMF$ 中, $GM = FM \cdot \tan 19^\circ$,

在 $Rt \triangle GDC$ 中, $DG = CD \cdot \tan 40^\circ$,

设甲乙两楼之间的距离为 xm , $FM = CD = x$,

根据题意得: $x \tan 40^\circ - x \tan 19^\circ = 18.60$,

解得: $x = 37.20$,

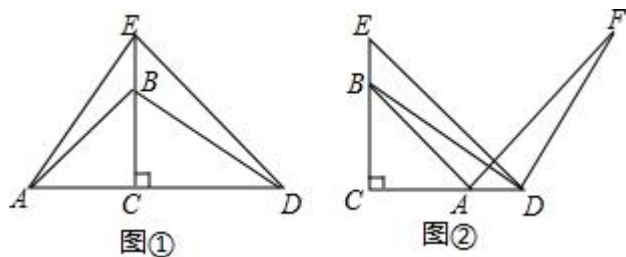
则乙楼的高度为 31.25m, 甲乙两楼之间的距离为 37.20m.

【点评】此题考查了解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题, 熟练掌握直角三角形的性质是解本题的关键.

21. (9分) (2017•莱芜) 已知 $\triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 是两个大小不同的等腰直角三角形.

(1) 如图①所示, 连接 AE , DB , 试判断线段 AE 和 DB 的数量和位置关系, 并说明理由;

(2) 如图②所示, 连接 DB , 将线段 DB 绕 D 点顺时针旋转 90° 到 DF , 连接 AF , 试判断线段 DE 和 AF 的数量和位置关系, 并说明理由.



【考点】 R2: 旋转的性质; KD: 全等三角形的判定与性质; KW: 等腰直角三角形.

【分析】 (1) 根据等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定定理证明 $\text{Rt}\triangle BCD \cong \text{Rt}\triangle ACE$, 根据全等三角形的性质解答;

(2) 证明 $\triangle EBD \cong \triangle ADF$, 根据全等三角形的性质证明即可.

【解答】 解: (1) $AE=BD$, $AE \perp DB$,

证明: $\because \triangle ABC$ 与 $\triangle DEC$ 是等腰直角三角形,

$\therefore AC=BC$, $EC=DC$,

在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 和 $\text{Rt}\triangle ACE$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD, \\ CE = CD \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle BCD \cong \text{Rt}\triangle ACE$,

$\therefore AE=BD$, $\angle AEC=\angle BDC$,

$$\therefore \angle BCD=90^{\circ},$$

$$\therefore \angle DHE=90^{\circ},$$

$$\therefore AE \perp DB;$$

$$(2) DE=AF, DE \perp AF,$$

证明：设 DE 与 AF 交于 N,

由题意得，BE=AD,

$$\therefore \angle EBD=\angle C+\angle BDC=90^{\circ}+\angle BDC,$$

$$\angle ADF=\angle BDF+\angle BDC=90^{\circ}+\angle BDC,$$

$$\therefore \angle EBD=\angle ADF,$$

在 $\triangle EBD$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} BE = AD \\ \angle EBD = \angle ADF, \\ DE = DF \end{cases}$$

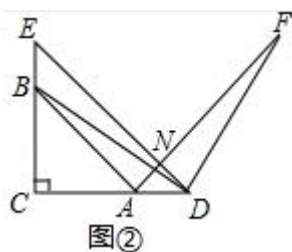
$$\therefore \triangle EBD \cong \triangle ADF,$$

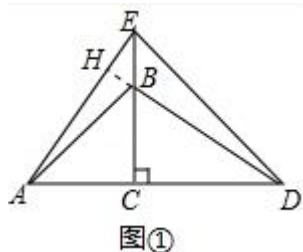
$$\therefore DE=AF, \angle E=\angle FAD,$$

$$\therefore \angle E=45^{\circ}, \angle EDC=45^{\circ},$$

$$\therefore \angle FAD=45^{\circ},$$

$$\therefore \angle AND=90^{\circ}, \text{ 即 } DE \perp AF.$$





【点评】 本题考查的是等腰直角三角形的性质、全等三角形的判定和性质，掌握全等三角形的判定定理和性质定理是解题的关键.

22. (10 分) (2017•莱芜) 某网店销售甲、乙两种防雾霾口罩，已知甲种口罩每袋的售价比乙种口罩多 5 元，小丽从该网店网购 2 袋甲种口罩和 3 袋乙种口罩共花费 110 元.

