

2016 年山东省济南市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 15 个小题，每小题 3 分，共 45 分）

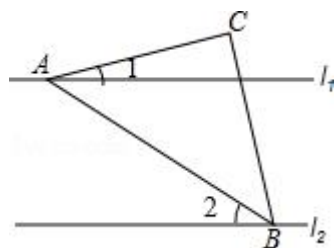
1. (3 分) 5 的相反数是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. 5 C. $-\frac{1}{5}$ D. -5

2. (3 分) 随着高铁的发展，预计 2020 年济南西客站客流量将达到 2150 万人，数字 2150 用科学记数法表示为 ()

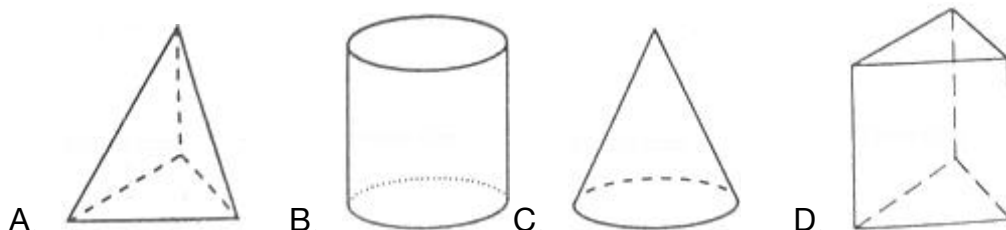
- A. 0.215×10^4 B. 2.15×10^3 C. 2.15×10^4 D. 21.5×10^2

3. (3 分) 如图，直线 $l_1 \parallel l_2$ ，等腰直角 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A、B 分别落在直线 l_1 、 l_2 上， $\angle ACB = 90^\circ$ ，若 $\angle 1 = 15^\circ$ ，则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 35° B. 30° C. 25° D. 20°

4. (3 分) 如图，以下给出的几何体中，其主视图是矩形，俯视图是三角形的是 ()



5. (3 分) 下列运算正确的是 ()

- A. $a^2 + a = 2a^3$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ C. $(-2a^3)^2 = 4a^6$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

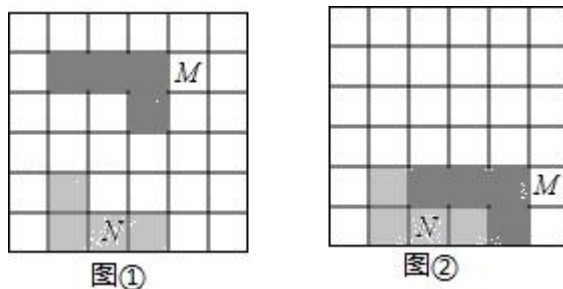
6. (3 分) 京剧脸谱、剪纸等图案蕴含着简洁美对称美，下面选取的图片中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



7. (3分) 化简 $\frac{2}{x^2-1} \div \frac{1}{x-1}$ 的结果是 ()

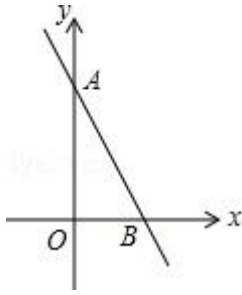
- A. $\frac{2}{x+1}$ B. $\frac{2}{x}$ C. $\frac{2}{x-1}$ D. $2(x+1)$

8. (3分) 如图，在 6×6 方格中有两个涂有阴影的图形 M、N，①中的图形 M 平移后位置如②所示，以下对图形 M 的平移方法叙述正确的是 ()



- A. 向右平移 2 个单位，向下平移 3 个单位
- B. 向右平移 1 个单位，向下平移 3 个单位
- C. 向右平移 1 个单位，向下平移 4 个单位
- D. 向右平移 2 个单位，向下平移 4 个单位

9. (3分) 如图，若一次函数 $y = -2x + b$ 的图象交 y 轴于点 A (0, 3)，则不等式 $-2x + b > 0$ 的解集为 ()



- A. $x > \frac{3}{2}$ B. $x > 3$ C. $x < \frac{3}{2}$ D. $x < 3$

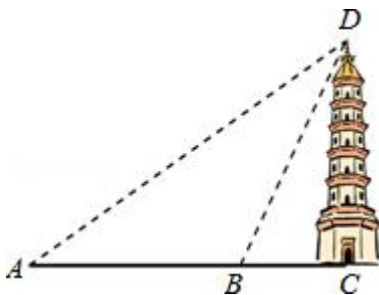
10. (3分) 某学校在八年级开设了数学史、诗词赏析、陶艺三门校本课程，若小波和小睿两名同学每人随机选择其中一门课程，则小波和小睿选到同一课程的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{9}$

11. (3分) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 ()

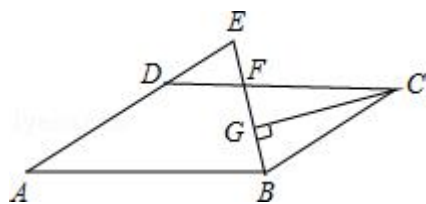
- A. $k < 1$ B. $k \leq 1$ C. $k > -1$ D. $k > 1$

12. (3分) 济南大明湖畔的“超然楼”被称作“江北第一楼”，某校数学社团的同学对超然楼的高度进行了测量，如图，他们在 A 处仰望塔顶，测得仰角为 30° ，再往楼的方向前进 60m 至 B 处，测得仰角为 60° ，若学生的身高忽略不计， $\sqrt{3} \approx 1.7$ ，结果精确到 1m ，则该楼的高度 CD 为 ()



