

2017 年山东省枣庄市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

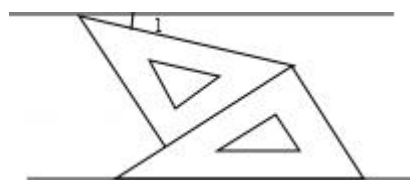
1. 下列计算，正确的是（ ）

A. $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{6}$ B. $|\frac{1}{2} - 2| = -\frac{3}{2}$ C. $\sqrt[3]{8} = 2\sqrt{2}$ D. $(\frac{1}{2})^{-1} = 2$

2. 将数字“6”旋转 180° ，得到数字“9”，将数字“9”旋转 180° ，得到数字“6”，现将数字“69”旋转 180° ，得到的数字是（ ）

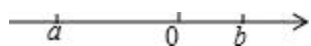
A. 96 B. 69 C. 66 D. 99

3. 如图，将一副三角板和一张对边平行的纸条按下列方式摆放，两个三角板的一直角边重合，含 30° 角的直角三角板的斜边与纸条一边重合，含 45° 角的三角板的一个顶点在纸条的另一边上，则 $\angle 1$ 的度数是（ ）



A. 15° B. 22.5° C. 30° D. 45°

4. 实数 a , b 在数轴上对应点的位置如图所示，化简 $|a| + \sqrt{(a-b)^2}$ 的结果是（ ）



A. $-2a+b$ B. $2a-b$ C. $-b$ D. b

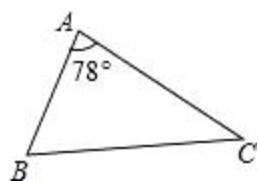
5. 如表记录了甲、乙、丙、丁四名跳高运动员最近几次选拔赛成绩的平均数与方差：

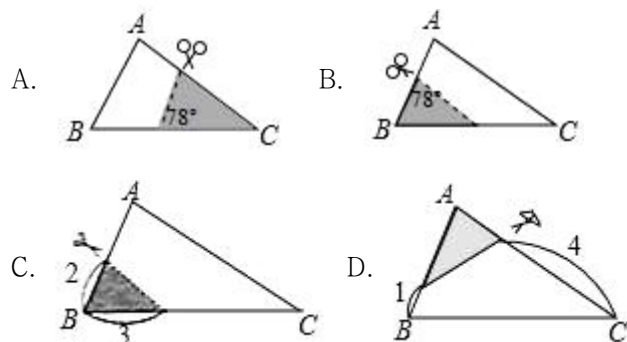
	甲	乙	丙	丁
平均数 (cm)	185	180	185	180
方差	3.6	3.6	7.4	8.1

根据表中数据，要从中选择一名成绩好且发挥稳定的运动员参加比赛，应该选择（ ）

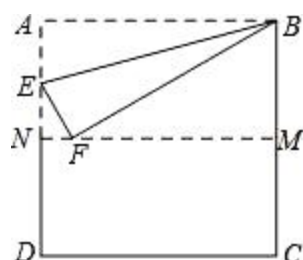
A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

6. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 78^\circ$ ， $AB = 4$ ， $AC = 6$ ，将 $\triangle ABC$ 沿图示中的虚线剪开，剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是（ ）



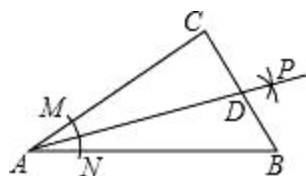


7. 如图，把正方形纸片 ABCD 沿对边中点所在的直线对折后展开，折痕为 MN，再过点 B 折叠纸片，使点 A 落在 MN 上的点 F 处，折痕为 BE. 若 AB 的长为 2，则 FM 的长为 ()



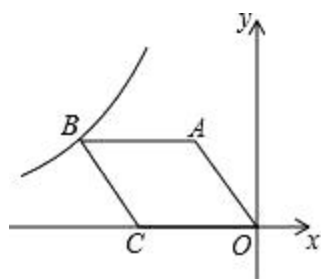
A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，以顶点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC, AB 于点 M, N，再分别以点 M, N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，作射线 AP 交边 BC 于点 D，若 $CD=4$ ， $AB=15$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积是 ()



A. 15 B. 30 C. 45 D. 60

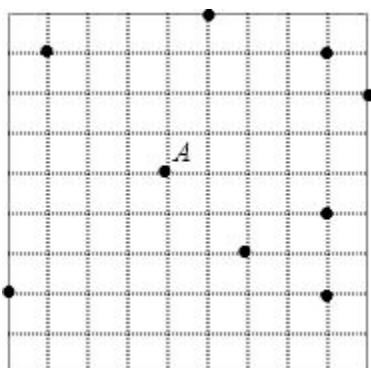
9. 如图，O 是坐标原点，菱形 OABC 的顶点 A 的坐标为 $(-3, 4)$ ，顶点 C 在 x 轴的负半轴上，函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x<0$) 的图象经过顶点 B，则 k 的值为 ()



A. -12 B. -27 C. -32 D. -36

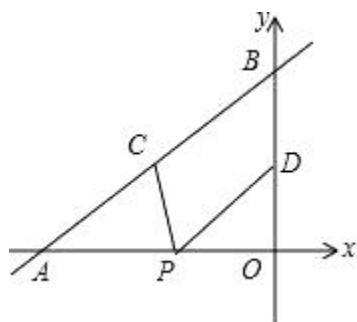
10. 如图，在网格 (每个小正方形的边长均为 1) 中选取 9 个格点 (格线的交点称为格点)，如果以 A 为圆心，r 为半径画圆，选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个在圆内，则 r 的取值范

围为 ()



- A. $2\sqrt{2} < r < \sqrt{17}$ B. $\sqrt{17} < r < 3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{17} < r < 5$ D. $5 < r < \sqrt{29}$

11. 如图, 直线 $y = \frac{2}{3}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 和点 B , 点 C 、 D 分别为线段 AB 、 OB 的中点, 点 P 为 OA 上一动点, $PC + PD$ 值最小时点 P 的坐标为 ()



- A. $(-3, 0)$ B. $(-6, 0)$ C. $(-\frac{3}{2}, 0)$ D. $(-\frac{5}{2}, 0)$

12. 已知函数 $y = ax^2 - 2ax - 1$ (a 是常数, $a \neq 0$), 下列结论正确的是 ()

- A. 当 $a = 1$ 时, 函数图象经过点 $(-1, 1)$
 B. 当 $a = -2$ 时, 函数图象与 x 轴没有交点
 C. 若 $a < 0$, 函数图象的顶点始终在 x 轴的下方
 D. 若 $a > 0$, 则当 $x \geq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

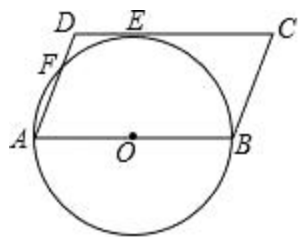
13. 化简: $\frac{x+3}{x^2-2x+1} \div \frac{x^2+3x}{(x-1)^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 - 2x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是 $\underline{\hspace{2cm}}.$

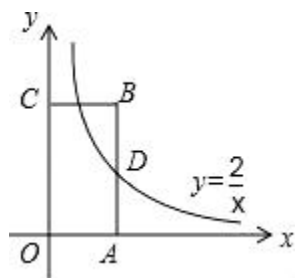
15. 已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+by=2 \\ bx+ay=3 \end{cases}$ 的解, 则 $a^2 - b^2 = \underline{\hspace{2cm}}.$

16. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AB 为 $\odot O$ 的直径, $\odot O$ 与 DC 相切于点 E , 与 AD 相交于点 F ,

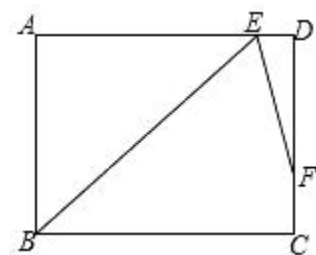
已知 $AB=12$, $\angle C=60^\circ$, 则 $\widehat{FE}$ 的长为_____.



17. 如图, 反比例函数 $y=\frac{2}{x}$ 的图象经过矩形 OABC 的边 AB 的中点 D, 则矩形 OABC 的面积为_____.