(1) 改网店甲、乙两种口罩每袋的售价各多少元？

(2) 根据消费者需求，网店决定用不超过 10000 元购进价、乙两种口罩共 500 袋，且甲种口罩的数量大于乙种口罩的 $\frac{4}{5}$ 已知甲种口罩每袋的进价为 22.4 元，乙种口罩每袋的进价为 18 元，请你帮助网店计算有几种进货方案？若使网店获利最大，应该购进甲、乙两种口罩各多少袋，最大获利多少元？

【考点】 FH：一次函数的应用； 9A：二元一次方程组的应用； CE：一元一次不等式组的应用.

【分析】 (1) 分别根据甲种口罩每袋的售价比乙种口罩多 5 元，小丽从该网店网购 2 袋甲种口罩和 3 袋乙种口罩共花费 110 元，得出等式组成方程求出即可；

(2) 根据网店决定用不超过 10000 元购进价、乙两种口罩共 500 袋，甲种口罩的数量大于乙种口罩的 $\frac{4}{5}$ 得出不等式求出后，根据 m 的取值，得到 5 种方案，设网店获利 w 元，则有 $w = (25 - 22.4)m + (20 - 18)(500 - m) = 0.6m + 1000$ ，故当 $m = 227$ 时，w 最大，求出即可.

【解答】 解：(1) 设该网店甲种口罩每袋的售价为 x 元，乙种口罩每袋的售价为

y 元,

根据题意得:
$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = 110 \end{cases}$$

解这个方程组得:
$$\begin{cases} x = 25 \\ y = 20 \end{cases}$$

故该网店甲种口罩每袋的售价为 25 元, 乙种口罩每袋的售价为 20 元;

(2) 设该网店购进甲种口罩 m 袋, 购进乙种口罩 (500 - m) 袋,

根据题意得
$$\begin{cases} m > \frac{4}{5}(500 - m) \\ 22.4m + 18(500 - m) \leq 10000 \end{cases}$$

解这个不等式组得: $222, 2 < m \leq 227.3$,

因 m 为整数, 故有 5 种进货方案, 分别是:

购进甲种口罩 223 袋, 乙种口罩 277 袋;

购进甲种口罩 224 袋, 乙种口罩 276 袋;

购进甲种口罩 225 袋, 乙种口罩 275 袋;

购进甲种口罩 226 袋, 乙种口罩 274 袋;

购进甲种口罩 227 袋, 乙种口罩 273 袋;

设网店获利 w 元, 则有 $w = (25 - 22.4)m + (20 - 18)(500 - m) = 0.6m + 1000$,

故当 $m = 227$ 时, w 最大,

$w_{\text{最大}} = 0.6 \times 227 + 1000 = 1136.2$ (元),

故该网店购进甲种口罩 227 袋, 购进乙种口罩 273 袋时, 获利最大, 最大利润为 1136.2 元.

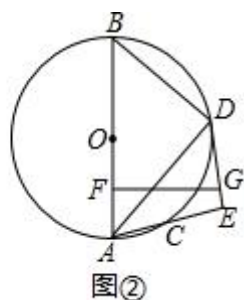
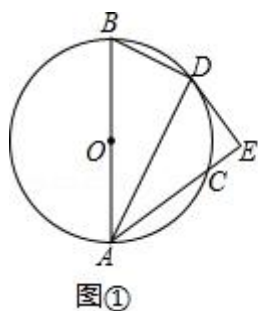
【点评】 本题考查了列二元一次方程组解实际问题的运用及二元一次方程组的解法, 列一元一次不等式解实际问题的运用及解法, 在解答过程中寻找能够反映整个题意的等量关系是解答本题的关键.

23. (10 分) (2017•莱芜) 已知 AB 是 $\odot O$ 的直径, C 是圆上一点, $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , 过 D 作 $DE \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 E , 如图①.

(1) 求证: D 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 $AB=10$, $AC=6$, 求 BD 的长;

(3) 如图②, 若 F 是 OA 中点, $FG \perp OA$ 交直线 DE 于点 G , 若 $FG=\frac{19}{4}$, $\tan \angle BAD=\frac{3}{4}$, 求 $\odot O$ 的半径.



【考点】 MR: 圆的综合题.