- A. 47m B. 51m C. 53m D. 54m

13. (3分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB=12$ ， $AD=8$ ， $\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 F ，交 AD 的延长线于点 E ， $CG \perp BE$ ，垂足为 G ，若 $EF=2$ ，则线段 CG 的长为 ()

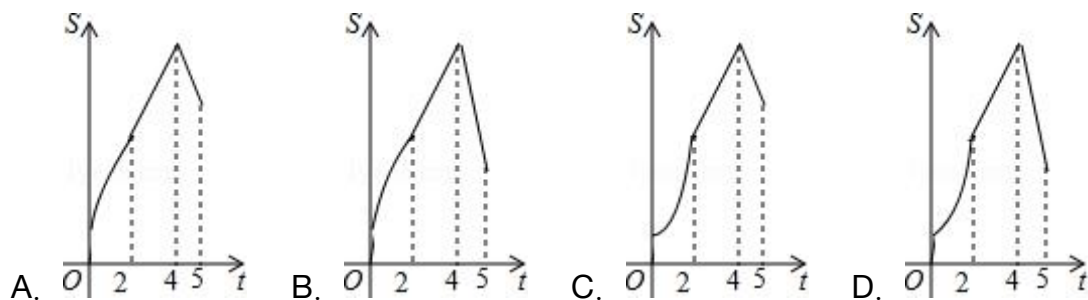
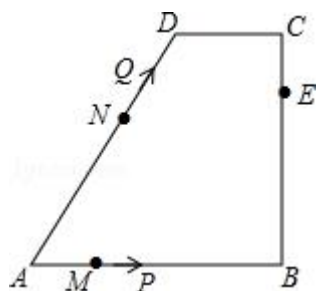


- A. $\frac{15}{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{15}$ D. $\sqrt{55}$

14. (3分) 定义：点 $A(x, y)$ 为平面直角坐标系内的点，若满足 $x=y$ ，则把点 A 叫做“平衡点”. 例如： $M(1, 1)$ ， $N(-2, -2)$ 都是“平衡点”. 当 $-1 \leq x \leq 3$ 时，直线 $y=2x+m$ 上有“平衡点”，则 m 的取值范围是 ()

- A. $0 \leq m \leq 1$ B. $-3 \leq m \leq 1$ C. $-3 \leq m \leq 3$ D. $-1 \leq m \leq 0$

15. (3分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AB \parallel CD$ ， $\angle B=90^\circ$ ， $AB=AD=5$ ， $BC=4$ ， M 、 N 、 E 分别是 AB 、 AD 、 CB 上的点， $AM=CE=1$ ， $AN=3$ ， 点 P 从点 M 出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿折线 $MB-BE$ 向点 E 运动，同时点 Q 从点 N 出发，以相同的速度沿折线 $ND-DC-CE$ 向点 E 运动，当其中一个点到达后，另一个点也停止运动. 设 $\triangle APQ$ 的面积为 S ， 运动时间为 t 秒，则 S 与 t 函数关系的大致图象为 ()



二、填空题 (本大题共 6 个小题，每小题 3 分，共 18 分)

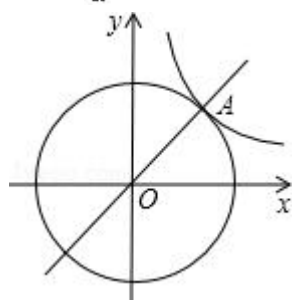
16. (3分) 计算: $2^{-1} + \sqrt{(-2)^2} =$ _____.

17. (3分) 分解因式: $a^2 - 4b^2 =$ _____.

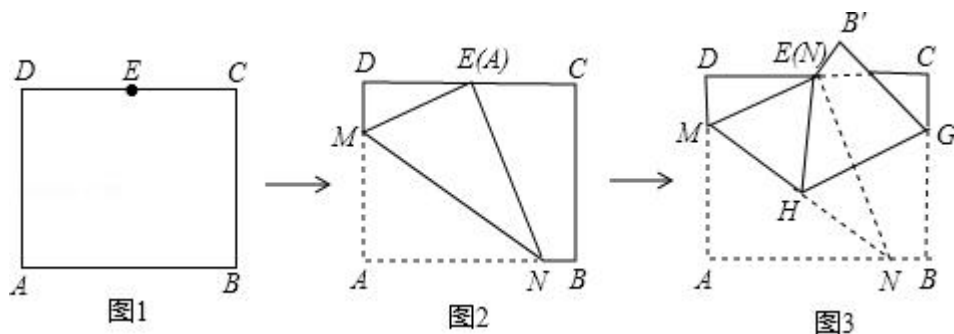
18. (3分) 某学习小组在“世界读书日”这天统计了本组 5 名同学在上学期阅读课外书籍的册数, 数据是 18, x , 15, 16, 13, 若这组数据的平均数为 16, 则这组数据的中位数是_____.

19. (3分) 若代数式 $\frac{6}{x+2}$ 与 $\frac{4}{x}$ 的值相等, 则 $x =$ _____.

20. (3分) 如图, 半径为 2 的 $\odot O$ 在第一象限与直线 $y=x$ 交于点 A, 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$) 的图象过点 A, 则 $k =$ _____.



21. (3分) 如图 1, 在矩形纸片 ABCD 中, $AB = 8\sqrt{3}$, $AD = 10$, 点 E 是 CD 中点, 将这张纸片依次折叠两次; 第一次折叠纸片使点 A 与点 E 重合, 如图 2, 折痕为 MN, 连接 ME、NE; 第二次折叠纸片使点 N 与点 E 重合, 如图 3, 点 B 落到 B' 处, 折痕为 HG, 连接 HE, 则 $\tan \angle EHG =$ _____.



