

2017 年山东省聊城市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 64 的立方根是（ ）

A. 4 B. 8 C. ± 4 D. ± 8

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{1}{2}$ ，那么 $\sin A$ 的值是（ ）

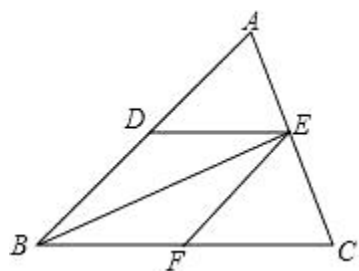
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

3. 下列计算错误的是（ ）

A. $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$ B. $3^2 \times 3^{-1} = 3$

C. $2^0 \div 2^{-2} = \frac{1}{4}$ D. $(-3 \times 10^2)^3 = -2.7 \times 10^7$

4. 如图， $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ，要判定四边形 $DBFE$ 是菱形，还需要添加的条件是（ ）



A. $AB = AC$ B. $AD = BD$ C. $BE \perp AC$ D. BE 平分 $\angle ABC$

5. 纽约、悉尼与北京时差如下表（正数表示同一时刻比北京时间早的时数，负数表示同一时刻比北京时间晚的时数）：

城市	悉尼	纽约
时差/时	+2	-13

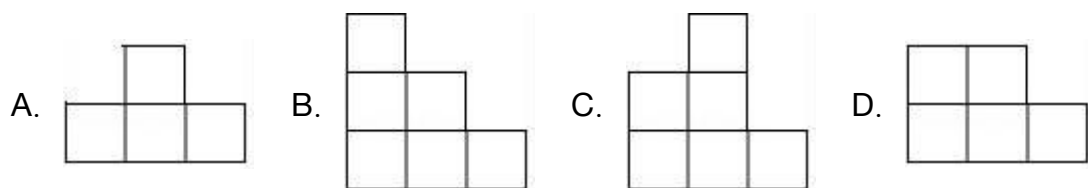
当北京 6 月 15 日 23 时，悉尼、纽约的时间分别是（ ）

A. 6 月 16 日 1 时；6 月 15 日 10 时 B. 6 月 16 日 1 时；6 月 14 日 10 时

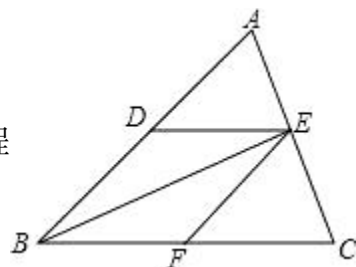
C. 6 月 15 日 21 时；6 月 15 日 10 时 D. 6 月 15 日 21 时；6 月 16 日 12 时

6. 如图是由若干小正方体组成的几何体的俯视图，小正方形中的数字表示该位置小正方体的个数，这个几何体的主视图是（ ）

2	3	1
1	2	



7. 如果解关于 x 的分式方程



$-\frac{2x}{2-x}=1$ 时出现增根，那

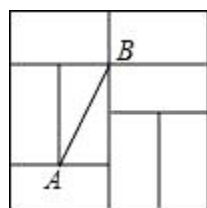
么 m 的值为 ()

A. -2 B. 2 C. 4 D. -4

8. 计算 $(5\sqrt{\frac{1}{5}} - 2\sqrt{45}) \div (-\sqrt{5})$ 的结果为 ()

A. 5 B. -5 C. 7 D. -7

9. 如图是由 8 个全等的矩形组成的大正方形，线段 AB 的端点都在小矩形的顶点上，如果点 P 是某个小矩形的顶点，连接 PA 、 PB ，那么使 $\triangle ABP$ 为等腰直角三角形的点 P 的个数是 ()

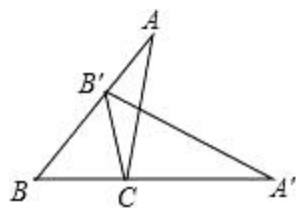


A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

10. 为了满足顾客的需求，某商场将 5kg 奶糖， 3kg 酥心糖和 2kg 水果糖混合成什锦糖出售。已知奶糖的售价为每千克 40 元，酥心糖为每千克 20 元，水果糖为每千克 15 元，混合后什锦糖的售价应为每千克 ()

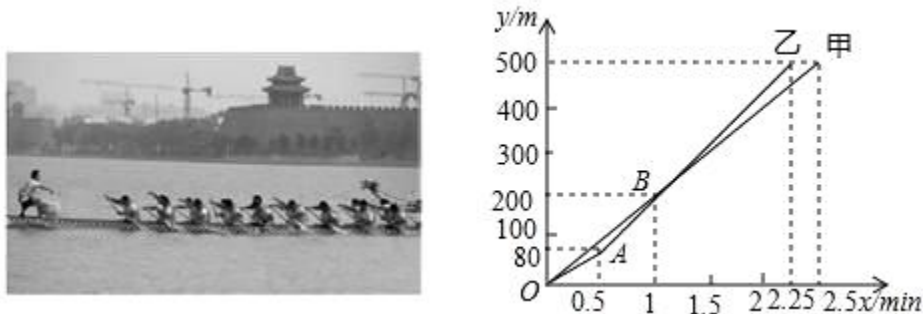
A. 25 元 B. 28.5 元 C. 29 元 D. 34.5 元

11. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转，使点 B 落在 AB 边上点 B' 处，此时，点 A 的对应点 A' 恰好落在 BC 边的延长线上，下列结论错误的 ()



- A. $\angle BCB' = \angle ACA'$ B. $\angle ACB = 2\angle B$
 C. $\angle B'CA = \angle B'AC$ D. $B'C$ 平分 $\angle BB'A'$

12. 端午节前夕，在东昌湖举行第七届全民健身运动会龙舟比赛中，甲、乙两队在 500 米的赛道上，所划行的路程 y (m) 与时间 x (min) 之间的函数关系如图所示，下列说法错误的是 ()

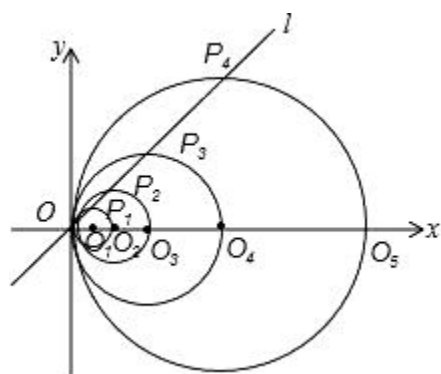


- A. 乙队比甲队提前 0.25min 到达终点
 B. 当乙队划行 110m 时，此时落后甲队 15m
 C. 0.5min 后，乙队比甲队每分钟快 40m
 D. 自 1.5min 开始，甲队若要与乙队同时到达终点，甲队的速度需要提高到 255m/min

二、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

13. 因式分解: $2x^2 - 32x^4 =$ _____.
14. 已知圆锥形工件的底面直径是 40cm，母线长 30cm，其侧面展开图圆心角的度数为 _____.
15. 不等式组 $\begin{cases} x-3(x-2) \geq -4 \\ \frac{1+2x}{3} < x-1 \end{cases}$ 的解集是 _____.
16. 如果任意选择一对有序整数 (m, n) ，其中 $|m| \leq 1$ ， $|n| \leq 3$ ，每一对这样的有序整数被选择的可能性是相等的，那么关于 x 的方程 $x^2 + nx + m = 0$ 有两个相等实数根的概率是 _____.
17. 如图，在平面直角坐标系中，直线 l 的函数表达式为 $y=x$ ，点 O_1 的坐标为 $(1, 0)$ ，以 O_1 为圆心， O_1O 为半径画圆，交直线 l 于点 P_1 ，交 x 轴正半轴于点 O_2 ，以 O_2 为圆心， O_2O 为半径画圆，交直线 l 于点 P_2 ，交 x 轴正半轴于点 O_3 ，以 O_3 为圆心， O_3O 为半径画圆，交直线 l 于点 P_3 ，交 x 轴正半轴于点 O_4 ；...