【分析】 (1) 欲证明 DE 是 $\odot O$ 的切线, 只要证明 $OD \perp DE$;

(2) 首先证明 $OD \perp BC$, 在 $Rt\triangle BDN$ 中, 利用勾股定理计算即可;

(3) 如图②中, 设 FG 与 AD 交于点 H , 根据题意, 设 $AB=5x$, $AD=4x$, 则 $AF=\frac{5}{4}x$, 想办法用 x 表示线段 FH 、 GH , 根据 $FH+GH=\frac{19}{4}$, 列出方程即可解决问题;

【解答】 (1) 证明: 如图①中, 连接 OD . $\because OA=OD$,

$$\therefore \angle OAD = \angle ODA,$$

$$\because AD \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\therefore \angle OAD = \angle DAE,$$

$$\therefore \angle ODA = \angle DAE,$$

$$\therefore OD \parallel AE,$$

$$\therefore \angle ODE + \angle AED = 180^\circ, \therefore \angle AED = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ODE=90^{\circ},$$

$$\therefore OD \perp DE,$$

$\therefore DE$ 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 如图①中, 连接 BC , 交 OD 于点 N ,

$\therefore AB$ 是直径,

$$\therefore \angle BCA=90^{\circ},$$

$\therefore OD \parallel AE$, O 是 AB 的中点,

$$\therefore ON \parallel AC, \text{ 且 } ON=\frac{1}{2}AC,$$

$\therefore \angle ONB=90^{\circ}$, 且 $ON=3$, 则 $BN=4$, $ND=2$,

$$\therefore BD=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}.$$

(3) 如图②中, 设 FG 与 AD 交于点 H ,

根据题意, 设 $AB=5x$, $AD=4x$, 则 $AF=\frac{5}{4}x$,

$$FH=AF \cdot \tan \angle BAD = \frac{5}{4}x \cdot \frac{3}{4} = \frac{15}{16}x, \quad AH = \frac{AF}{\cos \angle BAD} = \frac{\frac{5}{4}x}{\frac{4}{5}} = \frac{25}{16}x,$$

$$HD=AD-AH=4x-\frac{25}{16}x=\frac{39}{16}x,$$

由 (1) 可知, $\angle HDG+\angle ODA=90^{\circ}$,

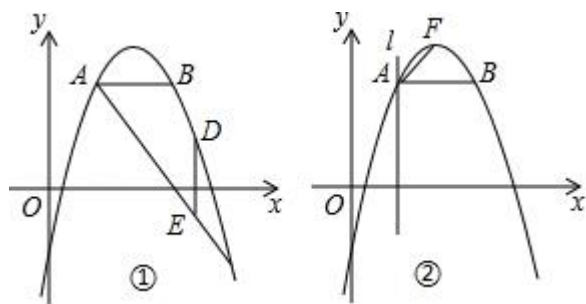
在 $Rt\triangle HFA$ 中, $\angle FAH+\angle FHA=90^{\circ}$,

$$\therefore \angle OAD=\angle ODA, \quad \angle FHA=\angle DHG,$$

$$\therefore \angle DHG=\angle HDG,$$

$\therefore GH=GD$, 过点 G 作 $GM \perp HD$, 交 HD 于点 M ,

$$\therefore MH=MD,$$



(1) 求抛物线的表达式;

(2) 如图①, 抛物线上一点 D 在线段 AC 的上方, $DE \perp AB$ 交 AC 于点 E , 若满足 $\frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 求点 D 的坐标;

(3) 如图②, F 为抛物线顶点, 过 A 作直线 $l \perp AB$, 若点 P 在直线 l 上运动, 点 Q 在 x 轴上运动, 是否存在这样的点 P 、 Q , 使得以 B 、 P 、 Q 为顶点的三角形与 $\triangle ABF$ 相似, 若存在, 求 P 、 Q 的坐标, 并求此时 $\triangle BPQ$ 的面积; 若不存在, 请说明理由.