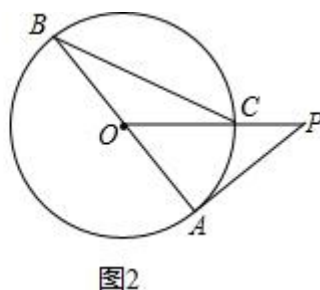
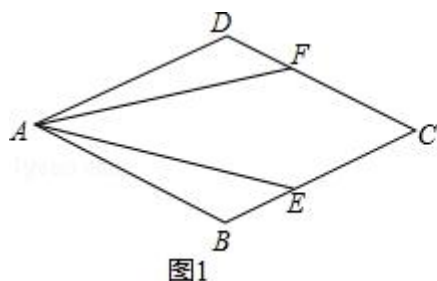
三、解答题 (本大题共 7 个小题, 共 57 分)

22. (7分) (1) 先化简再求值: $a(1 - 4a) + (2a+1)(2a-1)$, 其中 $a=4$.

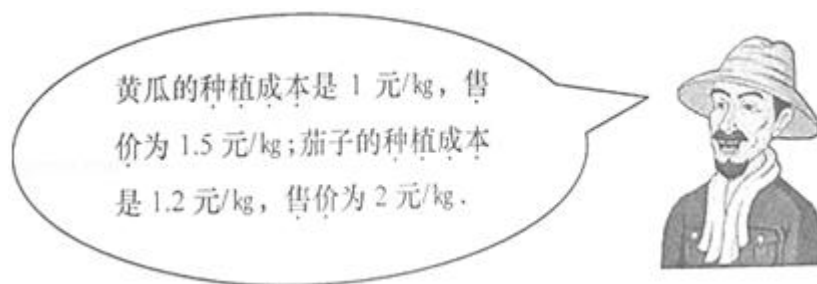
(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x+1 \leq 7, & \text{①} \\ 3+2x \geq 1+x, & \text{②} \end{cases}$$

23. (7 分) (1) 如图 1, 在菱形 $ABCD$ 中, $CE=CF$, 求证: $AE=AF$.

(2) 如图 2, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 与 $\odot O$ 相切于点 A , OP 与 $\odot O$ 相交于点 C , 连接 CB , $\angle OPA=40^\circ$, 求 $\angle ABC$ 的度数.



24. (8 分) 学生在素质教育基地进行社会实践活动, 帮助农民伯伯采摘了黄瓜和茄子共 40kg, 了解到这些蔬菜的种植成本共 42 元, 还了解到如下信息:



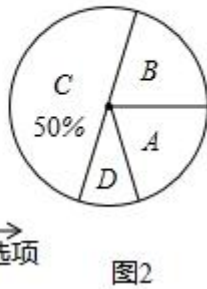
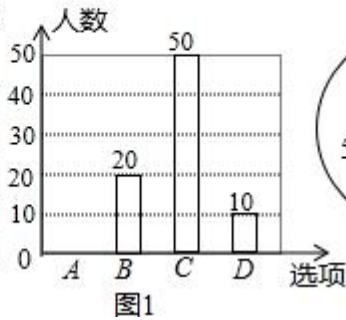
- (1) 请问采摘的黄瓜和茄子各多少千克?
- (2) 这些采摘的黄瓜和茄子可赚多少元?

25. (8 分) 随着教育信息化的发展, 学生的学习方式日益增多, 教师为了指导学生有效利用网络进行学习, 对学生进行了随机问卷调查 (问卷调查表如图所示), 并用调查结果绘制了图 1、图 2 两幅统计图 (均不完整), 请根据统计图解答以下问题:

- (1) 本次接受问卷调查的学生共有_____人, 在扇形统计图中“D”选项所占的百分比为_____;
- (2) 扇形统计图中, “B”选项所对应扇形圆心角为_____度;
- (3) 请补全条形统计图;
- (4) 若该校共有 1200 名学生, 请您估计该校学生课外利用网络学习的时间在“A”选项的有多少人?

课外利用网络学习的时间问卷调查表
您好! 这是一份关于您平均每周课外利用网络学习时间的调查表, 请在表格中选择一项符合您学习时间的选择, 在其后空格内打“√”, 非常感谢您的合作。

选项	学习时间 t (h)	
A	$0 < t \leq 2$	
B	$2 < t \leq 2.5$	
C	$2.5 < t \leq 3$	
D	$t > 3$	



26. (9 分) 如图 1, $\square OABC$ 的边 OC 在 x 轴的正半轴上, $OC=5$, 反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ ($x>0$) 的图象经过点 A (1, 4).

- (1) 求反比例函数的关系式和点 B 的坐标;

(2) 如图 2, 过 BC 的中点 D 作 $DP \parallel x$ 轴交反比例函数图象于点 P , 连接 AP 、 OP .

①求 $\triangle AOP$ 的面积;

②在 $\square OABC$ 的边上是否存在点 M , 使得 $\triangle POM$ 是以 PO 为斜边的直角三角形?

若存在, 请求出所有符合条件的点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

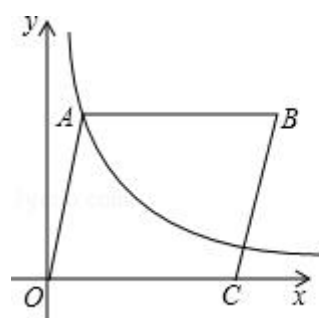


图1

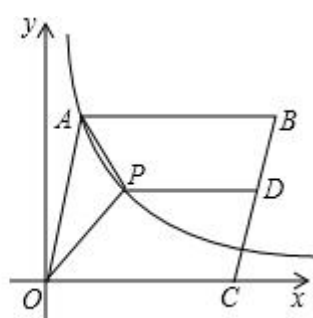


图2

27. (9 分) 在学习了图形的旋转知识后, 数学兴趣小组的同学们又进一步对图

形旋转前后的线段之间、角之间的关系进行了探究.