18. 在矩形 ABCD 中, $\angle B$ 的角平分线 BE 与 AD 交于点 E, $\angle BED$ 的角平分线 EF 与 DC 交于点 F, 若 $AB=9$, $DF=2FC$, 则 $BC=_____$. (结果保留根号)

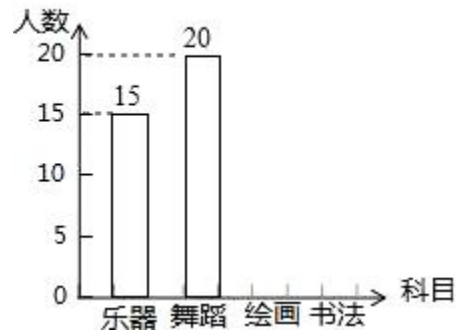


三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 60 分)

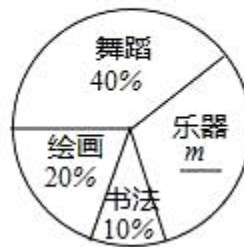
19. x 取哪些整数值时, 不等式 $5x+2>3(x-1)$ 与 $\frac{1}{2}x\leq 2-\frac{3}{2}x$ 都成立?

20. 为发展学生的核心素养，培养学生的综合能力，某学校计划开设四门选修课：乐器、舞蹈、绘画、书法，学校采取随机抽样的方法进行问卷调查（每个被调查的学生必须选择而且只能选择其中一门）。对调查结果进行整理，绘制成如下两幅不完整的统计图，请结合图中所给信息解答下列问题：

学生选修课程条形统计图



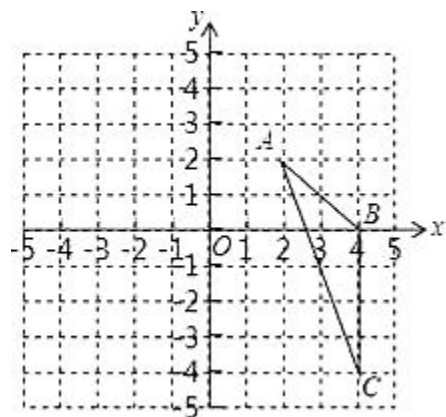
学生选修课程扇形统计图



- (1) 本次调查的学生共有_____人，在扇形统计图中， m 的值是_____；
- (2) 将条形统计图补充完整；
- (3) 在被调查的学生中，选修书法的有 2 名女同学，其余为男同学，现要从中随机抽取 2 名同学代表学校参加某社区组织的书法活动，请写出所抽取的 2 名同学恰好是 1 名男同学和 1 名女同学的概率。

21. 如图，在平面直角坐标系中，已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(2, 2)$ ， $B(4, 0)$ ， $C(4, -4)$ 。

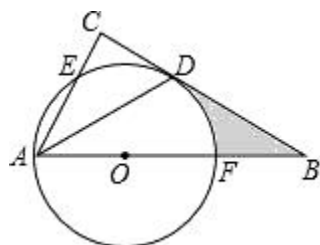
- (1) 请在图中，画出 $\triangle ABC$ 向左平移 6 个单位长度后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$ ；
- (2) 以点 O 为位似中心，将 $\triangle ABC$ 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ ，得到 $\triangle A_2B_2C_2$ ，请在图中 y 轴右侧，画出 $\triangle A_2B_2C_2$ ，并求出 $\angle A_2C_2B_2$ 的正弦值。



22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D , 点 O 在 AB 上, 以点 O 为圆心, OA 为半径的圆恰好经过点 D , 分别交 AC , AB 于点 E , F .

(1) 试判断直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 若 $BD=2\sqrt{3}$, $BF=2$, 求阴影部分的面积 (结果保留 π).



23. 我们知道, 任意一个正整数 n 都可以进行这样的分解: $n=p \times q$ (p, q 是正整数, 且 $p \leq q$), 在 n 的所有这种分解中, 如果 p, q 两因数之差的绝对值最小, 我们就称 $p \times q$ 是 n 的最佳分解. 并规定: $F(n) = \frac{p}{q}$.

例如 12 可以分解成 1×12 , 2×6 或 3×4 , 因为 $12-1 > 6-2 > 4-3$, 所以 3×4 是 12 的最佳分解, 所以 $F(12) = \frac{3}{4}$.

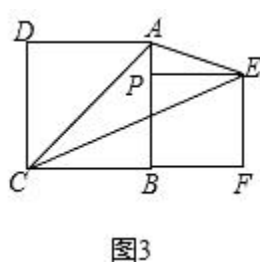
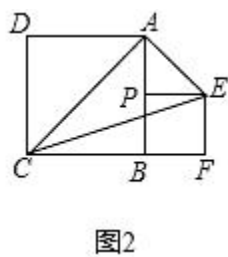
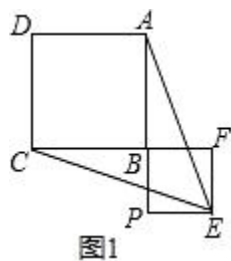
(1) 如果一个正整数 m 是另外一个正整数 n 的平方, 我们称正整数 m 是完全平方数.

求证: 对任意一个完全平方数 m , 总有 $F(m) = 1$;

(2) 如果一个两位正整数 t , $t=10x+y$ ($1 \leq x \leq y \leq 9$, x, y 为自然数), 交换其个位上的数与十位上的数得到的新数减去原来的两位正整数所得的差为 36 , 那么我们称这个数 t 为“吉祥数”, 求所有“吉祥数”;

(3) 在(2)所得“吉祥数”中, 求 $F(t)$ 的最大值.

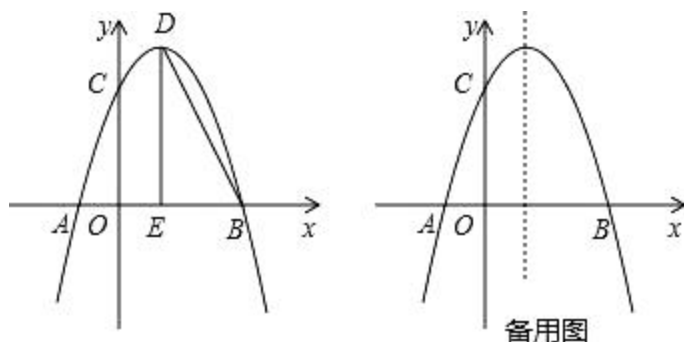
24. 已知正方形 $ABCD$, P 为射线 AB 上的一点, 以 BP 为边作正方形 $BPEF$, 使点 F 在线段 CB 的延长线上, 连接 EA , EC .



- (1) 如图 1, 若点 P 在线段 AB 的延长线上, 求证: $EA=EC$;
- (2) 如图 2, 若点 P 在线段 AB 的中点, 连接 AC , 判断 $\triangle ACE$ 的形状, 并说明理由;
- (3) 如图 3, 若点 P 在线段 AB 上, 连接 AC , 当 EP 平分 $\angle AEC$ 时, 设 $AB=a$, $BP=b$, 求 $a:b$ 及 $\angle AEC$ 的度数.

25. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B ，与 y 轴交于点 C ，点 B 坐标为 $(6, 0)$ ，点 C 坐标为 $(0, 6)$ ，点 D 是抛物线的顶点，过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 E ，连接 BD 。

- (1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标；
- (2) 点 F 是抛物线上的动点，当 $\angle FBA = \angle BDE$ 时，求点 F 的坐标；
- (3) 若点 M 是抛物线上的动点，过点 M 作 $MN \parallel x$ 轴与抛物线交于点 N ，点 P 在 x 轴上，点 Q 在坐标平面内，以线段 MN 为对角线作正方形 $MPNQ$ ，请写出点 Q 的坐标。



2017 年山东省枣庄市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 下列计算，正确的是（ ）

A. $\sqrt{8} - \sqrt{2} = \sqrt{6}$ B. $|\frac{1}{2} - 2| = -\frac{3}{2}$ C. $\sqrt[3]{8} = 2\sqrt{2}$ D. $(\frac{1}{2})^{-1} = 2$

【考点】24：立方根；1A：有理数的减法；22：算术平方根；6F：负整数指数幂.

【分析】根据立方根的概念、二次根式的加减运算法则、绝对值的性质、负整数指数幂的运算法则计算，即可判断.

