

2017 年山东省济宁市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) $\frac{1}{6}$ 的倒数是 ()

A. 6 B. -6 C. $\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

2. (3 分) 单项式 $9x^m y^3$ 与单项式 $4x^2 y^n$ 是同类项，则 $m+n$ 的值是 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

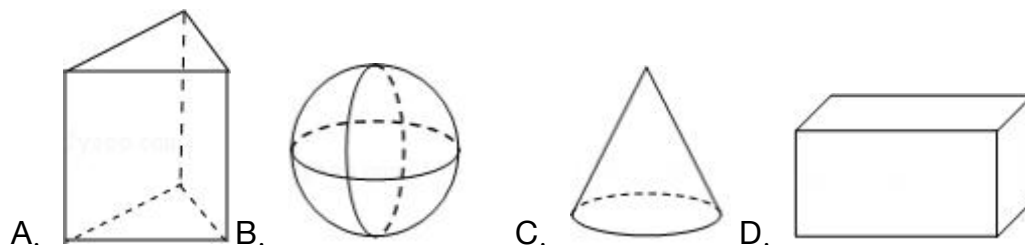
3. (3 分) 下列图形中是中心对称图形的是 ()



4. (3 分) 某桑蚕丝的直径约为 0.000016 米，将 0.000016 用科学记数法表示是 ()

A. 1.6×10^{-4} B. 1.6×10^{-5} C. 1.6×10^{-6} D. 16×10^{-4}

5. (3 分) 下列几何体中，主视图、俯视图、左视图都相同的是 ()



6. (3 分) 若 $\sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + 1$ 在实数范围内有意义，则 x 满足的条件是 ()

A. $x \geq \frac{1}{2}$ B. $x \leq \frac{1}{2}$ C. $x = \frac{1}{2}$ D. $x \neq \frac{1}{2}$

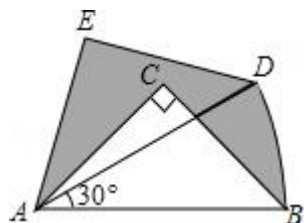
7. (3 分) 计算 $(a^2)^3 + a^2 \cdot a^3 - a^2 \div a^{-3}$ ，结果是 ()

A. $2a^5 - a$ B. $2a^5 - \frac{1}{a}$ C. a^5 D. a^6

8. (3 分) 将分别标有“孔”“孟”“之”“乡”汉字的四个小球装在一个不透明的口袋中，这些球除汉字外无其他差别，每次摸球前先搅拌均匀，随机摸出一球，不放回；再随机摸出一球，两次摸出的球上的汉字组成“孔孟”的概率是 ()

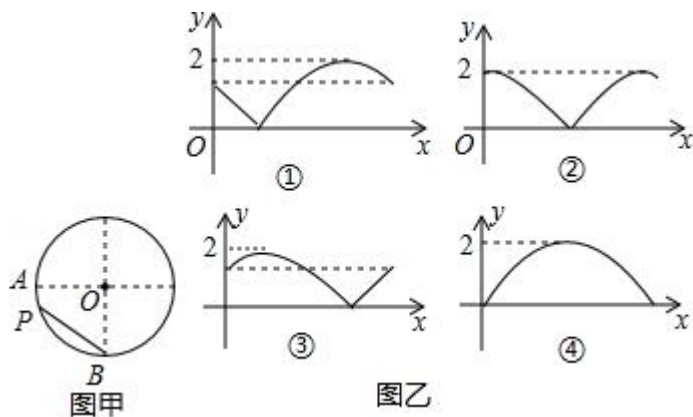
- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

9. (3分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=1$, 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 后得到 $\text{Rt}\triangle ADE$, 点 B 经过的路径为 $\widehat{BD}$, 则图中阴影部分的面积是 ()



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

10. (3分) 如图, A, B 是半径为 1 的 $\odot O$ 上两点, 且 $OA \perp OB$, 点 P 从点 A 出发, 在 $\odot O$ 上以每秒一个单位长度的速度匀速运动, 回到点 A 运动结束, 设运动时间为 x (单位: s), 弦 BP 的长为 y , 那么下列图象中可能表示 y 与 x 函数关系的是 ()



- A. ① B. ③ C. ②或④ D. ①或③

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

11. (3分) 分解因式: $ma^2+2mab+mb^2=$ _____.

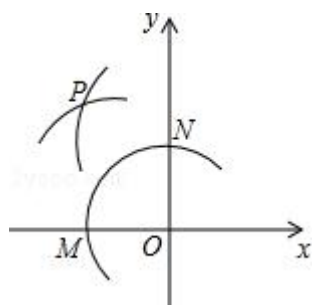
12. (3分) 请写出一个过点 $(1, 1)$, 且与 x 轴无交点的函数解析式: _____.

13. (3分) 《孙子算经》是中国古代重要的数学著作, 其中有一段文字的大意是:

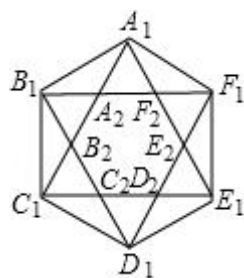
甲、乙两人各有若干钱，如果甲得到乙所有钱的一半，那么甲共有钱 48 文；如果乙得到甲所有钱的 $\frac{2}{3}$ ，那么乙也共有钱 48 文，甲、乙两人原来各有多少钱？

设甲原有 x 文钱，乙原有 y 文钱，可列方程组是_____.