(一) 尝试探究

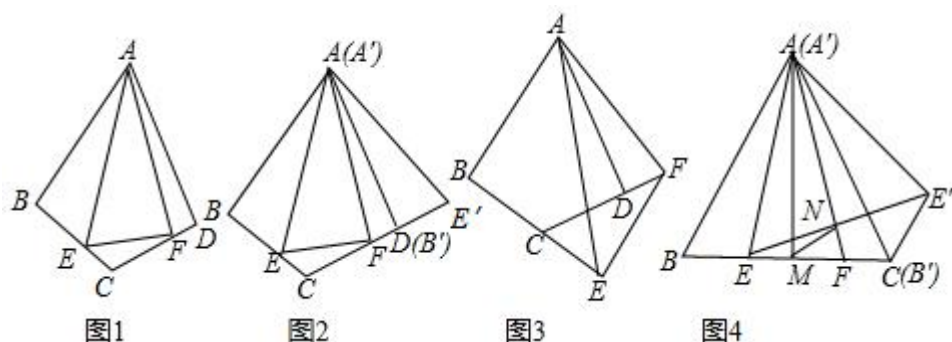
如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $\angle BAD=60^\circ$, $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$, 点 E 、 F 分别在线段 BC 、 CD 上, $\angle EAF=30^\circ$, 连接 EF .

(1) 如图 2, 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 后得到 $\triangle A'B'E'$ ($A'B'$ 与 AD 重合), 请直接写出 $\angle E'AF=$ _____度, 线段 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系为_____.

(2) 如图 3, 当点 E 、 F 分别在线段 BC 、 CD 的延长线上时, 其他条件不变, 请探究线段 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系, 并说明理由.

(二) 拓展延伸

如图 4, 在等边 $\triangle ABC$ 中, E 、 F 是边 BC 上的两点, $\angle EAF=30^\circ$, $BE=1$, 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle A'B'E'$ ($A'B'$ 与 AC 重合), 连接 EE' , AF 与 EE' 交于点 N , 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 连接 MN , 求线段 MN 的长度.



28. (9分) 如图1, 抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(4, 0)$, 与 y 轴交于点 B , 在 x 轴上有一动点 $E(m, 0)$ ($0 < m < 4$), 过点 E 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 N , 交抛物线于点 P , 过点 P 作 $PM \perp AB$ 于点 M .

(1) 求 a 的值和直线 AB 的函数表达式;

(2) 设 $\triangle PMN$ 的周长为 C_1 , $\triangle AEN$ 的周长为 C_2 , 若 $\frac{C_1}{C_2} = \frac{6}{5}$, 求 m 的值;

(3) 如图2, 在 (2) 条件下, 将线段 OE 绕点 O 逆时针旋转得到 OE' , 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 连接 $E'A$ 、 $E'B$, 求 $E'A + \frac{2}{3}E'B$ 的最小值.

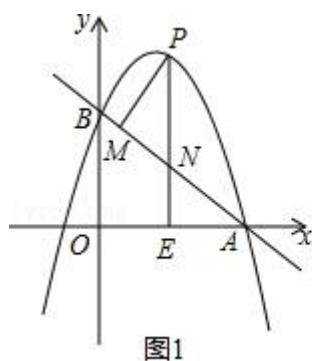


图1

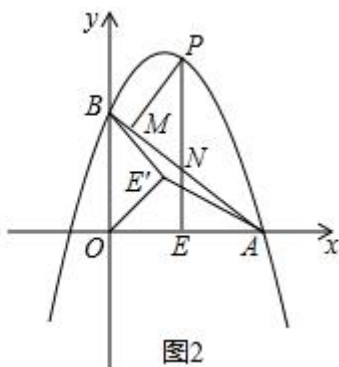


图2

2016 年山东省济南市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 15 个小题，每小题 3 分，共 45 分）

1. (3 分) 5 的相反数是 ()

A. $\frac{1}{5}$ B. 5 C. $-\frac{1}{5}$ D. -5

【分析】根据相反数的概念解答即可.

【解答】解：根据相反数的定义有：5 的相反数是 -5.

故选：D.

【点评】本题考查了相反数的意义，一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号；一个正数的相反数是负数，一个负数的相反数是正数，0 的相反数是 0.

2. (3 分) 随着高铁的发展，预计 2020 年济南西客站客流量将达到 2150 万人，数字 2150 用科学记数法表示为 ()

A. 0.215×10^4 B. 2.15×10^3 C. 2.15×10^4 D. 21.5×10^2

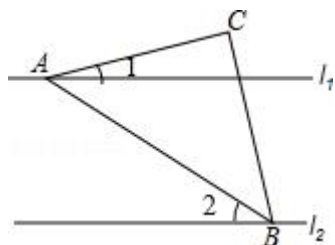
【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解： $2150 = 2.15 \times 10^3$,

故选：B.

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3分) 如图, 直线 $l_1 \parallel l_2$, 等腰直角 $\triangle ABC$ 的两个顶点 A 、 B 分别落在直线 l_1 、 l_2 上, $\angle ACB=90^\circ$, 若 $\angle 1=15^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



A. 35° B. 30° C. 25° D. 20°

【分析】 根据等腰直角三角形的性质可得 $\angle CAB=45^\circ$, 根据平行线的性质可得 $\angle 2=\angle 3$, 进而可得答案.