【解答】解： $\sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ ，A 错误；

$|\frac{1}{2} - 2| = \frac{3}{2}$ ，B 错误；

$\sqrt[3]{8} = 2$ ，C 错误；

$(\frac{1}{2})^{-1} = 2$ ，D 正确，

故选：D.

2. 将数字“6”旋转 180° ，得到数字“9”，将数字“9”旋转 180° ，得到数字“6”，现将数字“69”旋转 180° ，得到的数字是（ ）

A. 96 B. 69 C. 66 D. 99

【考点】R1：生活中的旋转现象.

【分析】直接利用中心对称图形的性质结合 69 的特点得出答案.

【解答】解：现将数字“69”旋转 180° ，得到的数字是：69.

故选：B.

3. 如图，将一副三角板和一张对边平行的纸条按下列方式摆放，两个三角板的一直角边重合，含 30° 角的直角三角板的斜边与纸条一边重合，含 45° 角的三角板的一个顶点在纸条的另一边上，则 $\angle 1$ 的度数是（ ）



A. 15° B. 22.5° C. 30° D. 45°

【考点】JA: 平行线的性质.

【分析】过 A 点作 $AB \parallel a$, 利用平行线的性质得 $AB \parallel b$, 所以 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4 = 30^\circ$, 加上 $\angle 2 + \angle 3 = 45^\circ$, 易得 $\angle 1 = 15^\circ$.

【解答】解: 如图, 过 A 点作 $AB \parallel a$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 2,$$

$$\because a \parallel b,$$

$$\therefore AB \parallel b,$$

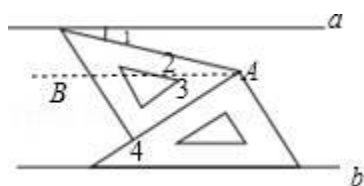
$$\therefore \angle 3 = \angle 4 = 30^\circ,$$

$$\text{而 } \angle 2 + \angle 3 = 45^\circ,$$

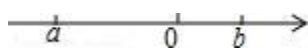
$$\therefore \angle 2 = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 15^\circ.$$

故选: A.



4. 实数 a , b 在数轴上对应点的位置如图所示, 化简 $|a| + \sqrt{(a-b)^2}$ 的结果是 ()



A. $-2a+b$ B. $2a-b$ C. $-b$ D. b

【考点】73: 二次根式的性质与化简; 29: 实数与数轴.

【分析】直接利用数轴上 a , b 的位置, 进而得出 $a < 0$, $a - b < 0$, 再利用绝对值以及二次根式的性质化简得出答案.

【解答】解: 由图可知: $a < 0$, $a - b < 0$,

$$\text{则 } |a| + \sqrt{(a-b)^2}$$

$$= -a - (a-b)$$

$$= -2a+b.$$

故选: A.

5. 如表记录了甲、乙、丙、丁四名跳高运动员最近几次选拔赛成绩的平均数与方差:

	甲	乙	丙	丁
平均数 (cm)	185	180	185	180
方差	3.6	3.6	7.4	8.1

根据表中数据, 要从中选择一名成绩好且发挥稳定的运动员参加比赛, 应该选择 ()

A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

【考点】W7: 方差; W1: 算术平均数.

【分析】首先比较平均数, 平均数相同时选择方差较小的运动员参加.

【解答】解: $\because \overline{x}_{\text{甲}} = \overline{x}_{\text{丙}} > \overline{x}_{\text{乙}} = \overline{x}_{\text{丁}}$,

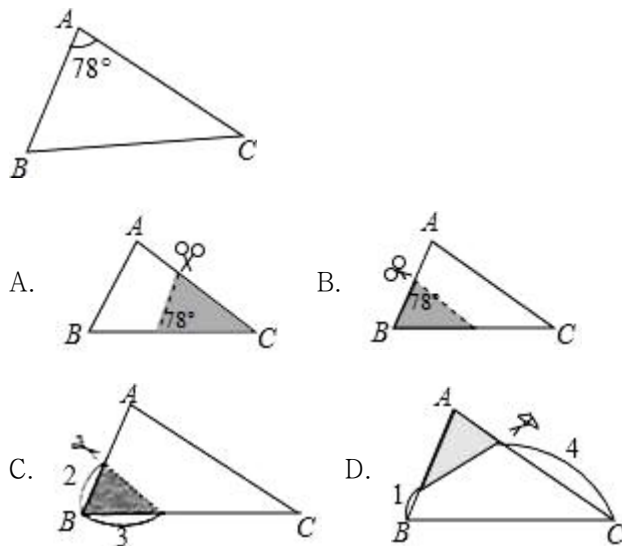
$\therefore$ 从甲和丙中选择一人参加比赛,

$\therefore S_{\text{甲}}^2 = S_{\text{乙}}^2 < S_{\text{丙}}^2 < S_{\text{丁}}^2$,

$\therefore$ 选择甲参赛,

故选: A.

6. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 78^\circ$, $AB = 4$, $AC = 6$, 将 $\triangle ABC$ 沿图示中的虚线剪开, 剪下的阴影三角形与原三角形不相似的是 ()



【考点】S8: 相似三角形的判定.

【分析】根据相似三角形的判定定理对各选项进行逐一判定即可.

【解答】解: A、阴影部分的三角形与原三角形有两个角相等, 故两三角形相似, 故本选项

错误;

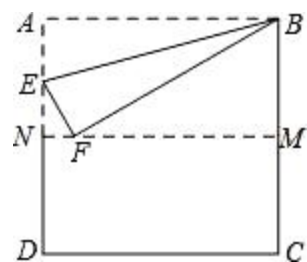
B、阴影部分的三角形与原三角形有两个角相等，故两三角形相似，故本选项错误;

C、两三角形的对应边不成比例，故两三角形不相似，故本选项正确.

D、两三角形对应边成比例且夹角相等，故两三角形相似，故本选项错误;

故选 C.

7. 如图，把正方形纸片 ABCD 沿对边中点所在的直线对折后展开，折痕为 MN，再过点 B 折叠纸片，使点 A 落在 MN 上的点 F 处，折痕为 BE. 若 AB 的长为 2，则 FM 的长为 ()



A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{2}$ D. 1

【考点】PB: 翻折变换 (折叠问题) .

【分析】根据翻折不变性， $AB=FB=2$ ， $BM=1$ ，在 $\text{Rt}\triangle BFM$ 中，可利用勾股定理求出 FM 的值.

【解答】解: $\because$ 四边形 ABCD 为正方形， $AB=2$ ，过点 B 折叠纸片，使点 A 落在 MN 上的点 F 处，

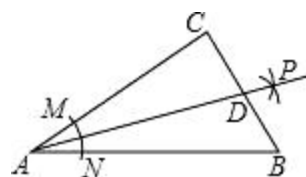
$\therefore FB=AB=2$ ， $BM=1$ ，

则在 $\text{Rt}\triangle BMF$ 中，

$$FM = \sqrt{BF^2 - BM^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3},$$

故选: B.

8. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C=90^\circ$ ，以顶点 A 为圆心，适当长为半径画弧，分别交 AC，AB 于点 M，N，再分别以点 M，N 为圆心，大于 $\frac{1}{2}MN$ 的长为半径画弧，两弧交于点 P，作射线 AP 交边 BC 于点 D，若 $CD=4$ ， $AB=15$ ，则 $\triangle ABD$ 的面积是 ()



A. 15 B. 30 C. 45 D. 60

【考点】KF：角平分线的性质.

【分析】判断出 AP 是 $\angle BAC$ 的平分线，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E，根据角平分线上的点到角的两边距离相等可得 $DE=CD$ ，然后根据三角形的面积公式列式计算即可得解.

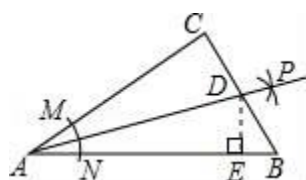
【解答】解：由题意得 AP 是 $\angle BAC$ 的平分线，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于 E，

又 $\because \angle C=90^\circ$ ，

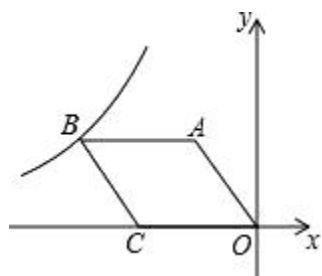
$\therefore DE=CD$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 的面积 $= \frac{1}{2} AB \cdot DE = \frac{1}{2} \times 15 \times 4 = 30$.