14. (3 分) 如图，在平面直角坐标系中，以 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 x 轴于点 M ，交 y 轴于点 N ，再分别以点 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在第二象限内交于点 $P(a, b)$ ，则 a 与 b 的数量关系是_____.



15. (3 分) 如图，正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的边长为 1，它的六条对角线又围成一个正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ ，如此继续下去，则正六边形 $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$ 的面积是_____.

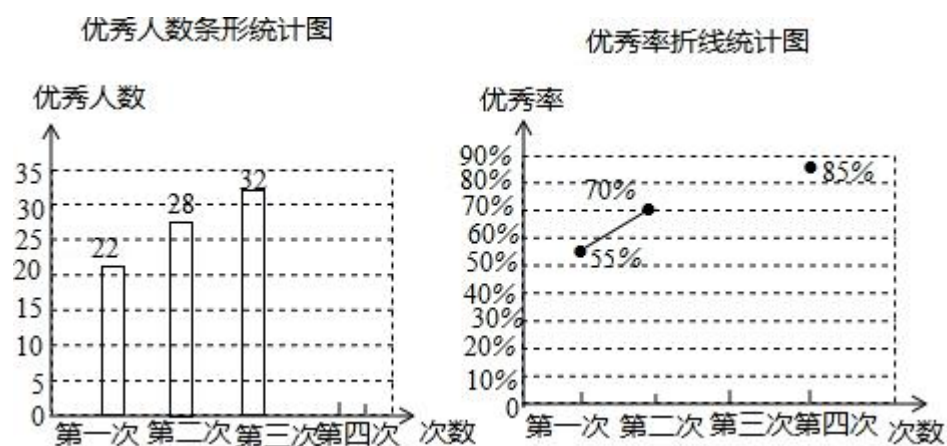


三、解答题 (本大题共 7 小题，共 55 分)

16. (5 分) 解方程: $\frac{2x}{x-2} = 1 - \frac{1}{2-x}$.

17. (7 分) 为了参加学校举行的传统文化知识竞赛, 某班进行了四次模拟训练, 将成绩优秀的人数和优秀率绘制成如下两个不完整的统计图: 请根据以上两图解答下列问题:

- (1) 该班总人数是_____;
- (2) 根据计算, 请你补全两个统计图;
- (3) 观察补全后的统计图, 写出一条你发现的结论.



18. (7 分) 某商店经销一种双肩包, 已知这种双肩包的成本价为每个 30 元. 市

场调查发现，这种双肩包每天的销售量 y (单位：个) 与销售单价 x (单位：元)

有如下关系： $y = -x + 60$ ($30 \leq x \leq 60$) .

设这种双肩包每天的销售利润为 w 元.

(1) 求 w 与 x 之间的函数解析式；

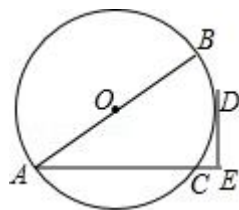
(2) 这种双肩包销售单价定为多少元时，每天的销售利润最大？最大利润是多少元？

(3) 如果物价部门规定这种双肩包的销售单价不高于 48 元，该商店销售这种双肩包每天要获得 200 元的销售利润，销售单价应定为多少元？

19. (8 分) 如图，已知 $\odot O$ 的直径 $AB=12$ ，弦 $AC=10$ ， D 是 $\widehat{BC}$ 的中点，过点 D 作 $DE \perp AC$ ，交 AC 的延长线于点 E .

(1) 求证： DE 是 $\odot O$ 的切线；

(2) 求 AE 的长.

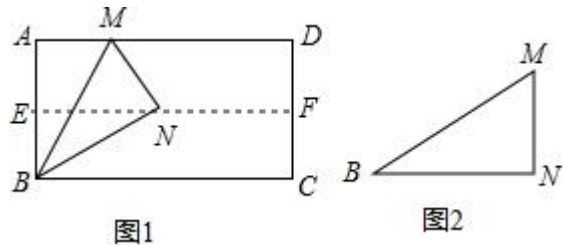


20. (8 分) 实验探究：

(1) 如图 1，对折矩形纸片 $ABCD$ ，使 AD 与 BC 重合，得到折痕 EF ，把纸片展开；再一次折叠纸片，使点 A 落在 EF 上，并使折痕经过点 B ，得到折痕 BM ，

同时得到线段 BN , MN . 请你观察图 1, 猜想 $\angle MBN$ 的度数是多少, 并证明你的结论.

(2) 将图 1 中的三角形纸片 BMN 剪下, 如图 2, 折叠该纸片, 探究 MN 与 BM 的数量关系, 写出折叠方案, 并结合方案证明你的结论.



21. (9 分) 已知函数 $y = mx^2 - (2m - 5)x + m - 2$ 的图象与 x 轴有两个公共点.

(1) 求 m 的取值范围, 并写出当 m 取范围内最大整数时函数的解析式;

(2) 题 (1) 中求得的函数记为 C_1 ,

①当 $n \leq x \leq -1$ 时, y 的取值范围是 $1 \leq y \leq -3n$, 求 n 的值;

②函数 $C_2: y = m(x - h)^2 + k$ 的图象由函数 C_1 的图象平移得到, 其顶点 P 落在以原点为圆心, 半径为 $\sqrt{5}$ 的圆内或圆上, 设函数 C_1 的图象顶点为 M , 求点 P 与点 M 距离最大时函数 C_2 的解析式.