【解答】 解: $\because \triangle ABC$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle CAB=45^\circ,$$

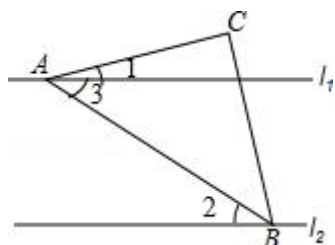
$$\because l_1 \parallel l_2,$$

$$\therefore \angle 2=\angle 3,$$

$$\because \angle 1=15^\circ,$$

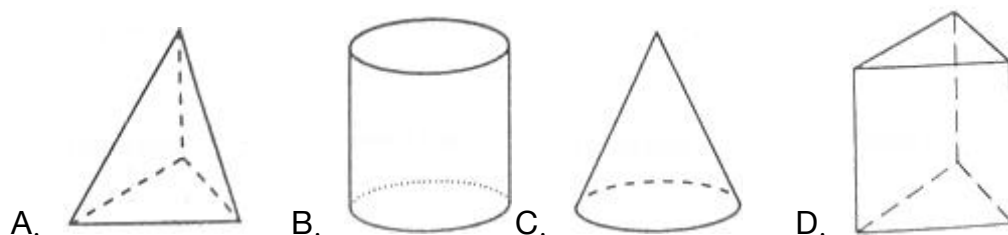
$$\therefore \angle 2=45^\circ - 15^\circ=30^\circ,$$

故选: B.



【点评】 此题主要考查了平行线的性质, 关键是掌握两直线平行, 内错角相等.

4. (3分) 如图, 以下给出的几何体中, 其主视图是矩形, 俯视图是三角形的是 ()



【分析】直接利用主视图以及俯视图的观察角度不同分别得出几何体的视图进而得出答案.

【解答】解：A、三棱锥的主视图是三角形，俯视图也是三角形，故此选项错误；
 B、圆柱的主视图是矩形，俯视图是圆，故此选项错误；
 C、圆锥的主视图是三角形，俯视图是圆，故此选项错误；
 D、三棱柱的主视图是矩形，俯视图是三角形，故此选项正确；
 故选：D.

【点评】此题主要考查了由三视图判断几何体，正确把握观察角度是解题关键.

5. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $a^2 + a = 2a^3$ B. $a^2 \cdot a^3 = a^6$ C. $(-2a^3)^2 = 4a^6$ D. $a^6 \div a^2 = a^3$

【分析】根据合并同类项、同底数幂的乘法、幂的乘方与积的乘方以及同底数幂的除法法则进行解答.

【解答】解：A、 a^2 与 a 不是同类项，不能合并，故本选项错误；
 B、原式 $= a^{2+3} = a^5$ ，故本选项错误；
 C、原式 $= (-2)^2 \cdot a^3 \times^2 = 4a^6$ ，故本选项正确；
 D、原式 $= a^{6-2} = a^4$ ，故本选项错误；
 故选：C.

【点评】本题综合考查了合并同类项、同底数幂的乘法、幂的乘方与积的乘方以及同底数幂的除法，熟练掌握运算性质和法则是解题的关键.

6. (3分) 京剧脸谱、剪纸等图案蕴含着简洁美对称美，下面选取的图片中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念进行判断.

【解答】解: A 是轴对称图形, 故错误;

B 既不是轴对称图形也不是中心对称图形, 故错误;

C 是中心对称图形, 故错误;

D 既是轴对称图形又是中心对称图形, 故正确;

故选: D.

【点评】此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. (1) 如果一个图形沿着一条直线对折后两部分完全重合, 这样的图形叫做轴对称图形, 这条直线叫做对称轴.

(2) 如果一个图形绕某一点旋转 180° 后能够与自身重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形, 这个点叫做对称中心.

7. (3分) 化简 $\frac{2}{x^2-1} \div \frac{1}{x-1}$ 的结果是 ()

A. $\frac{2}{x+1}$ B. $\frac{2}{x}$ C. $\frac{2}{x-1}$ D. $2(x+1)$

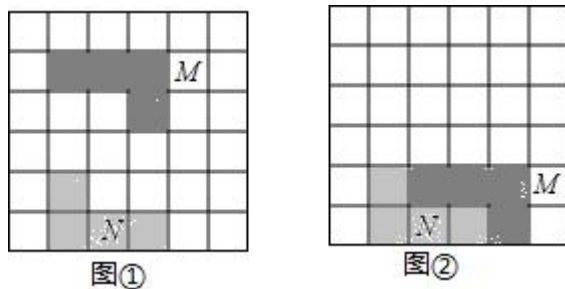
【分析】原式利用除法法则变形, 约分即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= \frac{2}{(x+1)(x-1)} \cdot (x-1) = \frac{2}{x+1}$,

故选 A

【点评】 此题考查了分式的乘除法，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

8. (3 分) 如图，在 6×6 方格中有两个涂有阴影的图形 M、N，①中的图形 M 平移后位置如②所示，以下对图形 M 的平移方法叙述正确的是 ()



- A. 向右平移 2 个单位，向下平移 3 个单位
- B. 向右平移 1 个单位，向下平移 3 个单位
- C. 向右平移 1 个单位，向下平移 4 个单位
- D. 向右平移 2 个单位，向下平移 4 个单位

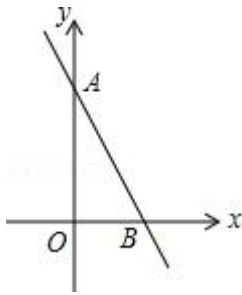
【分析】 根据平移前后图形 M 中某一个对应顶点的位置变化情况进行判断即可.

【解答】 解：根据图形 M 平移前后对应点的位置变化可知，需要向右平移 1 个单位，向下平移 3 个单位.