故选 B.



9. 如图，O 是坐标原点，菱形 OABC 的顶点 A 的坐标为 $(-3, 4)$ ，顶点 C 在 x 轴的负半轴上，函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图象经过顶点 B，则 k 的值为 ()



A. -12 B. -27 C. -32 D. -36

【考点】L8：菱形的性质；G6：反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】根据点 C 的坐标以及菱形的性质求出点 B 的坐标，然后利用待定系数法求出 k 的值即可.

【解答】解： $\because A(-3, 4)$ ，

$\therefore OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ，

$\therefore$ 四边形 OABC 是菱形，

$\therefore AO = CB = OC = AB = 5$ ，

则点 B 的横坐标为 $-3 - 5 = -8$ ，

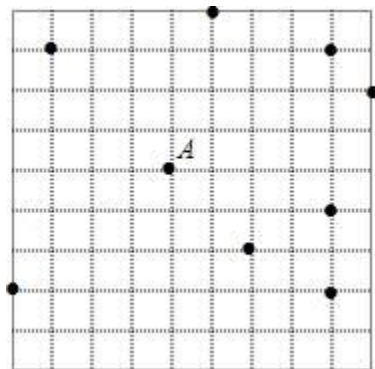
故 B 的坐标为: $(-8, 4)$,

将点 B 的坐标代入 $y=\frac{k}{x}$ 得, $4=\frac{k}{-8}$,

解得: $k=-32$.

故选 C.

10. 如图, 在网格 (每个小正方形的边长均为 1) 中选取 9 个格点 (格线的交点称为格点), 如果以 A 为圆心, r 为半径画圆, 选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个在圆内, 则 r 的取值范围为 ()



A. $2\sqrt{2} < r < \sqrt{17}$ B. $\sqrt{17} < r < 3\sqrt{2}$ C. $\sqrt{17} < r < 5$ D. $5 < r < \sqrt{29}$

【考点】 M8: 点与圆的位置关系; KQ: 勾股定理.

【分析】 利用勾股定理求出各格点到点 A 的距离, 结合点与圆的位置关系, 即可得出结论.

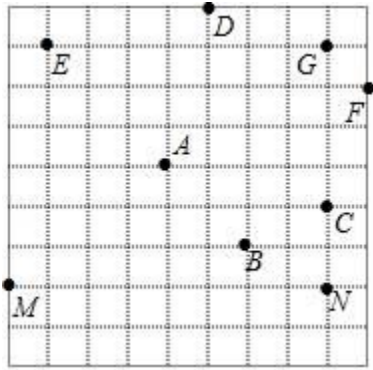
【解答】 解: 给各点标上字母, 如图所示.

$$AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}, AC=AD=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}, AE=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}, AF=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29},$$

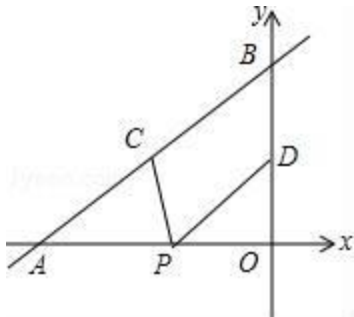
$$AG=AM=AN=\sqrt{4^2+3^2}=5,$$

$\therefore \sqrt{17} < r < 3\sqrt{2}$ 时, 以 A 为圆心, r 为半径画圆, 选取的格点中除点 A 外恰好有 3 个在圆内.

故选 B.



11. 如图，直线 $y = -\frac{2}{3}x + 4$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 和点 B ，点 C 、 D 分别为线段 AB 、 OB 的中点，点 P 为 OA 上一动点， $PC + PD$ 值最小时点 P 的坐标为 ()



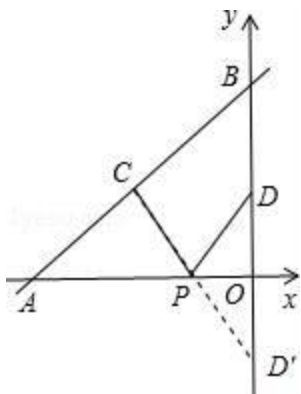
- A. $(-3, 0)$ B. $(-6, 0)$ C. $(-\frac{3}{2}, 0)$ D. $(-\frac{5}{2}, 0)$

【考点】 F8: 一次函数图象上点的坐标特征; PA: 轴对称 - 最短路线问题.

【分析】 (方法一) 根据一次函数解析式求出点 A 、 B 的坐标，再由中点坐标公式求出点 C 、 D 的坐标，根据对称的性质找出点 D' 的坐标，结合点 C 、 D' 的坐标求出直线 CD' 的解析式，令 $y=0$ 即可求出 x 的值，从而得出点 P 的坐标.

(方法二) 根据一次函数解析式求出点 A 、 B 的坐标，再由中点坐标公式求出点 C 、 D 的坐标，根据对称的性质找出点 D' 的坐标，根据三角形中位线定理即可得出点 P 为线段 CD' 的中点，由此即可得出点 P 的坐标.

【解答】 解: (方法一) 作点 D 关于 x 轴的对称点 D' ，连接 CD' 交 x 轴于点 P ，此时 $PC + PD$ 值最小，如图所示.



令 $y = \frac{2}{3}x + 4$ 中 $x = 0$, 则 $y = 4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 4)$;

令 $y = \frac{2}{3}x + 4$ 中 $y = 0$, 则 $\frac{2}{3}x + 4 = 0$, 解得: $x = -6$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-6, 0)$.

$\because$ 点 C、D 分别为线段 AB、OB 的中点,

$\therefore$ 点 C $(-3, 2)$, 点 D $(0, 2)$.

$\because$ 点 D' 和点 D 关于 x 轴对称,

$\therefore$ 点 D' 的坐标为 $(0, -2)$.

设直线 CD' 的解析式为 $y = kx + b$,

$\because$ 直线 CD' 过点 C $(-3, 2)$, D' $(0, -2)$,

$\therefore$ 有 $\begin{cases} 2 = -3k + b \\ -2 = b \end{cases}$, 解得: $\begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ b = -2 \end{cases}$,

$\therefore$ 直线 CD' 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x - 2$.

令 $y = -\frac{4}{3}x - 2$ 中 $y = 0$, 则 $0 = -\frac{4}{3}x - 2$, 解得: $x = -\frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-\frac{3}{2}, 0)$.

故选 C.

(方法二) 连接 CD, 作点 D 关于 x 轴的对称点 D' , 连接 CD' 交 x 轴于点 P, 此时 PC+PD 值最小, 如图所示.

令 $y = \frac{2}{3}x + 4$ 中 $x = 0$, 则 $y = 4$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(0, 4)$;

令 $y = \frac{2}{3}x + 4$ 中 $y = 0$, 则 $\frac{2}{3}x + 4 = 0$, 解得: $x = -6$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-6, 0)$.

$\because$ 点 C、D 分别为线段 AB、OB 的中点,

$\therefore$ 点 C $(-3, 2)$, 点 D $(0, 2)$, $CD \parallel x$ 轴,

$\because$ 点 D' 和点 D 关于 x 轴对称,

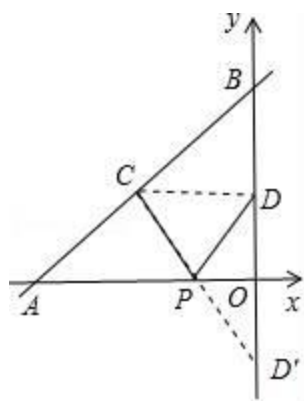
$\therefore$ 点 D' 的坐标为 $(0, -2)$, 点 O 为线段 DD' 的中点.

又 $\because OP \parallel CD$,

$\therefore$ 点 P 为线段 CD' 的中点,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(-\frac{3}{2}, 0)$.

故选 C.



12. 已知函数 $y = ax^2 - 2ax - 1$ (a 是常数, $a \neq 0$), 下列结论正确的是 ()

- A. 当 $a = 1$ 时, 函数图象经过点 $(-1, 1)$
- B. 当 $a = -2$ 时, 函数图象与 x 轴没有交点
- C. 若 $a < 0$, 函数图象的顶点始终在 x 轴的下方
- D. 若 $a > 0$, 则当 $x \geq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大

【考点】 HA: 抛物线与 x 轴的交点; H4: 二次函数图象与系数的关系.