22. (11 分) 定义：点 P 是 $\triangle ABC$ 内部或边上的点（顶点除外），在 $\triangle PAB$ ， $\triangle PBC$ ， $\triangle PCA$ 中，若至少有一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似，则称点 P 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

例如：如图 1，点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部， $\angle PBC = \angle A$ ， $\angle PCB = \angle ABC$ ，则 $\triangle BCP \sim \triangle ABC$ ，故点 P 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

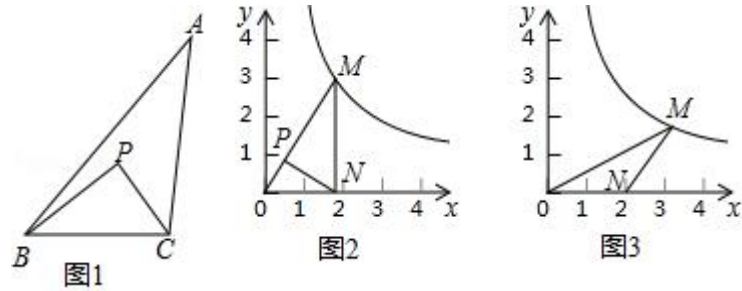
请你运用所学知识，结合上述材料，解决下列问题：

在平面直角坐标系中，点 M 是曲线 $y = \frac{3\sqrt{3}}{x}$ ($x > 0$) 上的任意一点，点 N 是 x 轴正半轴上的任意一点.

(1) 如图 2，点 P 是 OM 上一点， $\angle ONP = \angle M$ ，试说明点 P 是 $\triangle MON$ 的自相似点；当点 M 的坐标是 $(\sqrt{3}, 3)$ ，点 N 的坐标是 $(\sqrt{3}, 0)$ 时，求点 P 的坐标；

(2) 如图 3, 当点 M 的坐标是 $(3, \sqrt{3})$, 点 N 的坐标是 $(2, 0)$ 时, 求 $\triangle MON$ 的自相似点的坐标;

(3) 是否存在点 M 和点 N , 使 $\triangle MON$ 无自相似点? 若存在, 请直接写出这两点的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2017 年山东省济宁市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2017•济宁) $\frac{1}{6}$ 的倒数是 ()

A. 6 B. -6 C. $\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{6}$

【解答】解: $\frac{1}{6}$ 的倒数是 6.

故选: A.

2. (3 分) (2017•济宁) 单项式 $9x^m y^3$ 与单项式 $4x^2 y^n$ 是同类项, 则 $m+n$ 的值是 ()

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【解答】解: 由题意, 得

$m=2$, $n=3$.

$m+n=2+3=5$,

故选: D.

3. (3 分) (2017•济宁) 下列图形中是中心对称图形的是 ()



【解答】解: A、不是中心对称图形, 故本选项错误;

B、不是中心对称图形, 故本选项错误;

C、是中心对称图形, 故本选项正确;

D、不是中心对称图形, 故本选项错误.

故选 C.

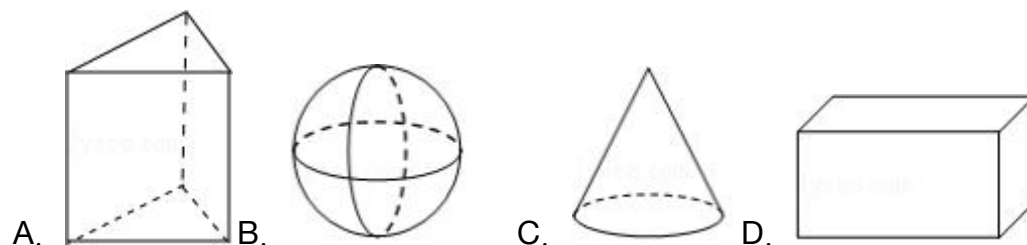
4. (3 分) (2017•济宁) 某桑蚕丝的直径约为 0.000016 米, 将 0.000016 用科学记数法表示是 ()

A. 1.6×10^{-4} B. 1.6×10^{-5} C. 1.6×10^{-6} D. 16×10^{-4}

【解答】解: $0.000016 = 1.6 \times 10^{-5}$;

故选: B.

5. (3 分) (2017•济宁) 下列几何体中, 主视图、俯视图、左视图都相同的是 ()



【解答】解: A、三棱柱的主视图是长方形, 左视图是长方形, 俯视图是三角形, 故此选项不符合题意;

B、球的主视图、左视图、俯视图都是半径相同的圆, 故此选项符合题意;

C、圆锥体的主视图是三角形, 左视图是三角形, 俯视图是圆及圆心, 故此选项不符合题意;

D、长方体的主视图是长方形, 左视图是长方形, 俯视图是长方形, 但是每个长方形的长与宽不完全相同, 故此选项不符合题意;

故选: B.