故选 (B)

【点评】 本题主要考查了图形的平移，平移由平移方向和平移距离决定，新图形中的每一点，都是由原图形中的某一点移动后得到的，这两个点是对应点.

9. (3 分) 如图，若一次函数 $y = -2x + b$ 的图象交 y 轴于点 A (0, 3)，则不等式 $-2x + b > 0$ 的解集为 ()



- A. $x > \frac{3}{2}$ B. $x > 3$ C. $x < \frac{3}{2}$ D. $x < 3$

【分析】 根据点 A 的坐标找出 b 值，令一次函数解析式中 $y=0$ 求出 x 值，从而找出点 B 的坐标，观察函数图象，找出在 x 轴上方的函数图象，由此即可得出结论.

【解答】 解： $\because$ 一次函数 $y = -2x + b$ 的图象交 y 轴于点 A (0, 3),

$$\therefore b = 3,$$

令 $y = -2x + 3$ 中 $y = 0$, 则 $-2x + 3 = 0$, 解得: $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore$ 点 B $(\frac{3}{2}, 0)$.

观察函数图象, 发现:

当 $x < \frac{3}{2}$ 时, 一次函数图象在 x 轴上方,

$\therefore$ 不等式 $-2x + b > 0$ 的解集为 $x < \frac{3}{2}$.

故选 C.

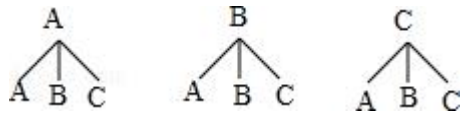
【点评】 本题考查了一次函数与一元一次不等式, 解题的关键是找出交点 B 的坐标. 本题属于基础题, 难度不大, 解决该题型题目时, 根据函数图象的上下位置关系解不等式是关键.

10. (3 分) 某学校在八年级开设了数学史、诗词赏析、陶艺三门校本课程, 若小波和小睿两名同学每人随机选择其中一门课程, 则小波和小睿选到同一课程的概率是 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{9}$

【分析】先画树状图（数学史、诗词赏析、陶艺三门校本课程分别用 A、B、C 表示）展示所有 9 种可能的结果数，再找出小波和小睿选到同一课程的结果数，然后根据概率公式求解.

【解答】解：画树状图为：（数学史、诗词赏析、陶艺三门校本课程分别用 A、B、C 表示）



共有 9 种可能的结果数，其中小波和小睿选到同一课程的结果数为 3，

所以小波和小睿选到同一课程的概率 $= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

故选 B.

【点评】本题考查了列表法与树状图法：通过列表法或树状图法展示所有等可能的结果求出 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后根据概率公式求出事件 A 或 B 的概率.

11. (3 分) 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，则 k 的取值范围是 ()

A. $k < 1$ B. $k \leq 1$ C. $k > -1$ D. $k > 1$

【分析】当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根，据此求出 k 的取值范围即可.

【解答】解： $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 2x + k = 0$ 有两个不相等的实数根，

$$\therefore (-2)^2 - 4 \times 1 \times k > 0,$$

$$\therefore 4 - 4k > 0,$$

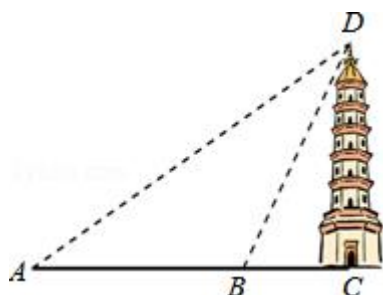
解得 $k < 1$,

$\therefore k$ 的取值范围是： $k < 1$.

故选：A.

【点评】此题主要考查了利用一元二次方程根的判别式 ($\Delta=b^2-4ac$) 判断方程的根的情况，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：当 $\Delta>0$ 时，方程有两个不相等的两个实数根.

12. (3 分) 济南大明湖畔的“超然楼”被称作“江北第一楼”，某校数学社团的同学对超然楼的高度进行了测量，如图，他们在 A 处仰望塔顶，测得仰角为 30° ，再往楼的方向前进 60m 至 B 处，测得仰角为 60° ，若学生的身高忽略不计， $\sqrt{3}\approx 1.7$ ，结果精确到 1m，则该楼的高度 CD 为 ()



A. 47m B. 51m C. 53m D. 54m

【分析】由题意易得： $\angle A=30^\circ$ ， $\angle DBC=60^\circ$ ， $DC\perp AC$ ，即可证得 $\triangle ABD$ 是等腰三角形，然后利用三角函数，求得答案.

【解答】解：根据题意得： $\angle A=30^\circ$ ， $\angle DBC=60^\circ$ ， $DC\perp AC$ ，

$$\therefore \angle ADB = \angle DBC - \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB = \angle A = 30^\circ,$$

$$\therefore BD = AB = 60\text{m},$$

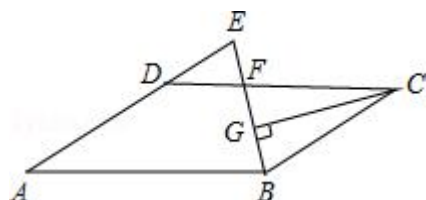
$$\therefore CD = BD \cdot \sin 60^\circ = 60 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 30\sqrt{3} \approx 51 \text{ (m)}.$$

故选 B.

【点评】此题考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题. 注意证得 $\triangle ABD$ 是

等腰三角形，利用特殊角的三角函数值求解是关键.