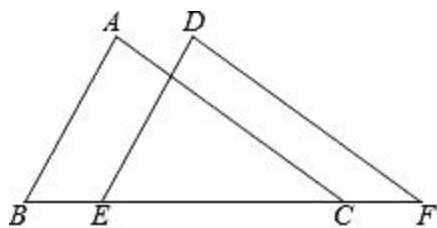
按此做法进行下去，其中 $\overline{P_{2017}O_{2018}}$ 的长为_____.



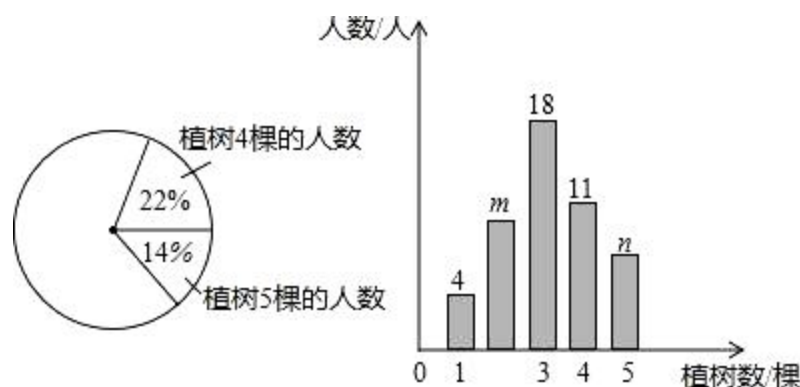
三、解答题（本题共 8 个小题，满分 69 分）

18. 先化简，再求值： $2 - \frac{3x+y}{x-2y} \div \frac{9x^2+6xy+y^2}{x^2-4y^2}$ ，其中 $x=3$ ， $y=-4$.

19. 如图，已知 $AB \parallel DE$ ， $AB=DE$ ， $BE=CF$ ，求证： $AC \parallel DF$.



20. 为了绿化环境，育英中学八年级三班同学都积极参加植树活动，今年植树节时，该班同学植树情况的部分数据如图所示，请根据统计图信息，回答下列问题：



- (1) 八年级三班共有多少名同学？
- (2) 条形统计图中， $m=$ _____， $n=$ _____.
- (3) 扇形统计图中，试计算植树 2 棵的人数所对应的扇形圆心角的度数.

21. 耸立在临清市城北大运河东岸的舍利宝塔，是“运河四大名塔”之一（如图 1）. 数学兴趣小组的小亮同学在塔上观景点 P 处，利用测角仪测得运河两岸上的 A、B 两点的俯角分别为 17.9° ， 22° ，并测得塔底点 C 到点 B 的距离为 142 米（A、B、C 在同一直线上，如图 2），求运河两岸上的 A、B 两点的距离（精确到 1 米）.

（参考数据： $\sin 22^\circ \approx 0.37$ ， $\cos 22^\circ \approx 0.93$ ， $\tan 22^\circ \approx 0.40$ ， $\sin 17.9^\circ \approx 0.31$ ， $\cos 17.9^\circ \approx 0.95$ ， $\tan 17.9^\circ \approx 0.32$ ）



图1

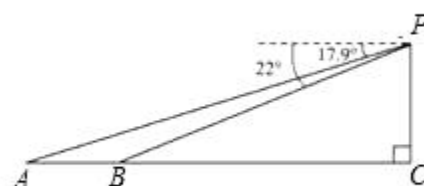


图2

22. 在推进城乡义务教育均衡发展工作中，我市某区政府通过公开招标的方式为辖区内全部乡镇中学采购了某型号的学生用电脑和教师用笔记本电脑，其中，A 乡镇中学更新学生用电脑 110 台和教师用笔记本电脑 32 台，共花费 30.5 万元；B 乡镇中学更新学生电脑 55 台和教师用笔记本电脑 24 台，共花费 17.65 万元.

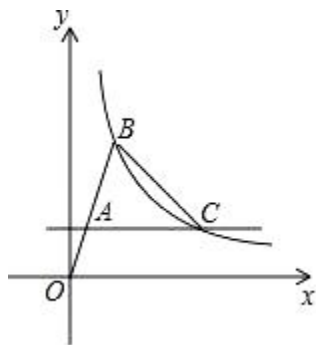
(1) 求该型号的学生用电脑和教师用笔记本电脑单价分别是多少万元？

(2) 经统计，全部乡镇中学需要购进的教师用笔记本电脑台数比购进的学生用电脑台数的 $\frac{1}{5}$ 少 90 台，在两种电脑的总费用不超过预算 438 万元的情况下，至多能购进的学生用电脑和教师用笔记本电脑各多少台？

23. 如图，分别位于反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ ， $y=\frac{k}{x}$ 在第一象限图象上的两点 A、B，与原点 O 在同一直线上，且 $\frac{OA}{OB}=\frac{1}{3}$.

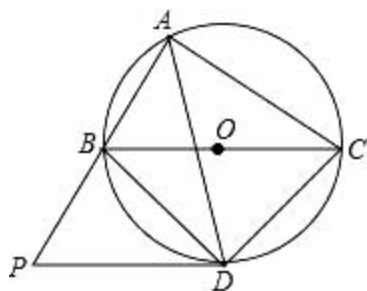
(1) 求反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式；

(2) 过点 A 作 x 轴的平行线交 $y=\frac{k}{x}$ 的图象于点 C，连接 BC，求 $\triangle ABC$ 的面积.



24. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, O 点在 BC 边上, $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , 连接 BD 、 CD , 过点 D 作 BC 的平行线, 与 AB 的延长线相交于点 P .

- (1) 求证: PD 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 求证: $\triangle PBD \sim \triangle DCA$;
- (3) 当 $AB=6$, $AC=8$ 时, 求线段 PB 的长.

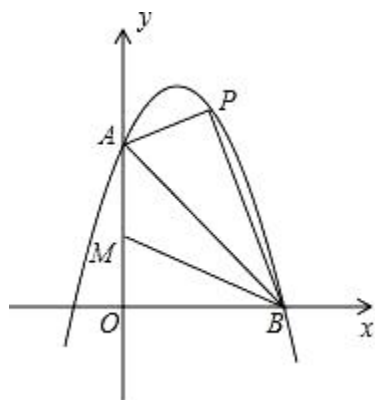


25. 如图，已知抛物线 $y=ax^2+2x+c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 6)$ ，与 x 轴交于点 $B(6, 0)$ ，点 P 是线段 AB 上方抛物线上的一个动点.