6. (3 分) (2017•济宁) 若 $\sqrt{2x-1} + \sqrt{1-2x} + 1$ 在实数范围内有意义, 则 x 满足的条件是 ()

A. $x \geq \frac{1}{2}$ B. $x \leq \frac{1}{2}$ C. $x = \frac{1}{2}$ D. $x \neq \frac{1}{2}$

【解答】解：由题意可知： $\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ 1-2x \geq 0 \end{cases}$

解得： $x = \frac{1}{2}$

故选 (C)

7. (3分) (2017•济宁) 计算 $(a^2)^3 + a^2 \cdot a^3 - a^2 \div a^{-3}$ ，结果是 ()

A. $2a^5 - a$ B. $2a^5 - \frac{1}{a}$ C. a^5 D. a^6

【解答】解： $(a^2)^3 + a^2 \cdot a^3 - a^2 \div a^{-3}$

$= a^6 + a^5 - a^5$

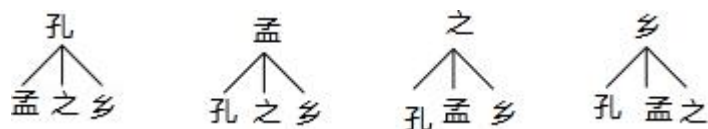
$= a^6$.

故选： D.

8. (3分) (2017•济宁) 将分别标有“孔”“孟”“之”“乡”汉字的四个小球装在一个不透明的口袋中，这些球除汉字外无其他差别，每次摸球前先搅拌均匀，随机摸出一球，不放回；再随机摸出一球，两次摸出的球上的汉字组成“孔孟”的概率是 ()

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{2}$

【解答】解：画树状图为：

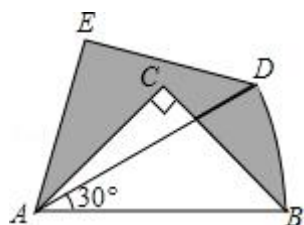


共有 12 种等可能的结果数，其中两次摸出的球上的汉字组成“孔孟”的结果数为 2，

所以两次摸出的球上的汉字组成“孔孟”的概率 $= \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

故选 B.

9. (3分) (2017•济宁) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=1$, 将 $\text{Rt}\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 后得到 $\text{Rt}\triangle ADE$, 点 B 经过的路径为 $\widehat{BD}$, 则图中阴影部分的面积是 ()



- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

【解答】解: $\because \angle ACB=90^\circ$, $AC=BC=1$,

$$\therefore AB=\sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\text{扇形} ABD} = \frac{30 \cdot \pi \times (\sqrt{2})^2}{360} = \frac{\pi}{6}.$$

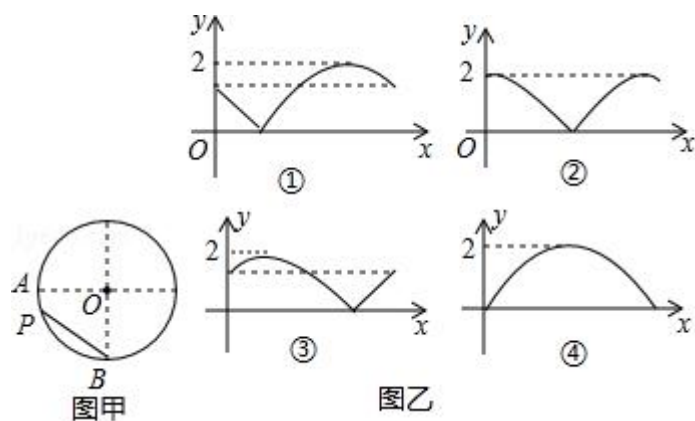
又 $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 30° 后得到 $\text{Rt}\triangle ADE$,

$$\therefore \text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle ACB,$$

$$\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ADE} + S_{\text{扇形} ABD} - S_{\triangle ABC} = S_{\text{扇形} ABD} = \frac{\pi}{6}.$$

故选: A.

10. (3分) (2017•济宁) 如图, A, B 是半径为 1 的 $\odot O$ 上两点, 且 $OA \perp OB$, 点 P 从点 A 出发, 在 $\odot O$ 上以每秒一个单位长度的速度匀速运动, 回到点 A 运动结束, 设运动时间为 x (单位: s), 弦 BP 的长为 y , 那么下列图象中可能表示 y 与 x 函数关系的是 ()



A. ① B. ③ C. ②或④ D. ①或③

【解答】解：当点 P 顺时针旋转时，图象是③，当点 P 逆时针旋转时，图象是①，
故答案为①③，
故选 D.

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

11. (3 分) (2017•济宁) 分解因式： $ma^2+2mab+mb^2=$ $m(a+b)^2$.

【解答】解：原式= $m(a^2+2ab+b^2)=m(a+b)^2$,

故答案为： $m(a+b)^2$

12. (3 分) (2017•济宁) 请写出一个过点 (1, 1)，且与 x 轴无交点的函数解析式： $y=\frac{1}{x}$ (答案不唯一).

【解答】解：反比例函数图象与坐标轴无交点，且反比例函数系数 $k=1 \times 1=1$,

所以反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ (答案不唯一) 符合题意.

故答案可以是： $y=\frac{1}{x}$ (答案不唯一).

13. (3 分) (2017•济宁) 《孙子算经》是中国古代重要的数学著作，其中有一段

文字的大意是：甲、乙两人各有若干钱，如果甲得到乙所有钱的一半，那么甲共有钱 48 文；如果乙得到甲所有钱的 $\frac{2}{3}$ ，那么乙也共有钱 48 文，甲、乙两人原来

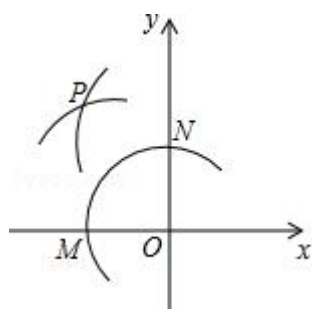
各有多少钱？设甲原有 x 文钱，乙原有 y 文钱，可列方程组是 $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=48 \\ \frac{2}{3}x+y=48 \end{cases}$.