【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 由对称性和 $A(2, 3)$, $B(4, 3)$, 可知抛物线的对称轴是: $x=3$, 利用顶点式列方程组解出可得抛物线的表达式;

(2) 如图 1, 先利用待定系数法求直线 AC 的解析式, 设点 $D(m, -m+6m-5)$, 则点 $E(m, -2m+7)$,

根据解析式表示 DE 和 AE 的长, 由已知的比例式列式得结论;

(3) 根据题意得: $\triangle BPQ$ 为等腰直角三角形, 分三种情况:

①若 $\angle BPQ=90^\circ$, $BP=PQ$, 如图 2, 作辅助线, 构建全等三角形, 证明 $\triangle BAP \cong \triangle QMP$, 可得结论; 如图 3, 同理可得结论;

②若 $\angle BQP=90^\circ$, $BQ=PQ$, 如图 4, 证得: $\triangle BNQ \cong \triangle QMP$, 则 $NQ=PM=3$, $NG=1$, $BN=5$, 从而得出结论; 如图 5, 同理易得 $\triangle QNB \cong \triangle PMQ$, 可得结论;

③若 $\angle PBQ=90^\circ$, $BQ=BP$, 如图 6, 由于 $AB=2 \neq NQ=3$, 此时不存在符合条件的 P、Q.

【解答】解: (1) 根据题意, 设抛物线表达式为 $y=a(x-3)^2+h$.

把 B (4, 3), C (6, -5) 代入得:
$$\begin{cases} a+h=3 \\ 9a+h=-5 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} a=-1 \\ h=4 \end{cases}$$

故抛物线的表达式为: $y=-(x-3)^2+4=-x^2+6x-5$;

(2) 设直线 AC 的表达式为 $y=kx+n$,

则:
$$\begin{cases} 2k+n=3 \\ 6k+n=-5 \end{cases}$$

解得: $k=-2$, $n=7$,

$\therefore$ 直线 AC 的表达式为 $y=-2x+7$,

设点 D (m, $-m^2+6m-5$), $2 < m < 6$, 则点 E (m, $-2m+7$),

$\therefore DE = (-m^2+6m-5) - (-2m+7) = -m^2+8m-12$,

设直线 DE 与直线 AB 交于点 G,

$\therefore AG \perp EG$,

$\therefore AG=m-2$, $EG=3-(-2m+7)=2(m-2)$,

$m-2 > 0$,

在 $Rt\triangle AEG$ 中,

$\therefore AE=\sqrt{5}(m-2)$,

由 $\frac{DE}{AE} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 得 $\frac{-m^2+8m-12}{\sqrt{5}(m-2)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$,

化简得, $2m^2-11m+14=0$,

解得: $m_1 = \frac{7}{2}$, $m_2 = 2$ (舍去),

则 D $(\frac{7}{2}, \frac{15}{4})$.

(3) 根据题意得: $\triangle ABF$ 为等腰直角三角形, 假设存在满足条件的点 P、Q,
则 $\triangle BPQ$ 为等腰直角三角形,
分三种情况:

①若 $\angle BPQ = 90^\circ$, $BP = PQ$,

如图 2, 过 P 作 $MN \parallel x$ 轴, 过 Q 作 $QM \perp MN$ 于 M, 过 B 作 $BN \perp MN$ 于 N,

易证得: $\triangle BAP \cong \triangle QMP$,

$\therefore AB = QM = 2$, $PM = AP = 3 + 2 = 5$,

$\therefore P(2, -2)$, $Q(-3, 0)$,

在 $Rt\triangle QMP$ 中, $PM = 5$, $QM = 2$,

由勾股定理得: $PQ = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$,

$\therefore S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2}PQ \cdot PB = \frac{29}{2}$;

如图 3, 易证得: $\triangle BAP \cong \triangle PMQ$,

$\therefore AB = PM = 2$, $AP = MQ = 3 - 2 = 1$,

$\therefore P(2, 2)$, $Q(3, 0)$,

在 $Rt\triangle QMP$ 中, $PM = 2$, $QM = 1$,

由勾股定理得: $PQ = \sqrt{5}$,

$\therefore S_{\triangle BPQ} = \frac{1}{2}PQ \cdot PB = \frac{5}{2}$;

②若 $\angle BQP = 90^\circ$, $BQ = PQ$,

如图 4, 易得: $\triangle BNQ \cong \triangle QMP$,

$\therefore NQ = PM = 3$, $NG = PM - AG = 3 - 2 = 1$,

$$\therefore BN=MQ=4+1=5,$$

$$\therefore P(2, -5), Q(-1, 0)$$

$$\therefore PQ=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34},$$

$$\therefore S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}PQ \cdot PB=\frac{34}{2}=17;$$