13. (3分) 如图，在 $\square ABCD$ 中， $AB=12$ ， $AD=8$ ， $\angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 F ，交 AD 的延长线于点 E ， $CG \perp BE$ ，垂足为 G ，若 $EF=2$ ，则线段 CG 的长为
- ()



- A. $\frac{15}{2}$ B. $4\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{15}$ D. $\sqrt{55}$

【分析】先由平行四边形的性质和角平分线的定义，判断出 $\angle CBE = \angle CFB = \angle ABE = \angle E$ ，从而得到 $CF = BC = 8$ ， $AE = AB = 12$ ，再用平行线分线段成比例定理求出 BE ，然后用等腰三角形的三线合一求出 BG ，最后用勾股定理即可.

【解答】解： $\because \angle ABC$ 的平分线交 CD 于点 F ，

$$\therefore \angle ABE = \angle CBE,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形，

$$\therefore DC \parallel AB,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle CFB = \angle ABE = \angle E,$$

$$\therefore CF = BC = AD = 8, \quad AE = AB = 12,$$

$$\therefore AD = 8,$$

$$\therefore DE = 4,$$

$$\therefore DC \parallel AB,$$

$$\therefore \frac{DE}{AE} = \frac{EF}{EB},$$

$$\therefore \frac{4}{12} = \frac{2}{EB},$$

$$\therefore EB=6,$$

$$\therefore CF=CB, \quad CG \perp BF,$$

$$\therefore BG=\frac{1}{2}BF=2,$$

在 $Rt\triangle BCG$ 中, $BC=8$, $BG=2$,

$$\text{根据勾股定理得, } CG=\sqrt{BC^2-BG^2}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15},$$

故选: C.

【点评】此题是平行四边形的性质, 主要考查了角平分线的定义, 平行线分线段成比例定理, 等腰三角形的性质和判定, 勾股定理, 解本题的关键是求出 AE , 记住: 题目中出现平行线和角平分线时, 极易出现等腰三角形这一特点.

14. (3分) 定义: 点 $A(x, y)$ 为平面直角坐标系内的点, 若满足 $x=y$, 则把点 A 叫做“平衡点”. 例如: $M(1, 1)$, $N(-2, -2)$ 都是“平衡点”. 当 $-1 \leq x \leq 3$ 时, 直线 $y=2x+m$ 上有“平衡点”, 则 m 的取值范围是 ()

A. $0 \leq m \leq 1$ B. $-3 \leq m \leq 1$ C. $-3 \leq m \leq 3$ D. $-1 \leq m \leq 0$

【分析】根据 $x=y$, $-1 \leq x \leq 3$ 可得出关于 m 的不等式, 求出 m 的取值范围即可.

【解答】解: $\because x=y$,

$$\therefore x=2x+m, \text{ 即 } x=-m.$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 3,$$

$$\therefore -1 \leq -m \leq 3,$$

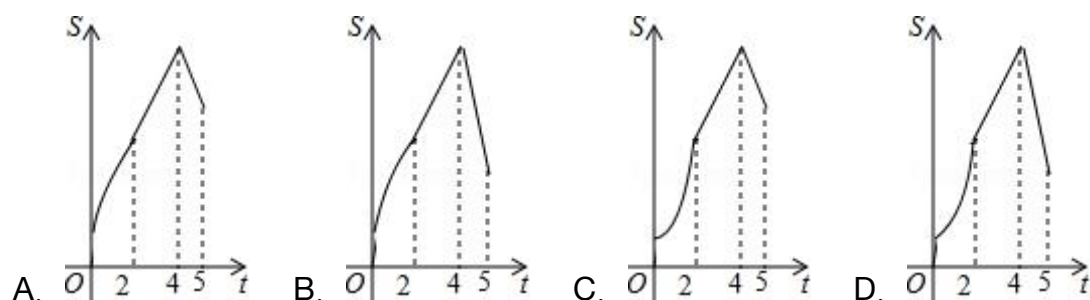
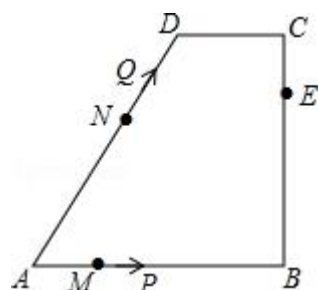
$$\therefore -3 \leq m \leq 1.$$

故选 B.

【点评】本题考查的是一次函数图象上点的坐标特点, 根据题意得出关于 m 的

不等式是解答此题的关键.

15. (3分) 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $\angle B = 90^\circ$, $AB = AD = 5$, $BC = 4$, M 、 N 、 E 分别是 AB 、 AD 、 CB 上的点, $AM = CE = 1$, $AN = 3$, 点 P 从点 M 出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿折线 $MB - BE$ 向点 E 运动, 同时点 Q 从点 N 出发, 以相同的速度沿折线 $ND - DC - CE$ 向点 E 运动, 当其中一个点到达后, 另一个点也停止运动. 设 $\triangle APQ$ 的面积为 S , 运动时间为 t 秒, 则 S 与 t 函数关系的大致图象为 ()



【分析】 先求出 DN , 判断点 Q 到 D 点时, $DP \perp AB$, 然后分三种情况分别用三角形的面积公式计算即可.