【解答】解：由题意可得，

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=48 \\ \frac{2}{3}x+y=48 \end{cases},$$

故答案为： $\begin{cases} x+\frac{1}{2}y=48 \\ \frac{2}{3}x+y=48 \end{cases}$.

14. (3 分) (2017•济宁) 如图，在平面直角坐标系中，以 O 为圆心，适当长为半径画弧，交 x 轴于点 M ，交 y 轴于点 N ，再分别以点 M ， N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧在第二象限内交于点 P (a ， b)，则 a 与 b 的数量关系是 $a+b=0$.



【解答】解：根据作图方法可得，点 P 在第二象限角平分线上，

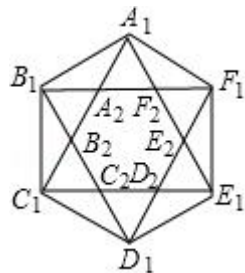
$\therefore$ 点 P 到 x 轴、 y 轴的距离相等，即 $|b|=|a|$ ，

又 $\because$ 点 P (a ， b) 第二象限内，

$\therefore b=-a$ ，即 $a+b=0$ ，

故答案为： $a+b=0$.

15. (3分) (2017•济宁) 如图, 正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的边长为 1, 它的六条对角线又围成一个正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$, 如此继续下去, 则正六边形 $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$ 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{18}$.



【解答】解: 由正六边形的性质得: $\angle A_1B_1B_2=90^\circ$, $\angle B_1A_1B_2=30^\circ$, $A_1A_2=A_2B_2$,
 $\therefore B_1B_2=\frac{1}{\sqrt{3}}A_1B_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore A_2B_2=\frac{1}{2}A_1B_2=B_1B_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$,
 $\therefore$ 正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1 \sim$ 正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$,
 $\therefore$ 正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的面积: 正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的面积 $= \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$,
 $\therefore$ 正六边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 的面积 $= 6 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,
 $\therefore$ 正六边形 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 的面积 $= \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
同理: 正六边形 $A_4B_4C_4D_4E_4F_4$ 的面积 $= \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{18}$,
故答案为: $\frac{\sqrt{3}}{18}$.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 55 分)

16. (5分) (2017•济宁) 解方程: $\frac{2x}{x-2}=1-\frac{1}{2-x}$.

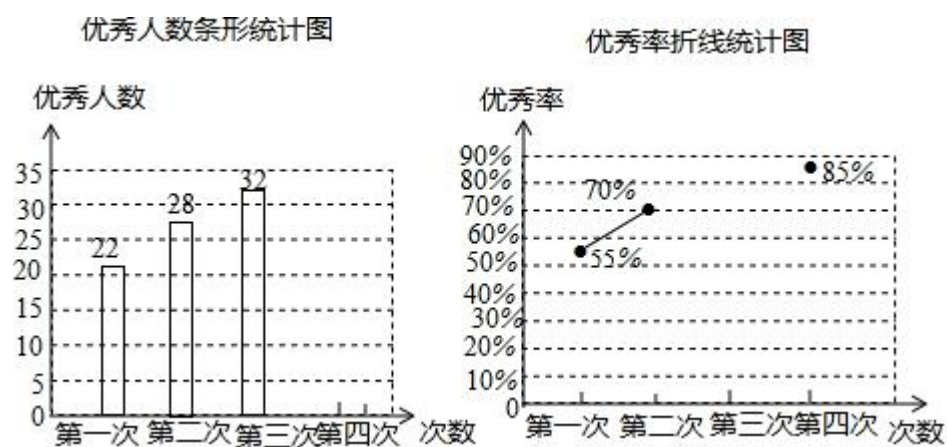
【解答】解: 去分母得: $2x=x-2+1$,

移项合并得: $x=-1$,

经检验 $x=-1$ 是分式方程的解.

17. (7分) (2017•济宁) 为了参加学校举行的传统文化知识竞赛, 某班进行了四次模拟训练, 将成绩优秀的人数和优秀率绘制成如下两个不完整的统计图: 请根据以上两图解答下列问题:

- (1) 该班总人数是 40;
- (2) 根据计算, 请你补全两个统计图;
- (3) 观察补全后的统计图, 写出一条你发现的结论.