【分析】 A、将 $a = 1$ 代入原函数解析式, 令 $x = -1$ 求出 y 值, 由此得出 A 选项不符合题意;
B、将 $a = 2$ 代入原函数解析式, 令 $y = 0$, 根据根的判别式 $\Delta = 8 > 0$, 可得出当 $a = -2$ 时, 函数图象与 x 轴有两个不同的交点, 即 B 选项不符合题意; C、利用配方法找出二次函数图象的顶点坐标, 令其纵坐标小于零, 可得出 a 的取值范围, 由此可得出 C 选项不符合题意; D、利用配方法找出二次函数图象的对称轴, 结合二次函数的性质, 即可得出 D 选项符合题意. 此

题得解.

【解答】解：A、当 $a=1$ 时，函数解析式为 $y=x^2-2x-1$,

当 $x=-1$ 时, $y=1+2-1=2$,

$\therefore$ 当 $a=1$ 时, 函数图象经过点 $(-1, 2)$,

$\therefore$ A 选项不符合题意;

B、当 $a=-2$ 时, 函数解析式为 $y=-2x^2+4x-1$,

令 $y=-2x^2+4x-1=0$, 则 $\Delta=4^2-4\times(-2)\times(-1)=8>0$,

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时, 函数图象与 x 轴有两个不同的交点,

$\therefore$ B 选项不符合题意;

C、 $\because y=ax^2-2ax-1=a(x-1)^2-1-a$,

$\therefore$ 二次函数图象的顶点坐标为 $(1, -1-a)$,

当 $-1-a<0$ 时, 有 $a>-1$,

$\therefore$ C 选项不符合题意;

D、 $\because y=ax^2-2ax-1=a(x-1)^2-1-a$,

$\therefore$ 二次函数图象的对称轴为 $x=1$.

若 $a>0$, 则当 $x\geq 1$ 时, y 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ D 选项符合题意.

故选 D.

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 4 分, 共 24 分)

13. 化简: $\frac{x+3}{x^2-2x+1} \div \frac{x^2+3x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x}$.

【考点】6A: 分式的乘除法.

【分析】根据分式的乘除法的法则进行计算即可.

【解答】解: $\frac{x+3}{x^2-2x+1} \div \frac{x^2+3x}{(x-1)^2} = \frac{x+3}{(x-1)^2} \cdot \frac{(x-1)^2}{x(x+3)} = \frac{1}{x}$,

故答案为: $\frac{1}{x}$.

14. 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2-2x-1=0$ 有两个不相等的实数根, 则 a 的取值范围是 $a > -\frac{1}{2}$

> -1 且 $a \neq 0$.

【考点】AA：根的判别式.

【分析】根据一元二次方程的定义和判别式的意义得到 $a \neq 0$ 且 $\Delta = (-2)^2 - 4a(-1) > 0$, 然后求出两不等式的公共部分即可.

【解答】解：根据题意得 $a \neq 0$ 且 $\Delta = (-2)^2 - 4a(-1) > 0$,
解得 $a > -1$ 且 $a \neq 0$.

故答案为 $a > -1$ 且 $a \neq 0$.

15. 已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+by=2 \\ bx+ay=3 \end{cases}$ 的解, 则 $a^2 - b^2 = \underline{1}$.

【考点】97：二元一次方程组的解.

【分析】根据 $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+by=2 \\ bx+ay=3 \end{cases}$ 的解, 可以求得 $a+b$ 和 $a-b$ 的值, 从而可以解答本题.

【解答】解： $\because \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} ax+by=2 \\ bx+ay=3 \end{cases}$ 的解,
 $\therefore \begin{cases} 2a-3b=2 & \text{①} \\ 2b-3a=3 & \text{②} \end{cases}$,

解得, ① - ②, 得

$$a - b = -\frac{1}{5},$$

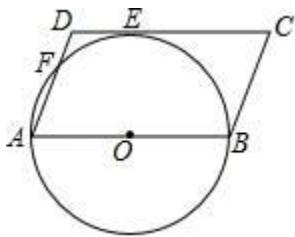
① + ②, 得

$$a + b = -5,$$

$$\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = (-5) \times \left(-\frac{1}{5}\right) = 1,$$

故答案为：1.

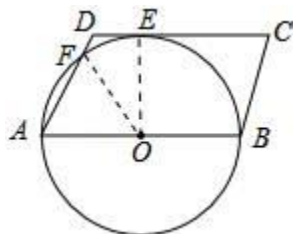
16. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AB 为 $\odot O$ 的直径, $\odot O$ 与 DC 相切于点 E , 与 AD 相交于点 F , 已知 $AB=12$, $\angle C=60^\circ$, 则 $\widehat{FE}$ 的长为 $\underline{\pi}$.



【考点】MC：切线的性质；L5：平行四边形的性质；MN：弧长的计算.

【分析】先连接 OE、OF，再求出圆心角 $\angle EOF$ 的度数，然后根据弧长公式即可求出 $\widehat{FE}$ 的长.

【解答】解：如图连接 OE、OF，



$\because$ CD 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore OE \perp CD$ ，

$\therefore \angle OED = 90^\circ$ ，

$\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形， $\angle C = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle A = \angle C = 60^\circ$ ， $\angle D = 120^\circ$ ，

$\because OA = OF$ ，

$\therefore \angle A = \angle OFA = 60^\circ$ ，

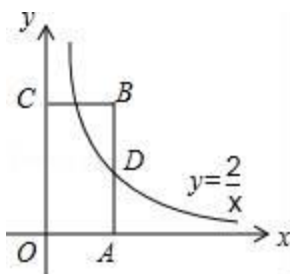
$\therefore \angle DFO = 120^\circ$ ，

$\therefore \angle EOF = 360^\circ - \angle D - \angle DFO - \angle DEO = 30^\circ$ ，

$$\widehat{EF} \text{ 的长} = \frac{30 \cdot \pi \cdot 6}{180} = \pi.$$

故答案为： π .

17. 如图，反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象经过矩形 OABC 的边 AB 的中点 D，则矩形 OABC 的面积为 4 .



【考点】 G5：反比例函数系数 k 的几何意义.

【分析】可设 D 点坐标为 (x, y) ，则可表示出 B 点坐标，从而可表示出矩形 OABC 的面积，利用 $xy = 2$ 可求得答案.

【解答】解：

设 $D(x, y)$ ，

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象经过点 D ，

$\therefore xy = 2$ ，

$\because D$ 为 AB 的中点，

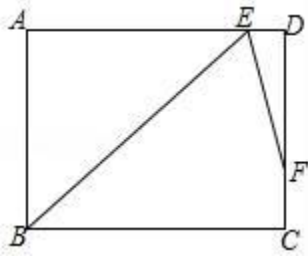
$\therefore B(x, 2y)$ ，

$\therefore OA = x, OC = 2y$ ，

$\therefore S_{\text{矩形} OABC} = OA \cdot OC = x \cdot 2y = 2xy = 2 \times 2 = 4$ ，

故答案为：4.

18. 在矩形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 的角平分线 BE 与 AD 交于点 E ， $\angle BED$ 的角平分线 EF 与 DC 交于点 F ，若 $AB = 9$ ， $DF = 2FC$ ，则 $BC = \underline{6\sqrt{2} + 3}$. (结果保留根号)



【考点】LB：矩形的性质；KI：等腰三角形的判定；S9：相似三角形的判定与性质.

【分析】先延长 EF 和 BC ，交于点 G ，再根据条件可以判断三角形 ABE 为等腰直角三角形，并求得斜边 BE 的长，然后根据条件判断三角形 BEG 为等腰三角形，最后根据 $\triangle EFD \sim \triangle GFC$ 得出 CG 与 DE 的倍数关系，并根据 $BG = BC + CG$ 进行计算即可.