(1) 求这条抛物线的表达式及其顶点坐标；

(2) 当点 P 移动到抛物线的什么位置时，使得 $\angle PAB=75^\circ$ ，求出此时点 P 的坐标；

(3) 当点 P 从 A 点出发沿线段 AB 上方的抛物线向终点 B 移动，在移动中，点 P 的横坐标以每秒 1 个单位长度的速度变动，与此同时点 M 以每秒 1 个单位长度的速度沿 AO 向终点 O 移动，点 P, M 移动到各自终点时停止，当两个移点移动 t 秒时，求四边形 $PAMB$ 的面积 S 关于 t 的函数表达式，并求 t 为何值时， S 有最大值，最大值是多少？



2017 年山东省聊城市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 个小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 64 的立方根是（ ）

A. 4 B. 8 C. ± 4 D. ± 8

【考点】24: 立方根.

【分析】如果一个数 x 的立方等于 a ，那么 x 是 a 的立方根，根据此定义求解即可.

【解答】解： $\because 4$ 的立方是 64，

$\therefore 64$ 的立方根是 4.

故选 A.

2. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{1}{2}$ ，那么 $\sin A$ 的值是（ ）

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

【考点】T3: 同角三角函数的关系；T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】利用同角三角函数间的基本关系求出 $\sin A$ 的值即可.

【解答】解： $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\cos A = \frac{1}{2}$ ，

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

故选 B

3. 下列计算错误的是（ ）

A. $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$ B. $3^2 \times 3^{-1} = 3$

C. $2^0 \div 2^{-2} = \frac{1}{4}$ D. $(-3 \times 10^2)^3 = -2.7 \times 10^7$

【考点】47: 幂的乘方与积的乘方；6E: 零指数幂；6F: 负整数指数幂.

【分析】根据幂的乘方和积的乘方以及零指数幂和负指数幂进行计算即可.

【解答】解：A、 $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$ ，正确，故 A 不合题意；

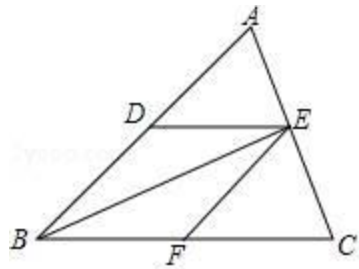
B、 $3^2 \times 3^{-1} = 3$ ，正确，故 B 不合题意；

C、 $2^0 \div 2^{-2} = 4$ ，不正确，故 C 合题意；

D、 $(-3 \times 10^2)^3 = -2.7 \times 10^7$ ，正确，故 D 不合题意；

故选 C.

4. 如图， $\triangle ABC$ 中， $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ，要判定四边形 DBFE 是菱形，还需要添加的条件是 ()



A. $AB=AC$ B. $AD=BD$ C. $BE \perp AC$ D. BE 平分 $\angle ABC$

【考点】L9: 菱形的判定.

【分析】当 BE 平分 $\angle ABE$ 时，四边形 DBFE 是菱形，可知先证明四边形 BDEF 是平行四边形，再证明 $BD=DE$ 即可解决问题.

【解答】解：当 BE 平分 $\angle ABE$ 时，四边形 DBFE 是菱形，
理由： $\because DE \parallel BC$,

$$\therefore \angle DEB = \angle EBC,$$

$$\because \angle EBC = \angle EBD,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle DEB,$$

$$\therefore BD = DE,$$

$$\because DE \parallel BC, EF \parallel AB,$$

$\therefore$ 四边形 DBEF 是平行四边形，

$$\because BD = DE,$$

$\therefore$ 四边形 DBEF 是菱形.

其余选项均无法判断四边形 DBEF 是菱形，

故选 D.

5. 纽约、悉尼与北京时差如下表（正数表示同一时刻比北京时间早的时数，负数表示同一时刻比北京时间晚的时数）：

城市	悉尼	纽约
时差/时	+2	-13

当北京 6 月 15 日 23 时，悉尼、纽约的时间分别是（ ）

- A. 6 月 16 日 1 时；6 月 15 日 10 时 B. 6 月 16 日 1 时；6 月 14 日 10 时
C. 6 月 15 日 21 时；6 月 15 日 10 时 D. 6 月 15 日 21 时；6 月 16 日 12 时

【考点】 11：正数和负数.

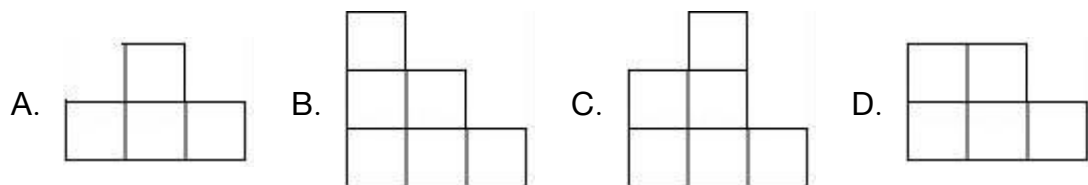
【分析】 由统计表得出：悉尼时间比北京时间早 2 小时，悉尼比北京的时间要早 2 个小时，也就是 6 月 16 日 1 时. 纽约比北京时间要晚 13 个小时，也就是 6 月 15 日 10 时.

【解答】 解：悉尼的时间是：6 月 15 日 23 时+2 小时=6 月 16 日 1 时，
纽约时间是：6 月 15 日 23 时 - 13 小时=6 月 15 日 10 时.

故选：A.

6. 如图是由若干小正方体组成的几何体的俯视图，小正方形中的数字表示该位置小正方体的个数，这个几何体的主视图是（ ）

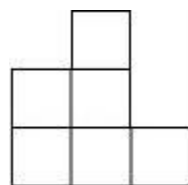
2	3	1
1	2	



【考点】 U3：由三视图判断几何体；U2：简单组合体的三视图.

【分析】 找到从正面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在主视图中.

【解答】 解：从正面看易得第一列有 3 个正方形，第二列有 2 个正方形，第三列有 1 个正方形.



故选：C.

7. 如果解关于 x 的分式方程 $\frac{m}{x-2} - \frac{2x}{2-x} = 1$ 时出现增根, 那么 m 的值为 ()

A. -2 B. 2 C. 4 D. -4

【考点】B5: 分式方程的增根.

【分析】增根是化为整式方程后产生的不适合分式方程的根. 所以应先确定增根的可能值, 让最简公分母 $x-2=0$, 确定可能的增根; 然后代入化为整式方程的方程求解, 即可得到正确的答案.

【解答】解: $\frac{m}{x-2} - \frac{2x}{2-x} = 1$,

去分母, 方程两边同时乘以 $x-2$, 得:

$$m+2x=x-2,$$

由分母可知, 分式方程的增根可能是 2,

当 $x=2$ 时, $m+4=2-2$,

$$m=-4,$$

故选 D.