【解答】 解: (1) 由题意可得:

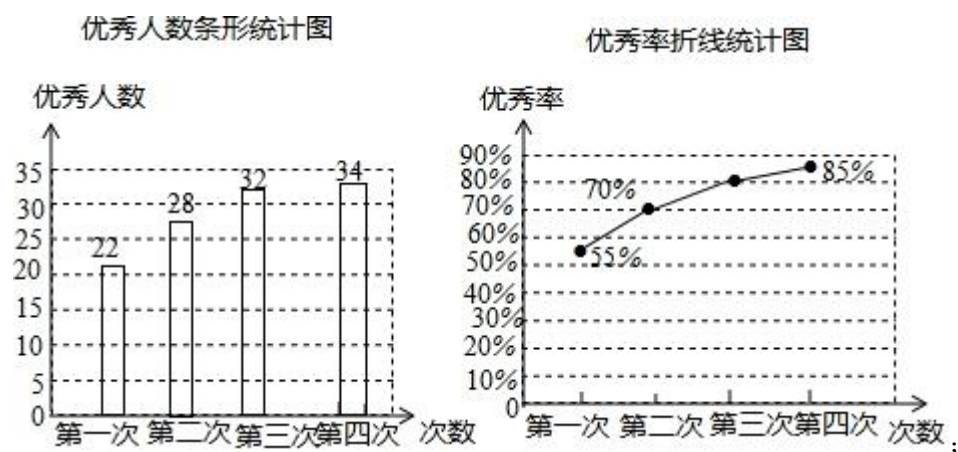
该班总人数是: $22 \div 55\% = 40$ (人);

故答案为: 40;

(2) 由 (1) 得, 第四次优秀的人数为: $40 \times 85\% = 34$ (人),

第三次优秀率为: $\frac{32}{40} \times 100\% = 80\%$;

如图所示:



(3) 答案不唯一，如优秀人数逐渐增多，增大的幅度逐渐减小等.

18. (7 分) (2017•济宁) 某商店经销一种双肩包，已知这种双肩包的成本价为每个 30 元. 市场调查发现，这种双肩包每天的销售量 y (单位：个) 与销售单价 x (单位：元) 有如下关系： $y = -x + 60$ ($30 \leq x \leq 60$).

设这种双肩包每天的销售利润为 w 元.

(1) 求 w 与 x 之间的函数解析式;

(2) 这种双肩包销售单价定为多少元时，每天的销售利润最大？最大利润是多少元？

(3) 如果物价部门规定这种双肩包的销售单价不高于 48 元，该商店销售这种双肩包每天要获得 200 元的销售利润，销售单价应定为多少元？

【解答】解：(1) $w = (x - 30) \cdot y = (-x + 60)(x - 30) = -x^2 + 30x + 60x - 1800 = -x^2 + 90x - 1800$,

w 与 x 之间的函数解析式 $w = -x^2 + 90x - 1800$;

(2) 根据题意得： $w = -x^2 + 90x - 1800 = -(x - 45)^2 + 225$,

$\therefore -1 < 0$,

当 $x=45$ 时, w 有最大值, 最大值是 225.

(3) 当 $w=200$ 时, $-x^2+90x-1800=200$, 解得 $x_1=40$, $x_2=50$,

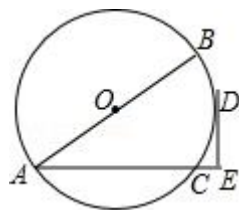
$\therefore 50 > 48$, $x_2=50$ 不符合题意, 舍,

答: 该商店销售这种双肩包每天要获得 200 元的销售利润, 销售单价应定为 40 元.

19. (8 分) (2017•济宁) 如图, 已知 $\odot O$ 的直径 $AB=12$, 弦 $AC=10$, D 是 $\widehat{BC}$ 的中点, 过点 D 作 $DE \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 E .

(1) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 求 AE 的长.



【解答】(1) 证明: 连接 OD ,

$\therefore D$ 为 $\widehat{BC}$ 的中点,

$\therefore \widehat{BD} = \widehat{CD}$,

$\therefore \angle BOD = \angle BAE$,

$\therefore OD \parallel AE$,

$\therefore DE \perp AC$,

$\therefore \angle ADE = 90^\circ$,

$\therefore \angle AED = 90^\circ$,

$\therefore OD \perp DE$,

则 DE 为圆 O 的切线;

(2) 解: 过点 O 作 $OF \perp AC$,

$$\therefore AC=10,$$

$$\therefore AF=CF=\frac{1}{2}AC=5,$$

$$\therefore \angle OFE=\angle DEF=\angle ODE=90^\circ,$$

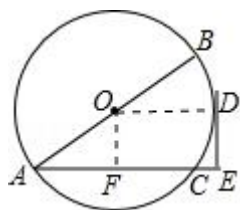
$\therefore$ 四边形 $OFED$ 为矩形,

$$\therefore FE=OD=\frac{1}{2}AB,$$

$$\therefore AB=12,$$

$$\therefore FE=6,$$

则 $AE=AF+FE=5+6=11$.



20. (8 分) (2017•济宁) 实验探究:

(1) 如图 1, 对折矩形纸片 $ABCD$, 使 AD 与 BC 重合, 得到折痕 EF , 把纸片展开; 再一次折叠纸片, 使点 A 落在 EF 上, 并使折痕经过点 B , 得到折痕 BM , 同时得到线段 BN , MN . 请你观察图 1, 猜想 $\angle MBN$ 的度数是多少, 并证明你的结论.

(2) 将图 1 中的三角形纸片 BMN 剪下, 如图 2, 折叠该纸片, 探究 MN 与 BM 的数量关系, 写出折叠方案, 并结合方案证明你的结论.

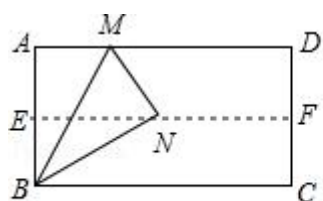


图1

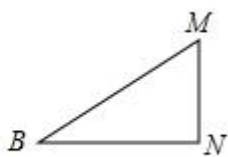


图2

【解答】解：（1）猜想： $\angle MBN=30^\circ$.