【解答】解：延长 EF 和 BC ，交于点 G

$\because$ 矩形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 的角平分线 BE 与 AD 交于点 E ，

$\therefore \angle ABE = \angle AEB = 45^\circ$ ，

$\therefore AB = AE = 9$ ，

$\therefore$ 直角三角形 ABE 中， $BE = \sqrt{9^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}$ ，

又 $\because \angle BED$ 的角平分线 EF 与 DC 交于点 F ，

$\therefore \angle BEG = \angle DEF$

$\because AD \parallel BC$

$$\therefore \angle G = \angle DEF$$

$$\therefore \angle BEG = \angle G$$

$$\therefore BG = BE = 9\sqrt{2}$$

由 $\angle G = \angle DEF$, $\angle EFD = \angle GFC$, 可得 $\triangle EFD \sim \triangle GFC$

$$\therefore \frac{CG}{DE} = \frac{CF}{DF} = \frac{CF}{2CF} = \frac{1}{2}$$

设 $CG = x$, $DE = 2x$, 则 $AD = 9 + 2x = BC$

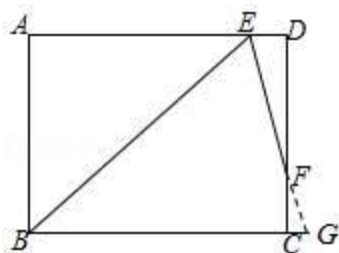
$$\therefore BG = BC + CG$$

$$\therefore 9\sqrt{2} = 9 + 2x + x$$

$$\text{解得 } x = 3\sqrt{2} - 3$$

$$\therefore BC = 9 + 2(3\sqrt{2} - 3) = 6\sqrt{2} + 3$$

故答案为: $6\sqrt{2} + 3$



三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 60 分)

19. x 取哪些整数值时, 不等式 $5x + 2 > 3(x - 1)$ 与 $\frac{1}{2}x \leq 2 - \frac{3}{2}x$ 都成立?

【考点】 C7: 一元一次不等式的整数解.

【分析】 根据题意分别求出每个不等式解集, 根据口诀: 大小小大中间找, 确定两不等式解集的公共部分, 即可得整数值.

【解答】 解: 根据题意解不等式组
$$\begin{cases} 5x + 2 > 3(x - 1) & \text{①} \\ \frac{1}{2}x \leq 2 - \frac{3}{2}x & \text{②} \end{cases}$$

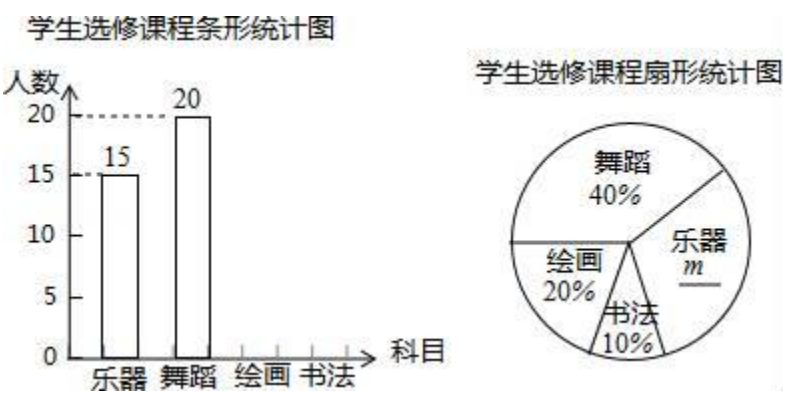
解不等式①, 得: $x > -\frac{5}{2}$,

解不等式②, 得: $x \leq 1$,

$$\therefore -\frac{5}{2} < x \leq 1,$$

故满足条件的整数有 -2 、 -1 、 0 、 1 .

20. 为发展学生的核心素养，培养学生的综合能力，某学校计划开设四门选修课：乐器、舞蹈、绘画、书法，学校采取随机抽样的方法进行问卷调查（每个被调查的学生必须选择而且只能选择其中一门）。对调查结果进行整理，绘制成如下两幅不完整的统计图，请结合图中所给信息解答下列问题：



- (1) 本次调查的学生共有 50 人，在扇形统计图中，m 的值是 30%；

(2) 将条形统计图补充完整；

(3) 在被调查的学生中，选修书法的有 2 名女同学，其余为男同学，现要从中随机抽取 2 名同学代表学校参加某社区组织的书法活动，请写出所抽取的 2 名同学恰好是 1 名男同学和 1 名女同学的概率。

【考点】X6：列表法与树状图法；VB：扇形统计图；VC：条形统计图。

【分析】（1）由舞蹈的人数除以占的百分比求出调查学生总数，确定出扇形统计图中 m 的值；

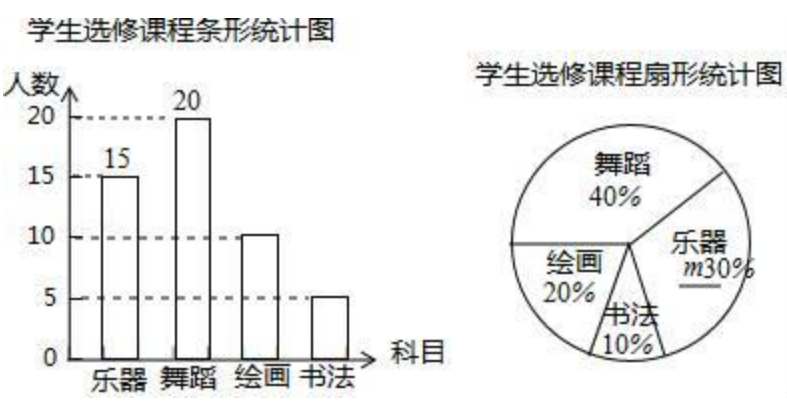
（2）求出绘画与书法的学生数，补全条形统计图即可；

（3）列表得出所有等可能的情况数，找出恰好为一男一女的情况数，即可求出所求概率。

【解答】解：（1） $20 \div 40\% = 50$ （人）， $15 \div 50 = 30\%$ ；

故答案为：50；30%；

（2） $50 \times 20\% = 10$ （人）， $50 \times 10\% = 5$ （人），如图所示：



(3) $\because 5 - 2 = 3$ (名) ,

$\therefore$ 选修书法的 5 名同学中, 有 3 名男同学, 2 名女同学,

	男 1	男 2	男 3	女 1	女 2
男 1	— — —	男 2 男 1	男 3 男 1	女 1 男 1	女 2 男 1
男 2	(男 1 男 2)	— — —	男 3 男 2	女 1 男 2	女 2 男 2
男 3	(男 1 男 3)	男 2 男 3	— — —	女 1 男 3	女 2 男 3
女 1	(男 1, 女 1)	男 2 女 1	男 3 女 1	— — —	女 2 女 1
女 2	(男 1 女 2)	男 2 女 2	男 3 女 2	女 1 女 2	— — —

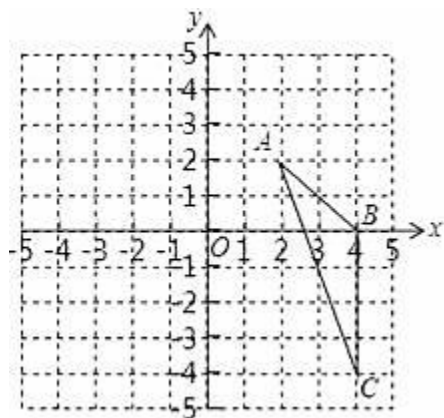
所有等可能的情况有 20 种, 其中抽取的 2 名同学恰好是 1 名男同学和 1 名女同学的情况有 12 种,

$$\text{则 } P(\text{一男一女}) = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

21. 如图, 在平面直角坐标系中, 已知 $\triangle ABC$ 三个顶点的坐标分别是 $A(2, 2)$, $B(4, 0)$, $C(4, -4)$.

(1) 请在图中, 画出 $\triangle ABC$ 向左平移 6 个单位长度后得到的 $\triangle A_1B_1C_1$;

(2) 以点 O 为位似中心, 将 $\triangle ABC$ 缩小为原来的 $\frac{1}{2}$, 得到 $\triangle A_2B_2C_2$, 请在图中 y 轴右侧, 画出 $\triangle A_2B_2C_2$, 并求出 $\angle A_2C_2B_2$ 的正弦值.



【考点】 SD: 作图 – 位似变换; Q4: 作图 – 平移变换; T7: 解直角三角形.

【分析】 (1) 直接利用平移的性质得出对应点位置进而得出答案;

(2) 利用位似图形的性质得出对应点位置, 再利用锐角三角函数关系得出答案.