8. 计算 $(5\sqrt{\frac{1}{5}} - 2\sqrt{45}) \div (-\sqrt{5})$ 的结果为 ()

A. 5 B. -5 C. 7 D. -7

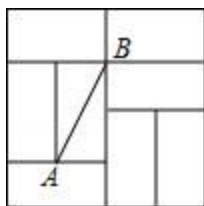
【考点】79: 二次根式的混合运算.

【分析】先把二次根式化为最简二次根式, 然后把括号内合并后进行二次根式的除法运算.

【解答】解: 原式 $= (\sqrt{5} - 6\sqrt{5}) \div (-\sqrt{5})$
 $= (-5\sqrt{5}) \div (-\sqrt{5})$
 $= 5.$

故选 A.

9. 如图是由 8 个全等的矩形组成的大正方形, 线段 AB 的端点都在小矩形的顶点上, 如果点 P 是某个小矩形的顶点, 连接 PA、PB, 那么使 $\triangle ABP$ 为等腰直角三角形的点 P 的个数是 ()

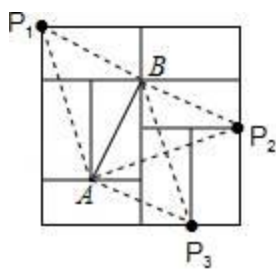


A. 2 个 B. 3 个 C. 4 个 D. 5 个

【考点】KW: 等腰直角三角形.

【分析】根据等腰直角三角形的判定即可得到结论.

【解答】解：如图所示，使 $\triangle ABP$ 为等腰直角三角形的点 P 的个数是 3，
故选 B.



10. 为了满足顾客的需求，某商场将 5kg 奶糖，3kg 酥心糖和 2kg 水果糖混合成什锦糖出售．已知奶糖的售价为每千克 40 元，酥心糖为每千克 20 元，水果糖为每千克 15 元，混合后什锦糖的售价应为每千克（ ）

A. 25 元 B. 28.5 元 C. 29 元 D. 34.5 元

【考点】W2: 加权平均数.

【分析】先求出买 5kg 奶糖，3kg 酥心糖和 2kg 水果糖的总钱数，再除以总的斤数，即可得出混合后什锦糖的售价.

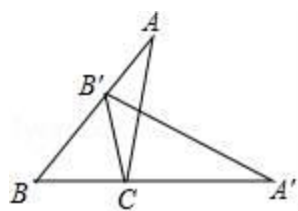
【解答】解：根据题意得：

$$(40 \times 5 + 20 \times 3 + 15 \times 2) \div (5 + 3 + 2) = 29 \text{ (元)},$$

答：混合后什锦糖的售价应为每千克 29 元.

故选 C.

11. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转，使点 B 落在 AB 边上点 B' 处，此时，点 A 的对应点 A' 恰好落在 BC 边的延长线上，下列结论错误的（ ）



- A. $\angle BCB' = \angle ACA'$ B. $\angle ACB = 2\angle B$
 C. $\angle B'CA = \angle B'AC$ D. $B'C$ 平分 $\angle BB'A'$

【考点】R2: 旋转的性质.

【分析】根据旋转的性质得到 $\angle BCB' = \angle ACA'$ ，故 A 正确，根据等腰三角形的性质得到 $\angle B = \angle BB'C$ ，根据三角形的外角的性质得到 $\angle A'CB' = 2\angle B$ ，等量代换得到 $\angle ACB = 2\angle B$ ，故 B 正确；等量代换得到 $\angle A'B'C = \angle BB'C$ ，于是得到 $B'C$ 平分 $\angle BB'A'$ ，故 D 正确.

【解答】解：根据旋转的性质得， $\angle BCB'$ 和 $\angle ACA'$ 都是旋转角，则 $\angle BCB' = \angle ACA'$ ，故 A 正确，

$$\therefore CB = CB',$$

$$\therefore \angle B = \angle BB'C,$$

$$\text{又} \because \angle A'CB' = \angle B + \angle BB'C,$$

$$\therefore \angle A'CB' = 2\angle B,$$

$$\text{又} \because \angle ACB = \angle A'CB',$$

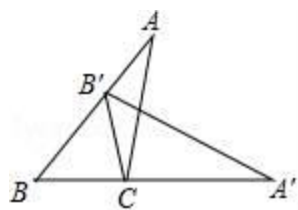
$$\therefore \angle ACB = 2\angle B, \text{ 故 B 正确;}$$

$$\therefore \angle A'B'C = \angle B,$$

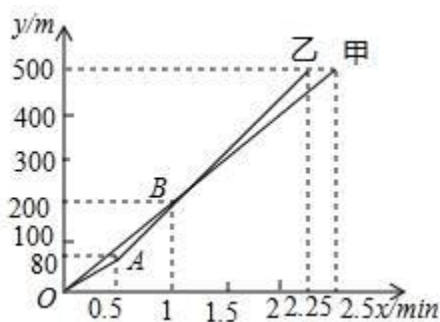
$$\therefore \angle A'B'C = \angle BB'C,$$

$$\therefore B'C \text{ 平分 } \angle BB'A', \text{ 故 D 正确;}$$

故选 C.



12. 端午节前夕，在东昌湖举行第七届全民健身运动会龙舟比赛中，甲、乙两队在 500 米的赛道上，所划行的路程 y (m) 与时间 x (min) 之间的函数关系如图所示，下列说法错误的是 ()



- A. 乙队比甲队提前 0.25min 到达终点
- B. 当乙队划行 110m 时，此时落后甲队 15m
- C. 0.5min 后，乙队比甲队每分钟快 40m
- D. 自 1.5min 开始，甲队若要与乙队同时到达终点，甲队的速度需要提高到 255m/min

【考点】E6：函数的图象.

【分析】观察函数图象可知，函数的横坐标表示时间，纵坐标表示路程，根据图象上特殊点的意义即可求出答案.

【解答】解：A、由横坐标看出乙队比甲队提前 0.25min 到达终点，故 A 不符合题意；

B、乙 AB 段的解析式为 $y=240x-40$ ，当 $y=110$ 时， $x=\frac{5}{8}$ ；甲的解析式为 $y=200x$ ，当 $x=\frac{5}{8}$ 时， $y=125$ ，当乙队划行 110m 时，此时落后甲队 15m，故 B 不符合题意；

C、乙 AB 段的解析式为 $y=240x-40$ 乙的速度是 240m/min；甲的解析式为 $y=200x$ ，甲的速度是 200m/min，0.5min 后，乙队比甲队每分钟快 40m，故 C 不符合题意；

D、甲的解析式为 $y=200x$ ，当 $x=1.5$ 时， $y=300$ ，甲乙同时到达 $\div (2.25-1.5)$ $=266\text{m/min}$ ，故 D 符合题意；

故选：D.

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

13. 因式分解： $2x^2 - 32x^4 = \underline{2x^2 (1+4x) (1-4x)}$.

【考点】55：提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】此多项式有公因式，应先提取公因式，再对余下的多项式进行观察，有2项，可采用平方差公式继续分解.

【解答】解： $2x^2 - 32x^4$
 $= 2x^2 (1 - 16x^2)$
 $= 2x^2 (1+4x) (1 - 4x).$
故答案为： $2x^2 (1+4x) (1 - 4x).$

14. 已知圆锥形工件的底面直径是 40cm，母线长 30cm，其侧面展开图圆心角的度数为 240°.