理由：如图 1 中，连接 AN， $\because$ 直线 EF 是 AB 的垂直平分线，

$$\therefore NA=NB,$$

由折叠可知， $BN=AB$,

$$\therefore AB=BN=AN,$$

$\therefore \triangle ABN$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ABN=60^\circ,$$

$$\therefore \angle NBM=\angle ABM=\frac{1}{2}\angle ABN=30^\circ.$$

（2）结论： $MN=\frac{1}{2}BM$.

折纸方案：如图 2 中，折叠 $\triangle BMN$ ，使得点 N 落在 BM 上 O 处，折痕为 MP，

连接 OP.

理由：由折叠可知 $\triangle MOP \cong \triangle MNP$,

$$\therefore MN=OM, \quad \angle OMP=\angle NMP=\frac{1}{2}\angle OMN=30^\circ=\angle B,$$

$$\angle MOP=\angle MNP=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP=\angle MOP=90^\circ,$$

$$\because OP=OP,$$

$$\therefore \triangle MOP \cong \triangle BOP,$$

$$\therefore MO=BO=\frac{1}{2}BM,$$

$$\therefore MN = \frac{1}{2}BM.$$

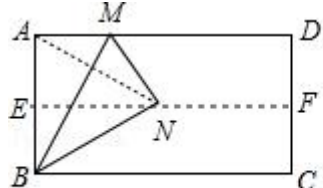


图1

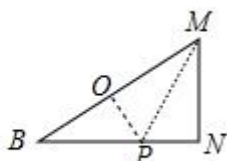


图2

21. (9分) (2017•济宁) 已知函数 $y = mx^2 - (2m - 5)x + m - 2$ 的图象与 x 轴有两个公共点.

(1) 求 m 的取值范围, 并写出当 m 取范围内最大整数时函数的解析式;

(2) 题 (1) 中求得的函数记为 C_1 ,

①当 $n \leq x \leq -1$ 时, y 的取值范围是 $1 \leq y \leq -3n$, 求 n 的值;

②函数 $C_2: y = m(x - h)^2 + k$ 的图象由函数 C_1 的图象平移得到, 其顶点 P 落在以原点为圆心, 半径为 $\sqrt{5}$ 的圆内或圆上, 设函数 C_1 的图象顶点为 M , 求点 P 与点 M 距离最大时函数 C_2 的解析式.

【解答】解: (1) $\because$ 函数图象与 x 轴有两个交点,

$$\therefore m \neq 0 \text{ 且 } [(2m - 5)]^2 - 4m(m - 2) > 0,$$

$$\text{解得: } m < \frac{25}{12} \text{ 且 } m \neq 0.$$

$\therefore m$ 为符合条件的最大整数,

$$\therefore m = 2.$$

$$\therefore \text{函数的解析式为 } y = 2x^2 + x.$$

$$(2) \text{ 抛物线的对称轴为 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4}.$$

$$\therefore n \leq x \leq -1 < -\frac{1}{4}, \quad a = 2 > 0,$$

$\therefore$ 当 $n \leq x \leq -1$ 时, y 随 x 的增大而减小.

∴ 当 $x=n$ 时, $y=-3n$.

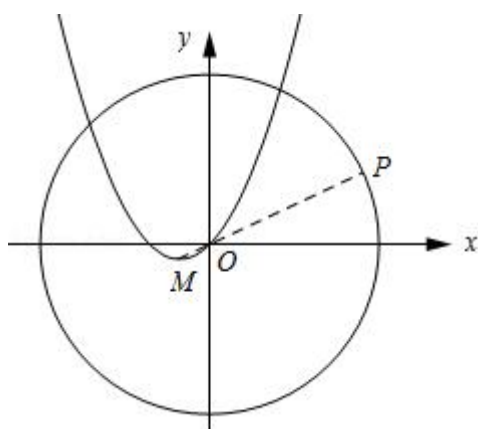
∴ $2n^2+n=-3n$, 解得 $n=-2$ 或 $n=0$ (舍去).

∴ n 的值为 -2 .

$$(3) \because y=2x^2+x=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{8},$$

$$\therefore M\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}\right).$$

如图所示:



当点 P 在 OM 与 $\odot O$ 的交点处时, PM 有最大值.

设直线 OM 的解析式为 $y=kx$, 将点 M 的坐标代入得: $-\frac{1}{4}k=-\frac{1}{8}$, 解得: $k=\frac{1}{2}$.

∴ OM 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x$.

设点 P 的坐标为 $(x, \frac{1}{2}x)$.

由两点间的距离公式可知: $OP=\sqrt{x^2+(\frac{1}{2}x)^2}=5$,

解得: $x=2$ 或 $x=-2$ (舍去).

∴ 点 P 的坐标为 $(2, 1)$.

∴ 当点 P 与点 M 距离最大时函数 C_2 的解析式为 $y=2(x-2)^2+1$.

22. (11 分) (2017•济宁) 定义: 点 P 是 $\triangle ABC$ 内部或边上的点 (顶点除外),

在 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 中, 若至少有一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似, 则称点 P 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

例如: 如图 1, 点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部, $\angle PBC = \angle A$, $\angle PCB = \angle ABC$, 则 $\triangle BCP \sim \triangle ABC$, 故点 P 是 $\triangle ABC$ 的自相似点.