如图 5, 易得 $\triangle QNB \cong \triangle PMQ$,

$$\therefore NQ=PM=3,$$

$$\therefore P(2, -1), Q(5, 0),$$

$$\therefore PQ=\sqrt{10},$$

$$\therefore S_{\triangle BPQ}=\frac{1}{2}PQ \cdot PB=\frac{10}{2}=5,$$

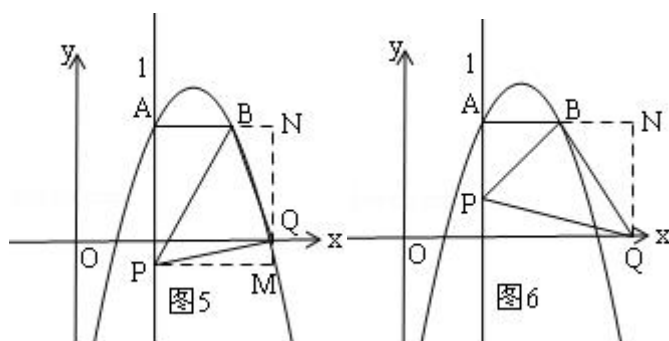
③若 $\angle PBQ=90^\circ$, $BQ=BP$, 如图 6,

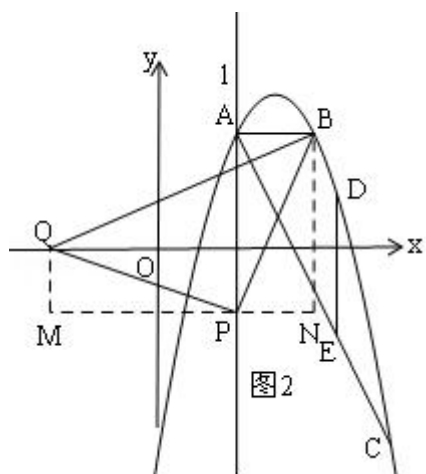
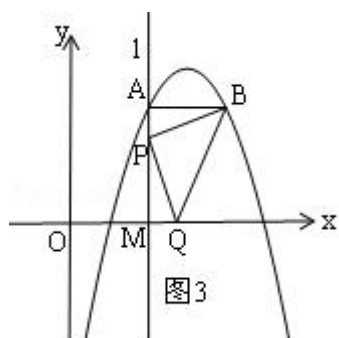
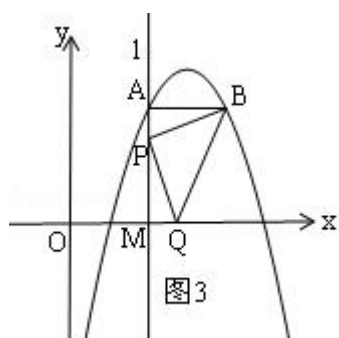
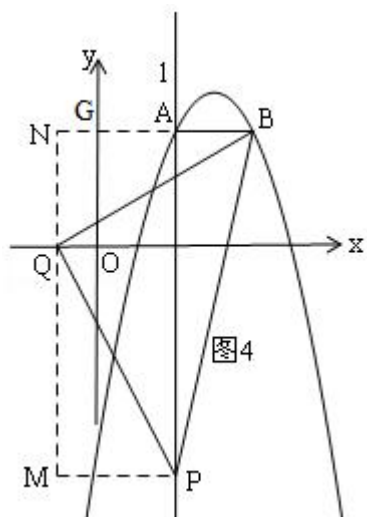
过 Q 作 $QN \perp AB$, 交 AB 的延长线于 N,

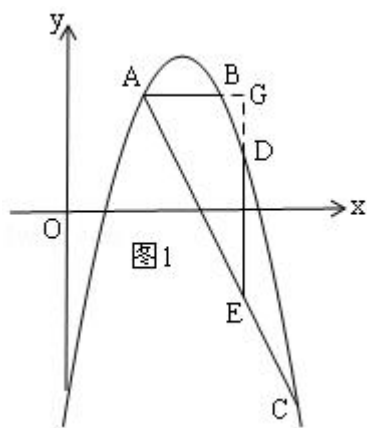
易得: $\triangle PAB \cong \triangle BNQ$,

$$\therefore AB=2, NQ=3, AB \neq NQ$$

$\therefore$ 此时不存在符合条件的 P、Q.







【点评】 本题是二次函数的综合题，考查了二次函数的对称性、利用待定系数法求解析式、三角形全等的性质和判定、等腰直角三角形的性质和判定，采用了分类讨论的思想，并利用数形结合；第二问熟练掌握利用解析式表示点的坐标和线段的长是关键，第三问有难度，准确画也图形是关键，注意不要丢解。