【考点】MP：圆锥的计算.

【分析】设圆锥的侧面展开图的圆心角的度数为 n° ，根据圆锥的侧面展开图为一扇形，这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长，扇形的半径等于圆锥的母线长和弧长公式得到 $40\pi = \frac{n\pi \times 30}{180}$ ，然后解方程即可.

【解答】解：设圆锥的侧面展开图的圆心角的度数为 n° ，
根据题意得 $40\pi = \frac{n\pi \times 30}{180}$ ，
解得 $n=240$.
故答案为 240° .

15. 不等式组 $\begin{cases} x-3(x-2) \geq -4 \\ \frac{1+2x}{3} < x-1 \end{cases}$ 的解集是 $4 < x \leq 5$.

【考点】CB：解一元一次不等式组.

【分析】先求出每个不等式的解集，再求出不等式组的解集即可.

【解答】解： $\begin{cases} x-3(x-2) \geq -4 \text{ ①} \\ \frac{1+2x}{3} < x-1 \text{ ②} \end{cases}$

$\therefore$ 解不等式①得： $x \leq 5$ ，
解不等式②得： $x > 4$ ，
 $\therefore$ 不等式组的解集为 $4 < x \leq 5$ ，
故答案为： $4 < x \leq 5$.

16. 如果任意选择一对有序整数 (m, n) ，其中 $|m| \leq 1$ ， $|n| \leq 3$ ，每一对这样的有序整数被选择的可能性是相等的，那么关于 x 的方程 $x^2 + nx + m = 0$ 有两个相等实数根的概率是 $\frac{1}{7}$ 。

【考点】X6：列表法与树状图法；AA：根的判别式。

【分析】首先确定 m 、 n 的值，推出有序整数 (m, n) 共有： $3 \times 7 = 21$ （种），由方程 $x^2 + nx + m = 0$ 有两个相等实数根，则需： $\Delta = n^2 - 4m = 0$ ，有 $(0, 0)$ ， $(1, 2)$ ， $(1, -2)$ 三种可能，由此即可解决问题。

【解答】解： $m = 0, \pm 1, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$

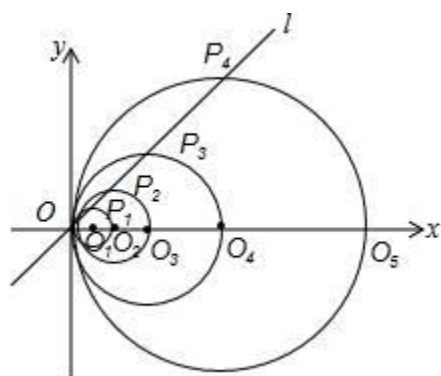
$\therefore$ 有序整数 (m, n) 共有： $3 \times 7 = 21$ （种），

$\therefore$ 方程 $x^2 + nx + m = 0$ 有两个相等实数根，则需： $\Delta = n^2 - 4m = 0$ ，有 $(0, 0)$ ， $(1, 2)$ ， $(1, -2)$ 三种可能，

$\therefore$ 关于 x 的方程 $x^2 + nx + m = 0$ 有两个相等实数根的概率是 $\frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ ，

故答案为 $\frac{1}{7}$ 。

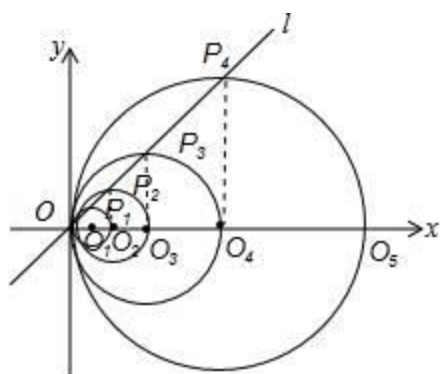
17. 如图，在平面直角坐标系中，直线 l 的函数表达式为 $y = x$ ，点 O_1 的坐标为 $(1, 0)$ ，以 O_1 为圆心， O_1O 为半径画圆，交直线 l 于点 P_1 ，交 x 轴正半轴于点 O_2 ，以 O_2 为圆心， O_2O 为半径画圆，交直线 l 于点 P_2 ，交 x 轴正半轴于点 O_3 ，以 O_3 为圆心， O_3O 为半径画圆，交直线 l 于点 P_3 ，交 x 轴正半轴于点 O_4 ；... 按此做法进行下去，其中 $\widehat{P_{2017}O_{2018}}$ 的长为 $2^{2015}\pi$ 。



【考点】MN：弧长的计算；F8：一次函数图象上点的坐标特征。

【分析】连接 P_1O_1 ， P_2O_2 ， P_3O_3 ，易求得 P_nO_n 垂直于 x 轴，可得 $\widehat{P_nO_{n+1}}$ 为 $\frac{1}{4}$ 圆的周长，再找出圆半径的规律即可解题。

【解答】解：连接 P_1O_1 , P_2O_2 , P_3O_3 ...



$\therefore P_1$ 是 $\odot O_2$ 上的点,

$\therefore P_1O_1 = OO_1$,

$\therefore$ 直线 l 解析式为 $y=x$,

$\therefore \angle P_1OO_1 = 45^\circ$,

$\therefore \triangle P_1OO_1$ 为等腰直角三角形, 即 $P_1O_1 \perp x$ 轴,

同理, P_nO_n 垂直于 x 轴,

$\therefore \widehat{P_nO_{n+1}}$ 为 $\frac{1}{4}$ 圆的周长,

$\therefore$ 以 O_1 为圆心, O_1O 为半径画圆, 交 x 轴正半轴于点 O_2 , 以 O_2 为圆心, O_2O 为半径画圆, 交 x 轴正半轴于点 O_3 , 以此类推,

$\therefore OO_n = 2^{n-1}$,

$\therefore \widehat{P_nO_{n+1}} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot OO_n = \frac{1}{2} \pi \cdot 2^{n-1} = 2^{n-2} \pi$,

当 $n=2017$ 时, $\widehat{P_{2017}O_{2018}} = 2^{2015} \pi$.

故答案为 $2^{2015} \pi$.

三、解答题 (本题共 8 个小题, 满分 69 分)

18. 先化简, 再求值: $2 - \frac{3x+y}{x-2y} \div \frac{9x^2+6xy+y^2}{x^2-4y^2}$, 其中 $x=3$, $y=-4$.

【考点】6D: 分式的化简求值.

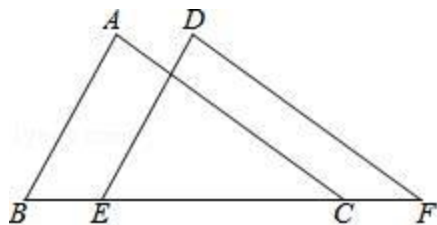
【分析】根据分式的除法和减法可以化简题目中的式子, 然后将 x 、 y 的值代入即可解答本题.