请你运用所学知识, 结合上述材料, 解决下列问题:

在平面直角坐标系中, 点 M 是曲线 $y = \frac{3\sqrt{3}}{x}$ ($x > 0$) 上的任意一点, 点 N 是 x 轴正半轴上的任意一点.

(1) 如图 2, 点 P 是 OM 上一点, $\angle ONP = \angle M$, 试说明点 P 是 $\triangle MON$ 的自相似点; 当点 M 的坐标是 $(\sqrt{3}, 3)$, 点 N 的坐标是 $(\sqrt{3}, 0)$ 时, 求点 P 的坐标;

(2) 如图 3, 当点 M 的坐标是 $(3, \sqrt{3})$, 点 N 的坐标是 $(2, 0)$ 时, 求 $\triangle MON$ 的自相似点的坐标;

(3) 是否存在点 M 和点 N , 使 $\triangle MON$ 无自相似点? 若存在, 请直接写出这两点的坐标; 若不存在, 请说明理由.

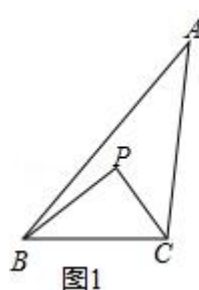


图1

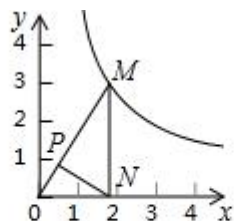


图2

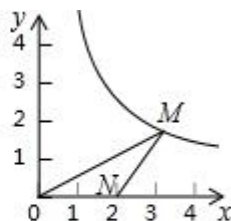


图3

【解答】 解: (1) $\because \angle ONP = \angle M$, $\angle NOP = \angle MON$,

$\therefore \triangle NOP \sim \triangle MON$,

$\therefore$ 点 P 是 $\triangle MON$ 的自相似点;

过 P 作 $PD \perp x$ 轴于 D , 则 $\tan \angle POD = \frac{MN}{ON} = \sqrt{3}$,

$\therefore \angle AON = 60^\circ$,

$\therefore$ 当点 M 的坐标是 $(\sqrt{3}, 3)$, 点 N 的坐标是 $(\sqrt{3}, 0)$,

$\therefore \angle MNO = 90^\circ$,

$$\therefore \triangle NOP \sim \triangle MON,$$

$$\therefore \angle NPO = \angle MNO = 90^\circ,$$

$$\text{在 Rt}\triangle OPN \text{ 中, } OP = ON \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore OD = OP \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad PD = OP \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore P \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{3}{4} \right);$$

(2) 作 $ME \perp x$ 轴于 H, 如图 3 所示:

$$\therefore \text{点 M 的坐标是 } (3, \sqrt{3}), \text{ 点 N 的坐标是 } (2, 0),$$

$$\therefore OM = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}, \text{ 直线 OM 的解析式为 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad ON = 2, \quad \angle MOH = 30^\circ,$$

分两种情况:

①如图 3 所示: $\therefore P$ 是 $\triangle MON$ 的相似点,

$$\therefore \triangle PON \sim \triangle NOM, \text{ 作 } PQ \perp x \text{ 轴于 } Q,$$

$$\therefore PO = PN, \quad OQ = \frac{1}{2}ON = 1,$$

$$\therefore P \text{ 的横坐标为 } 1,$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3} \times 1 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore P \left(1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right);$$

②如图 4 所示:

$$\text{由勾股定理得: } MN = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$\therefore P \text{ 是 } \triangle MON \text{ 的相似点},$$

$$\therefore \triangle PNM \sim \triangle NOM,$$

$$\therefore \frac{PN}{ON} = \frac{MN}{MO}, \text{ 即 } \frac{PN}{2} = \frac{2}{2\sqrt{3}},$$

$$\text{解得: } PN = \frac{2\sqrt{3}}{3},$$

$$\text{即 } P \text{ 的纵坐标为 } \frac{2\sqrt{3}}{3}, \text{ 代入 } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \text{ 得: } \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x,$$

解得: $x=2$,

$$\therefore P \left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right);$$

综上所述: $\triangle MON$ 的自相似点的坐标为 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$ 或 $\left(2, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$;

(3) 存在点 M 和点 N , 使 $\triangle MON$ 无自相似点, $M (\sqrt{3}, 3)$, $N (2\sqrt{3}, 0)$;

理由如下:

$$\therefore M (\sqrt{3}, 3), N (2\sqrt{3}, 0),$$

$$\therefore OM=2\sqrt{3}=ON, \angle MON=60^\circ,$$

$\therefore \triangle MON$ 是等边三角形,

$\therefore$ 点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部,

$$\therefore \angle PBC \neq \angle A, \angle PCB \neq \angle ABC,$$

$\therefore$ 存在点 M 和点 N , 使 $\triangle MON$ 无自相似点.

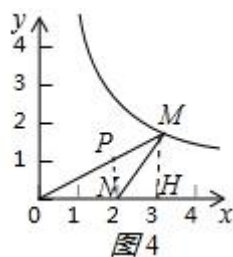


图4

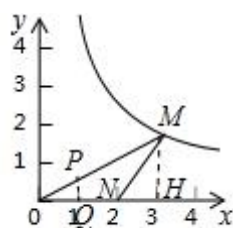


图3