【解答】 解: (1) 如图所示: $\triangle A_1B_1C_1$, 即为所求;

(2) 如图所示: $\triangle A_2B_2C_2$, 即为所求,

由图形可知, $\angle A_2C_2B_2 = \angle ACB$,

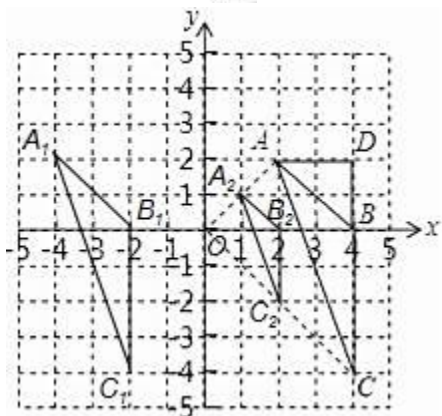
过点 A 作 $AD \perp BC$ 交 BC 的延长线于点 D,

由 A (2, 2), C (4, -4), B (4, 0), 易得 D (4, 2),

故 $AD=2$, $CD=6$, $AC=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$,

$$\therefore \sin \angle ACB = \frac{AD}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

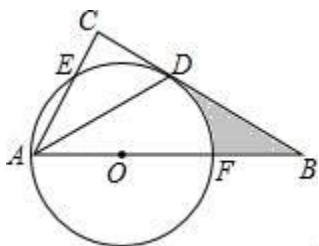
$$\text{即 } \sin \angle A_2C_2B_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$



22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 D, 点 O 在 AB 上, 以点 O 为圆心, OA 为半径的圆恰好经过点 D, 分别交 AC, AB 于点 E, F.

(1) 试判断直线 BC 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 若 $BD=2\sqrt{3}$, $BF=2$, 求阴影部分的面积 (结果保留 π).



【考点】 MB: 直线与圆的位置关系; MO: 扇形面积的计算.

【分析】 (1) 连接 OD, 证明 $OD \parallel AC$, 即可证得 $\angle ODB=90^\circ$, 从而证得 BC 是圆的切线;

(2) 在直角三角形 OBD 中, 设 $OF=OD=x$, 利用勾股定理列出关于 x 的方程, 求出方程的解得到 x 的值, 即为圆的半径, 求出圆心角的度数, 直角三角形 ODB 的面积减去扇形 DOF 面积即可确定出阴影部分面积.

【解答】 解: (1) BC 与 $\odot O$ 相切.

证明：连接 OD.

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线,

$\therefore \angle BAD = \angle CAD$.

又 $\because OD = OA$,

$\therefore \angle OAD = \angle ODA$.

$\therefore \angle CAD = \angle ODA$.

$\therefore OD \parallel AC$.

$\therefore \angle ODB = \angle C = 90^\circ$, 即 $OD \perp BC$.

又 $\because BC$ 过半径 OD 的外端点 D,

$\therefore BC$ 与 $\odot O$ 相切.

(2) 设 $OF = OD = x$, 则 $OB = OF + BF = x + 2$,

根据勾股定理得: $OB^2 = OD^2 + BD^2$, 即 $(x+2)^2 = x^2 + 12$,

解得: $x = 2$, 即 $OD = OF = 2$,

$\therefore OB = 2 + 2 = 4$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ODB$ 中, $OD = \frac{1}{2}OB$,

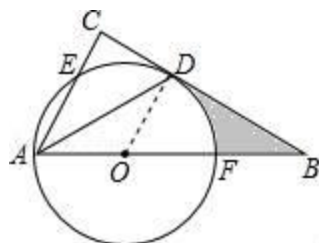
$\therefore \angle B = 30^\circ$,

$\therefore \angle DOB = 60^\circ$,

$\therefore S_{\text{扇形} AOB} = \frac{60\pi \times 4^2}{360} = \frac{2\pi}{3}$,

则阴影部分的面积为 $S_{\triangle ODB} - S_{\text{扇形} DOF} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.

故阴影部分的面积为 $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.



23. 我们知道, 任意一个正整数 n 都可以进行这样的分解: $n = p \times q$ (p, q 是正整数, 且 $p \leq q$), 在 n 的所有这种分解中, 如果 p, q 两因数之差的绝对值最小, 我们就称 $p \times q$ 是 n

的最佳分解. 并规定: $F(n) = \frac{p}{q}$.

例如 12 可以分解成 1×12 , 2×6 或 3×4 , 因为 $12 - 1 > 6 - 2 > 4 - 3$, 所以 3×4 是 12 的最佳分解, 所以 $F(12) = \frac{3}{4}$.

(1) 如果一个正整数 m 是另外一个正整数 n 的平方, 我们称正整数 m 是完全平方数.

求证: 对任意一个完全平方数 m , 总有 $F(m) = 1$;

(2) 如果一个两位正整数 t , $t = 10x + y$ ($1 \leq x \leq y \leq 9$, x, y 为自然数), 交换其个位上的数与十位上的数得到的新数减去原来的两位正整数所得的差为 36, 那么我们称这个数 t 为“吉祥数”, 求所有“吉祥数”;

(3) 在 (2) 所得“吉祥数”中, 求 $F(t)$ 的最大值.

【考点】 59: 因式分解的应用.

【分析】 (1) 对任意一个完全平方数 m , 设 $m = n^2$ (n 为正整数), 找出 m 的最佳分解, 确定出 $F(m)$ 的值即可;

(2) 设交换 t 的个位上数与十位上的数得到的新数为 t' , 则 $t' = 10y + x$, 根据“吉祥数”的定义确定出 x 与 y 的关系式, 进而求出所求即可;

(3) 利用“吉祥数”的定义分别求出各自的值, 进而确定出 $F(t)$ 的最大值即可.

【解答】 解: (1) 证明: 对任意一个完全平方数 m , 设 $m = n^2$ (n 为正整数),

$$\because n - n = 0,$$

$\therefore n \times n$ 是 m 的最佳分解,

$\therefore$ 对任意一个完全平方数 m , 总有 $F(m) = \frac{n}{n} = 1$;

(2) 设交换 t 的个位上数与十位上的数得到的新数为 t' , 则 $t' = 10y + x$,

$\because t$ 是“吉祥数”,

$$\therefore t' - t = (10y + x) - (10x + y) = 9(y - x) = 36,$$

$$\therefore y = x + 4,$$

$\because 1 \leq x \leq y \leq 9$, x, y 为自然数,

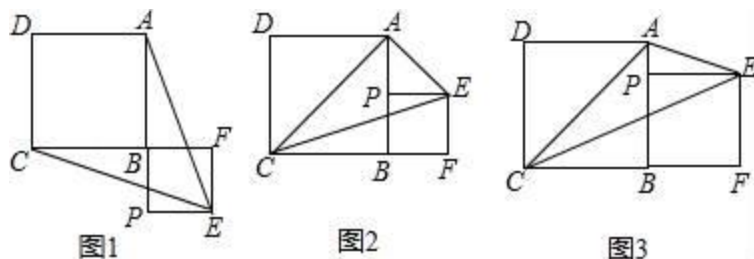
$\therefore$ 满足“吉祥数”的有: 15, 26, 37, 48, 59;

$$(3) F(15) = \frac{3}{5}, F(26) = \frac{2}{13}, F(37) = \frac{1}{37}, F(48) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, F(59) = \frac{1}{59},$$

$$\because \frac{3}{4} > \frac{3}{5} > \frac{2}{13} > \frac{1}{37} > \frac{1}{59},$$

∴所有“吉祥数”中，F(t) 的最大值为 $\frac{3}{4}$.

24. 已知正方形 ABCD，P 为射线 AB 上的一点，以 BP 为边作正方形 BPEF，使点 F 在线段 CB 的延长线上，连接 EA，EC.



- (1) 如图 1，若点 P 在线段 AB 的延长线上，求证：EA=EC；
- (2) 如图 2，若点 P 在线段 AB 的中点，连接 AC，判断△ACE 的形状，并说明理由；
- (3) 如图 3，若点 P 在线段 AB 上，连接 AC，当 EP 平分∠AEC 时，设 AB=a，BP=b，求 a:b 及∠AEC 的度数.

【考点】 LO: 四边形综合题.