【解答】解: $2 - \frac{3x+y}{x-2y} \div \frac{9x^2+6xy+y^2}{x^2-4y^2}$

$$\begin{aligned}
&= 2 - \frac{3x+y}{x-2y} \cdot \frac{(x+2y)(x-2y)}{(3x+y)^2} \\
&= 2 - \frac{x+2y}{3x+y} \\
&= \frac{2(3x+y) - (x+2y)}{3x+y} \\
&= \frac{6x+2y-x-2y}{3x+y} \\
&= \frac{5x}{3x+y},
\end{aligned}$$

当 $x=3$, $y=-4$ 时, 原式 $= \frac{5 \times 3}{3 \times 3 + (-4)} = \frac{15}{9-4} = \frac{15}{5} = 3$.

19. 如图, 已知 $AB \parallel DE$, $AB=DE$, $BE=CF$, 求证: $AC \parallel DF$.



【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质.

【分析】 首先由 $BE=CF$ 可以得到 $BC=EF$, 然后利用边边边证明 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, 最后利用全等三角形的性质和平行线的判定即可解决问题.

【解答】 证明: $\because AB \parallel CD$,

$$\therefore \angle ABC = \angle DEF,$$

$$\text{又} \because BE = CF,$$

$$\therefore BE + EC = CF + EC,$$

$$\text{即: } BC = EF,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

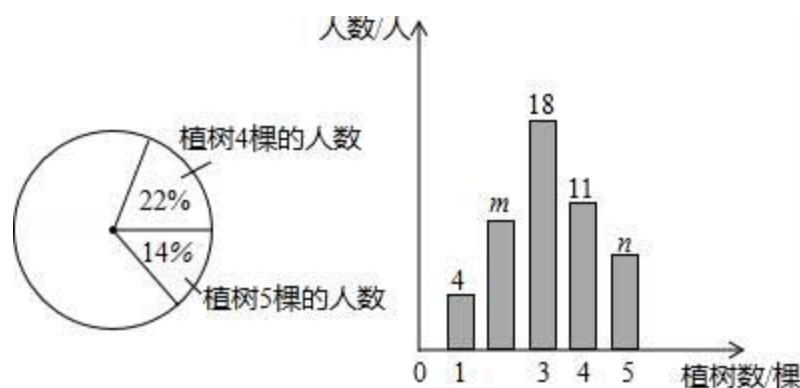
$$\begin{cases}
AB = DE \\
\angle ABC = \angle DEF \\
BC = EF
\end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ (SAS)},$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DFE,$$

$$\therefore AC \parallel DF.$$

20. 为了绿化环境，育英中学八年级三班同学都积极参加植树活动，今年植树节时，该班同学植树情况的部分数据如图所示，请根据统计图信息，回答下列问题：



- (1) 八年级三班共有多少名同学？
- (2) 条形统计图中， $m=7$ ， $n=10$ 。
- (3) 扇形统计图中，试计算植树 2 棵的人数所对应的扇形圆心角的度数。

【考点】 VC：条形统计图；VB：扇形统计图。

【分析】 (1) 根据植 4 株的有 11 人，所占百分比为 22%，求出总人数；

(2) 根据植树 5 棵人数所占的比例来求 n 的值；用总人数减去其它植树的人数，就是 m 的值，从而补全统计图；

(3) 根据植树 2 棵的人数所占比例，即可得出圆心角的比例相同，即可求出圆心角的度数。

【解答】 解：(1) 由两图可知，植树 4 棵的人数是 11 人，占全班人数的 22%，所以八年级三班共有人数为： $11 \div 22\% = 50$ (人)。

(2) 由扇形统计图可知，植树 5 棵人数占全班人数的 14%，所以 $n = 50 \times 14\% = 7$ (人)。

$m = 50 - (4 + 18 + 11 + 7) = 10$ (人)。

故答案是：7；10；

(3) 所求扇形圆心角的度数为： $360 \times \frac{10}{50} = 72^\circ$ 。

21. 耸立在临清市城北大运河东岸的舍利宝塔，是“运河四大名塔”之一（如图 1）. 数学兴趣小组的小亮同学在塔上观景点 P 处，利用测角仪测得运河两岸上的 A、B 两点的俯角分别为 17.9° 、 22° ，并测得塔底点 C 到点 B 的距离为 142 米（A、B、C 在同一直线上，如图 2），求运河两岸上的 A、B 两点的距离（精确到 1 米）.

（参考数据： $\sin 22^\circ \approx 0.37$ ， $\cos 22^\circ \approx 0.93$ ， $\tan 22^\circ \approx 0.40$ ， $\sin 17.9^\circ \approx 0.31$ ， $\cos 17.9^\circ \approx 0.95$ ， $\tan 17.9^\circ \approx 0.32$ ）



图1

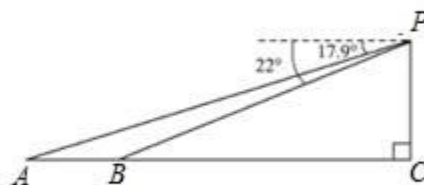


图2

【考点】TA：解直角三角形的应用－仰角俯角问题.

【分析】在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中，求出 BC，在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中，求出 AC，根据 $AB=AC-BC$ 计算即可.

【解答】解：根据题意， $BC=142$ 米， $\angle PBC=22^\circ$ ， $\angle PAC=17.9^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle PBC$ 中， $\tan \angle PBC = \frac{PC}{BC}$ ，

$$\therefore PC = BC \tan \angle PBC = 142 \cdot \tan 22^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中， $\tan \angle PAC = \frac{PC}{AC}$ ，

$$\therefore AC = \frac{PC}{\tan \angle PAC} = \frac{142 \cdot \tan 22^\circ}{\tan 17.9^\circ} \approx \frac{142 \times 0.40}{0.32} \approx 177.5,$$

$$\therefore AB = AC - BC = 177.5 - 142 \approx 36 \text{ 米}.$$

答：运河两岸上的 A、B 两点的距离为 36 米.

22. 在推进城乡义务教育均衡发展工作中，我市某区政府通过公开招标的方式为辖区内全部乡镇中学采购了某型号的学生用电脑和教师用笔记本电脑，其中，A 乡镇中学更新学生用电脑 110 台和教师用笔记本电脑 32 台，共花费 30.5 万元；B 乡镇中学更新学生电脑 55 台和教师用笔记本电脑 24 台，共花费 17.65 万元.

(1) 求该型号的学生用电脑和教师用笔记本电脑单价分别是多少万元?

(2) 经统计, 全部乡镇中学需要购进的教师用笔记本电脑台数比购进的学生用电脑台数的 $\frac{1}{5}$ 少 90 台, 在两种电脑的总费用不超过预算 438 万元的情况下, 至多能购进的学生用电脑和教师用笔记本电脑各多少台?

【考点】 C9: 一元一次不等式的应用; 9A: 二元一次方程组的应用.

【分析】 (1) 设该型号的学生用电脑的单价为 x 万元, 教师用笔记本电脑的单价为 y 万元, 根据题意列出方程组, 求出方程组的解得到 x 与 y 的值, 即可得到结果;

(2) 设能购进的学生用电脑 m 台, 则能购进的教师用笔记本电脑为 $(\frac{1}{5}m - 90)$ 台, 根据“两种电脑的总费用不超过预算 438 万元”列出不等式, 求出不等式的解集.

【解答】 解: (1) 设该型号的学生用电脑的单价为 x 万元, 教师用笔记本电脑的单价为 y 万元,

依题意得:
$$\begin{cases} 110x + 32y = 30.5 \\ 55x + 24y = 17.65 \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} x = 0.19 \\ y = 0.3 \end{cases}$$
,

经检验, 方程组的解符合题意.

答: 该型号的学生用电脑的单价为 0.19 万元, 教师用笔记本电脑的单价为 0.3 万元;

(2) 设能购进的学生用电脑 m 台, 则能购进的教师用笔记本电脑为 $(\frac{1}{5}m - 90)$ 台,

依题意得: $0.19m + 0.3 \times (\frac{1}{5}m - 90) \leq 438$,

解得 $m \leq 1860$.

所以 $\frac{1}{5}m - 90 = \frac{1}{5} \times 1860 - 90 = 282$ (台).

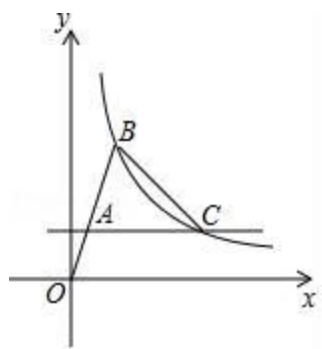
答: 能购进的学生用电脑 1860 台, 则能购进的教师用笔记本电脑为 282 台.

23. 如图, 分别位于反比例函数 $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{k}{x}$ 在第一象限图象上的两点 A、B, 与

原点 O 在同一直线上, 且 $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{3}$.

(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的表达式;

(2) 过点 A 作 x 轴的平行线交 $y = \frac{k}{x}$ 的图象于点 C , 连接 BC , 求 $\triangle ABC$ 的面积.



【考点】 G7: 待定系数法求反比例函数解析式; G5: 反比例函数系数 k 的几何意义.

【分析】 (1) 作 AE 、 BF 分别垂直于 x 轴, 垂足为 E 、 F , 根据 $\triangle AOE \sim \triangle BOF$, 则设 A 的横坐标是 m , 则可利用 m 表示出 A 和 B 的坐标, 利用待定系数法求得 k 的值;

(2) 根据 $AC \parallel x$ 轴, 则可利用 m 表示出 C 的坐标, 利用三角形的面积公式求解.

【解答】 解: (1) 作 AE 、 BF 分别垂直于 x 轴, 垂足为 E 、 F .

$$\because \triangle AOE \sim \triangle BOF, \text{ 又 } \frac{OA}{OB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OE}{OF} = \frac{EA}{FB} = \frac{1}{3}.$$

由点 A 在函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上,

设 A 的坐标是 $(m, \frac{1}{m})$,

$$\therefore \frac{OE}{OF} = \frac{m}{OF} = \frac{1}{3}, \quad \frac{EA}{FB} = \frac{\frac{1}{m}}{FB} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore OF = 3m, \quad BF = \frac{3}{m}, \quad \text{即 } B \text{ 的坐标是 } (3m, \frac{3}{m}).$$

又点 B 在 $y = \frac{k}{x}$ 的图象上,

$$\therefore \frac{3}{m} = \frac{k}{3m},$$

解得 $k=9$,

则反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的表达式是 $y=\frac{9}{x}$;

(2) 由 (1) 可知, $A(m, \frac{1}{m})$, $B(3m, \frac{3}{m})$,

又已知过 A 作 x 轴的平行线交 $y=\frac{9}{x}$ 的图象于点 C .

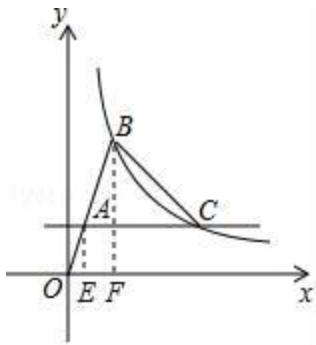
$\therefore C$ 的纵坐标是 $\frac{1}{m}$,

把 $y=\frac{1}{m}$ 代入 $y=\frac{9}{x}$ 得 $x=9m$,

$\therefore C$ 的坐标是 $(9m, \frac{1}{m})$,

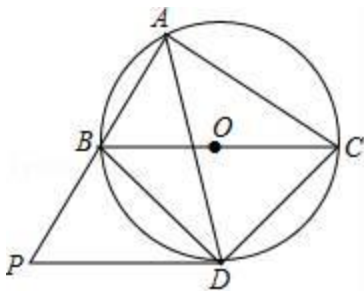
$\therefore AC=9m-m=8m$.

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2} \times 8m \times \frac{2}{m}=8$.



24. 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, O 点在 BC 边上, $\angle BAC$ 的平分线交 $\odot O$ 于点 D , 连接 BD 、 CD , 过点 D 作 BC 的平行线, 与 AB 的延长线相交于点 P .

- (1) 求证: PD 是 $\odot O$ 的切线;
- (2) 求证: $\triangle PBD \sim \triangle DCA$;
- (3) 当 $AB=6$, $AC=8$ 时, 求线段 PB 的长.



【考点】S9: 相似三角形的判定与性质; ME: 切线的判定与性质.

【分析】(1) 由直径所对的圆周角为直角得到 $\angle BAC$ 为直角, 再由 AD 为角平分线, 得到一对角相等, 根据同弧所对的圆心角等于圆周角的 2 倍及等量代换确定出 $\angle DOC$ 为直角, 与平行线中的一条垂直, 与另一条也垂直得到 OD 与 PD 垂直, 即可得证;

(2) 由 PD 与 BC 平行, 得到一对同位角相等, 再由同弧所对的圆周角相等及等量代换得到 $\angle P = \angle ACD$, 根据同角的补角相等得到一对角相等, 利用两对角相等的三角形相似即可得证;

(3) 由三角形 ABC 为直角三角形, 利用勾股定理求出 BC 的长, 再由 OD 垂直平分 BC , 得到 $DB = DC$, 根据 (2) 的相似, 得比例, 求出所求即可.

【解答】(1) 证明: $\because$ 圆心 O 在 BC 上,

$\therefore BC$ 是圆 O 的直径,

$\therefore \angle BAC = 90^\circ$,

连接 OD ,

$\because AD$ 平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle BAC = 2\angle DAC$,

$\because \angle DOC = 2\angle DAC$,

$\therefore \angle DOC = \angle BAC = 90^\circ$, 即 $OD \perp BC$,

$\because PD \parallel BC$,

$\therefore OD \perp PD$,

$\because OD$ 为圆 O 的半径,

$\therefore PD$ 是圆 O 的切线;

(2) 证明: $\because PD \parallel BC$,

$\therefore \angle P = \angle ABC$,

$\because \angle ABC = \angle ADC$,

$\therefore \angle P = \angle ADC$,

$\because \angle PBD + \angle ABD = 180^\circ$, $\angle ACD + \angle ABD = 180^\circ$,

$\therefore \angle PBD = \angle ACD$,

$\therefore \triangle PBD \sim \triangle DCA$;