【分析】 (1) 根据正方形的性质证明△APE≌△CFE，可得结论；

(2) 分别证明∠PAE=45° 和∠BAC=45°，则∠CAE=90°，即△ACE 是直角三角形；

(3) 分别计算 PG 和 BG 的长，利用平行线分线段成比例定理列比例式得： $\frac{PE}{BC} = \frac{PG}{GB}$ ，即 $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{2b-a}$ ，

解得：a=√2b，得出 a 与 b 的比，再计算 GH 和 BG 的长，根据角平分线的逆定理得：∠HCG=∠BCG，由平行线的内错角得：∠AEC=∠ACB=45°.

【解答】 证明：(1) ∵ 四边形 ABCD 和四边形 BPEF 是正方形，

∴ AB=BC，BP=BF，

∴ AP=CF，

在△APE 和△CFE 中，

$$\therefore \begin{cases} AP=CF \\ \angle P=\angle F, \\ PE=EF \end{cases}$$

∴ △APE≌△CFE，

∴ EA=EC；

(2) $\triangle ACE$ 是直角三角形, 理由是:

如图 2, $\because P$ 为 AB 的中点,

$$\therefore PA=PB,$$

$$\therefore PB=PE,$$

$$\therefore PA=PE,$$

$$\therefore \angle PAE=45^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle BAC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE=90^\circ, \text{ 即 } \triangle ACE \text{ 是直角三角形};$$

(3) 设 CE 交 AB 于 G ,

$$\because EP \text{ 平分 } \angle AEC, EP \perp AG,$$

$$\therefore AP=PG=a-b, BG=a-(2a-2b)=2b-a,$$

$$\because PE \parallel CF,$$

$$\therefore \frac{PE}{BC} = \frac{PG}{GB}, \text{ 即 } \frac{b}{a} = \frac{a-b}{2b-a},$$

$$\text{解得: } a=\sqrt{2}b,$$

$$\therefore a:b=\sqrt{2}:1,$$

作 $GH \perp AC$ 于 H ,

$$\because \angle CAB=45^\circ,$$

$$\therefore HG=\frac{\sqrt{2}}{2}AG=\frac{\sqrt{2}}{2}(2\sqrt{2}b-2b)=(2-\sqrt{2})b,$$

$$\text{又} \because BG=2b-a=(2-\sqrt{2})b,$$

$$\therefore GH=GB, GH \perp AC, GB \perp BC,$$

$$\therefore \angle HCG=\angle BCG,$$

$$\because PE \parallel CF,$$

$$\therefore \angle PEG=\angle BCG,$$

$$\therefore \angle AEC=\angle ACB=45^\circ.$$

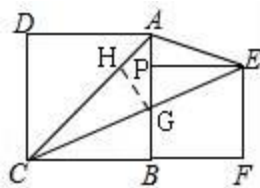
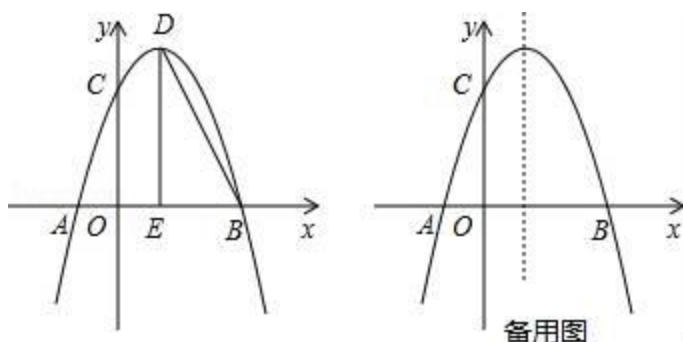


图3

25. 如图，抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于点 A 和点 B，与 y 轴交于点 C，点 B 坐标为 (6, 0)，点 C 坐标为 (0, 6)，点 D 是抛物线的顶点，过点 D 作 x 轴的垂线，垂足为 E，连接 BD.



- (1) 求抛物线的解析式及点 D 的坐标；
- (2) 点 F 是抛物线上的动点，当 $\angle FBA = \angle BDE$ 时，求点 F 的坐标；
- (3) 若点 M 是抛物线上的动点，过点 M 作 $MN \parallel x$ 轴与抛物线交于点 N，点 P 在 x 轴上，点 Q 在坐标平面内，以线段 MN 为对角线作正方形 MPNQ，请写出点 Q 的坐标.

【考点】 HF：二次函数综合题.

【分析】 (1) 由 B、C 的坐标，利用待定系数法可求得抛物线解析式，再求其顶点 D 即可；

(2) 过 F 作 $FG \perp x$ 轴于点 G，可设出 F 点坐标，利用 $\triangle FBG \sim \triangle BDE$ ，由相似三角形的性质可得到关于 F 点坐标的方程，可求得 F 点的坐标；

(3) 由于 M、N 两点关于对称轴对称，可知点 P 为对称轴与 x 轴的交点，点 Q 在对称轴上，可设出 Q 点的坐标，则可表示出 M 的坐标，代入抛物线解析式可求得 Q 点的坐标.

【解答】 解：

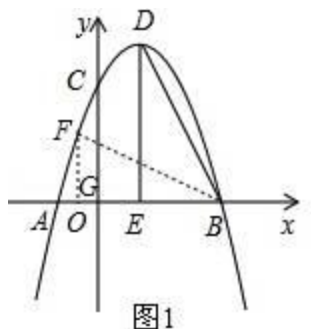
(1) 把 B、C 两点坐标代入抛物线解析式可得 $\begin{cases} -18+6b+c=0 \\ c=6 \end{cases}$ ，解得 $\begin{cases} b=2 \\ c=6 \end{cases}$ ，

$\therefore$ 抛物线解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ ，

$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6 = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 8$ ，

∴ D (2, 8) ;

(2) 如图 1, 过 F 作 $FG \perp x$ 轴于点 G,



设 $F(x, -\frac{1}{2}x^2+2x+6)$, 则 $FG = |-\frac{1}{2}x^2+2x+6|$,

∵ $\angle FBA = \angle BDE$, $\angle FGB = \angle BED = 90^\circ$,

∴ $\triangle FBG \sim \triangle BDE$,

$$\therefore \frac{FG}{BG} = \frac{BE}{DE},$$

∵ B (6, 0), D (2, 8),

∴ E (2, 0), BE=4, DE=8, OB=6,

∴ BG=6-x,

$$\therefore \frac{|-\frac{1}{2}x^2+2x+6|}{6-x} = \frac{4}{8},$$

当点 F 在 x 轴上方时, 有 $\frac{-\frac{1}{2}x^2+2x+6}{6-x} = \frac{1}{2}$, 解得 $x = -1$ 或 $x = 6$ (舍去), 此时 F 点的坐标为 $(-1, \frac{7}{2})$;

当点 F 在 x 轴下方时, 有 $\frac{-\frac{1}{2}x^2+2x+6}{6-x} = -\frac{1}{2}$, 解得 $x = -3$ 或 $x = 6$ (舍去), 此时 F 点的坐标为 $(-3, -\frac{9}{2})$;

综上所述 F 点的坐标为 $(-1, \frac{7}{2})$ 或 $(-3, -\frac{9}{2})$;

(3) 如图 2, 设对称轴 MN、PQ 交于点 O',

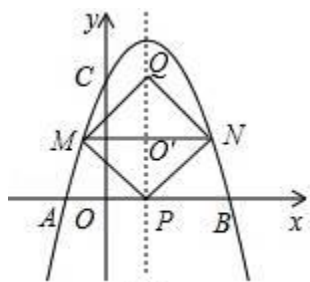


图2

∵ 点 M、N 关于抛物线对称轴对称，且四边形 MPNQ 为正方形，

∴ 点 P 为抛物线对称轴与 x 轴的交点，点 Q 在抛物线的对称轴上，

设 Q (2, 2n) ， 则 M 坐标为 (2 - n, n) ，

∵ 点 M 在抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$ 的图象上，

∴ $n = -\frac{1}{2}(2 - n)^2 + 2(2 - n) + 6$ ，解得 $n = -1 + \sqrt{17}$ 或 $n = -1 - \sqrt{17}$ ，

∴ 满足条件的点 Q 有两个，其坐标分别为 (2, $-2 + 2\sqrt{17}$) 或 (2, $-2 - 2\sqrt{17}$) 。

2017 年 6 月 15 日