(3) 解: $\because \triangle ABC$ 为直角三角形,

$$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + 8^2 = 100,$$

$$\therefore BC = 10,$$

$\because OD$ 垂直平分 BC ,

$$\therefore DB = DC,$$

$\because BC$ 为圆 O 的直径,

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

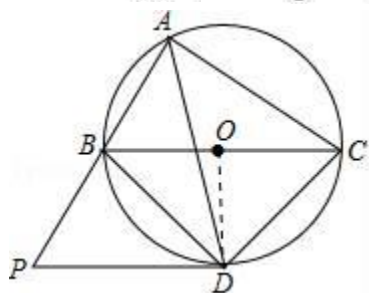
在 $Rt\triangle DBC$ 中, $DB^2 + DC^2 = BC^2$, 即 $2DC^2 = BC^2 = 100$,

$$\therefore DC = DB = 5\sqrt{2},$$

$\therefore \triangle PBD \sim \triangle DCA$,

$$\therefore \frac{PB}{DC} = \frac{BD}{AC},$$

$$\text{则 } PB = \frac{DC \cdot BD}{AC} = \frac{5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2}}{8} = \frac{25}{4}.$$



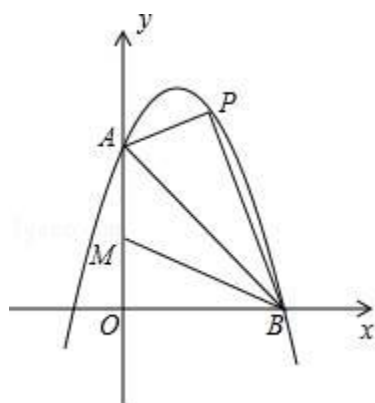
25. 如图, 已知抛物线 $y = ax^2 + 2x + c$ 与 y 轴交于点 $A(0, 6)$, 与 x 轴交于点 $B(6, 0)$, 点 P 是线段 AB 上方抛物线上的一个动点.

(1) 求这条抛物线的表达式及其顶点坐标;

(2) 当点 P 移动到抛物线的什么位置时, 使得 $\angle PAB = 75^\circ$, 求出此时点 P 的坐标;

(3) 当点 P 从 A 点出发沿线段 AB 上方的抛物线向终点 B 移动, 在移动中, 点 P 的横坐标以每秒 1 个单位长度的速度变动, 与此同时点 M 以每秒 1 个单位长度的速度沿 AO 向终点 O 移动, 点 P, M 移动到各自终点时停止, 当两个移点移动 t 秒时, 求四边形 $PAMB$ 的面积 S 关于 t 的函数表达式, 并求 t 为何值时,

S 有最大值，最大值是多少？



【考点】HF：二次函数综合题.

【分析】(1) 由 A、B 坐标，利用待定系数法可求得抛物线的表达式，化为顶点式可求得顶点坐标；

(2) 过 P 作 $PC \perp y$ 轴于点 C，由条件可求得 $\angle PAC = 60^\circ$ ，可设 $AC = m$ ，在 $Rt \triangle PAC$ 中，可表示出 PC 的长，从而可用 m 表示出 P 点坐标，代入抛物线解析式可求得 m 的值，即可求得 P 点坐标；

(3) 用 t 可表示出 P、M 的坐标，过 P 作 $PE \perp x$ 轴于点 E，交 AB 于点 F，则可表示出 F 的坐标，从而可用 t 表示出 PF 的长，从而可表示出 $\triangle PAB$ 的面积，利用 $S_{\text{四边形 PAMB}} = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle AMB}$ ，可得到 S 关于 t 的二次函数，利用二次函数的性质可求得其最大值.

【解答】解：

(1) 根据题意，把 A (0, 6)，B (6, 0) 代入抛物线解析式可得
$$\begin{cases} c=6 \\ 36a+12+c=0 \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-\frac{1}{2} \\ c=6 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$,

$$\because y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8,$$

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 (2, 8)；

(2) 如图 1，过 P 作 $PC \perp y$ 轴于点 C，

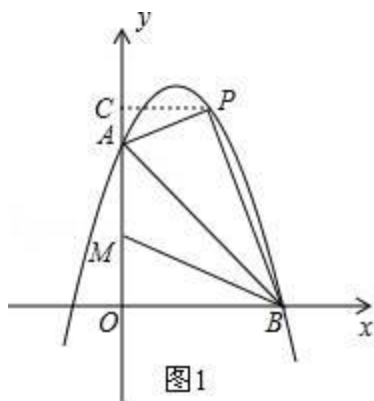


图1

$$\because OA=OB=6,$$

$$\therefore \angle OAB=45^\circ,$$

$$\therefore \text{当} \angle PAB=75^\circ \text{时, } \angle PAC=60^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle PAC = \frac{PC}{AC}, \text{ 即 } \frac{PC}{AC} = \sqrt{3},$$

$$\text{设 } AC=m, \text{ 则 } PC=\sqrt{3}m,$$

$$\therefore P(\sqrt{3}m, 6+m),$$

$$\text{把 } P \text{ 点坐标代入抛物线表达式可得 } 6+m = -\frac{1}{2}(\sqrt{3}m)^2 + 2\sqrt{3}m + 6, \text{ 解得 } m=0 \text{ 或}$$

$$m = \frac{4}{3}\sqrt{3} - \frac{2}{3},$$

经检验, $P(0, 6)$ 与点 A 重合, 不合题意, 舍去,

$$\therefore \text{所求的 } P \text{ 点坐标为 } \left(4 - \frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{16}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right);$$

$$(3) \text{ 当两个支点移动 } t \text{ 秒时, 则 } P(t, -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 6), M(0, 6-t),$$

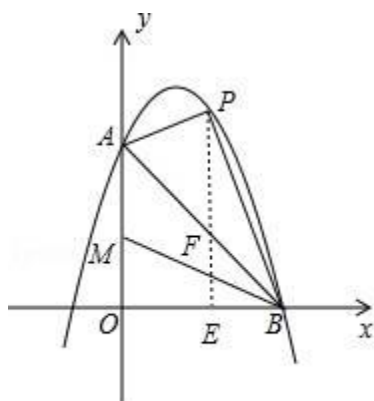


图2

如图 2, 作 $PE \perp x$ 轴于点 E , 交 AB 于点 F , 则 $EF=EB=6-t$,

$$\therefore F(t, 6-t),$$

$$\therefore FP = \frac{1}{2}t^2 + 2t + 6 - (6 - t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t,$$

$\therefore$ 点 A 到 PE 的距离等于 OE, 点 B 到 PE 的距离等于 BE,

$$\therefore S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}FP \cdot OE + \frac{1}{2}FP \cdot BE = \frac{1}{2}FP \cdot (OE + BE) = \frac{1}{2}FP \cdot OB = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t\right) \times 6 = -\frac{3}{2}t^2 + 9t, \text{ 且 } S_{\triangle AMB} = \frac{1}{4}AM \cdot OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \times t \times 6 = 3t,$$

$$\therefore S = S_{\text{四边形 PAMB}} = S_{\triangle PAB} + S_{\triangle AMB} = -\frac{3}{2}t^2 + 12t = -\frac{3}{2}(t - 4)^2 + 24,$$

$\therefore$ 当 $t=4$ 时, S 有最大值, 最大值为 24.

2017 年 7 月 4 日