【解答】 解: $\because AD = 5$, $AN = 3$,

$\therefore DN = 2$,

如图 1, 过点 D 作 $DF \perp AB$,

$\therefore DF = BC = 4$,

在 $RT\triangle ADF$ 中, $AD = 5$, $DF = 4$, 根据勾股定理得, $AF = \sqrt{AD^2 - DF^2} = 3$,

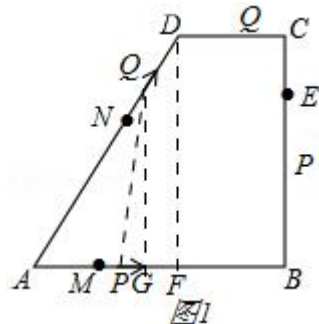
$\therefore BF = CD = 2$, 当点 Q 到点 D 时用了 $2s$,

∴ 点 P 也运动 2s,

∴ AP=3, 即 QP ⊥ AB,

∴ 只分三种情况:

①当 $0 < t \leq 2$ 时, 如图 1,



过 Q 作 $QG \perp AB$, 过点 D 作 $DF \perp AB$, $QG \parallel DF$,

$$\therefore \frac{AQ}{AD} = \frac{QG}{DF},$$

由题意得, $NQ=t$, $MP=t$,

∴ $AM=1$, $AN=3$,

∴ $AQ=t+3$,

$$\therefore \frac{t+3}{5} = \frac{QG}{4},$$

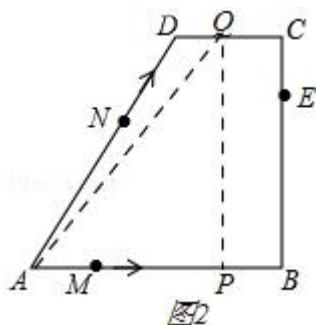
$$\therefore QG = \frac{4}{5} (t+3),$$

∴ $AP=t+1$,

$$\therefore S = S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} AP \times QG = \frac{1}{2} \times (t+1) \times \frac{4}{5} (t+3) = \frac{2}{5} (t+2)^2 - \frac{2}{5},$$

当 $t=2$ 时, $S=6$,

②当 $2 < t \leq 4$ 时, 如图 2,

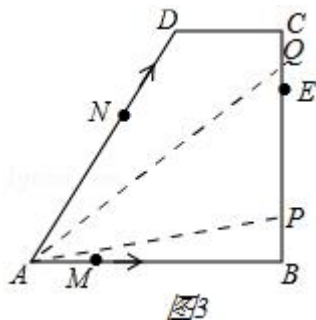


$$\therefore AP = AM + t = 1 + t,$$

$$\therefore S = S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} AP \times BC = \frac{1}{2} (1+t) \times 4 = 2(t+1) = 2t+2,$$

当 $t=4$ 时, $S=10$,

③当 $4 < t \leq 5$ 时, 如图 3,



由题意得 $CQ = t - 4$, $PB = t + AM - AB = t + 1 - 5 = t - 4$,

$$\therefore PQ = BC - CQ - PB = 4 - (t - 4) - (t - 4) = 12 - 2t,$$

$$\therefore S = S_{\triangle APQ} = \frac{1}{2} PQ \times AB = \frac{1}{2} \times (12 - 2t) \times 5 = -5t + 30,$$

当 $t=5$ 时, $S=5$,

$\therefore S$ 与 t 的函数关系式分别是① $S = S_{\triangle APQ} = \frac{2}{5} (t+2)^2 - \frac{2}{5}$, 当 $t=2$ 时, $S=6$, ②

$S = S_{\triangle APQ} = 2t+2$, 当 $t=4$ 时, $S=10$, ③ $\therefore S = S_{\triangle APQ} = -5t+30$, 当 $t=5$ 时, $S=5$,

综合以上三种情况, D 正确

故选 D.

【点评】 此题是动点问题的函数图象, 考查了三角形的面积公式, 矩形的性质, 解本题的关键是分段画出图象, 判断出点 Q 在线段 CD 时, $PQ \perp AB$ 是易错的

地方.

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

16. (3 分) 计算: $2^{-1} + \sqrt{(-2)^2} = \frac{5}{2}$.

【分析】分别根据负整数指数幂的运算法则、算术平方根的定义分别计算出各数, 再根据有理数的加法法则进行计算即可.

【解答】解: 原式 $= \frac{1}{2} + 2$
 $= \frac{5}{2}$.

故答案为: $\frac{5}{2}$.

【点评】本题考查的是二次根式的性质与化简, 熟知二次根式具有非负性是解答此题的关键.

17. (3 分) 分解因式: $a^2 - 4b^2 = (a+2b)(a-2b)$.

【分析】直接用平方差公式进行分解. 平方差公式: $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

【解答】解: $a^2 - 4b^2 = (a+2b)(a-2b)$.

【点评】本题考查运用平方差公式进行因式分解, 熟记公式结构是解题的关键.

18. (3 分) 某学习小组在“世界读书日”这天统计了本组 5 名同学在上学期阅读课外书籍的册数, 数据是 18, x, 15, 16, 13, 若这组数据的平均数为 16, 则这组数据的中位数是 16.

【分析】先根据平均数的大小, 求得 x 的值, 再将这组数据按从小到大的顺序排列, 求得中位数即可.

【解答】解: $\because 18, x, 15, 16, 13$ 这组数据的平均数为 16,

$$\therefore (18+x+15+16+13) \div 5 = 16,$$

解得 $x=18$,

∴这组数据按从小到大的顺序排列为：13，15，16，18，18，

∴这组数据的中位数是 16.

故答案为：16

【点评】 本题主要考查了中位数以及算术平均数，注意：将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

19. (3 分) 若代数式 $\frac{6}{x+2}$ 与 $\frac{4}{x}$ 的值相等，则 $x=$ 4.

【分析】 由已知条件：代数式 $\frac{6}{x+2}$ 与 $\frac{4}{x}$ 的值相等，可以得出方程 $\frac{6}{x+2} = \frac{4}{x}$ ，解方程即可.

【解答】 解：根据题意得： $\frac{6}{x+2} = \frac{4}{x}$,

去分母得： $6x=4(x+2)$,

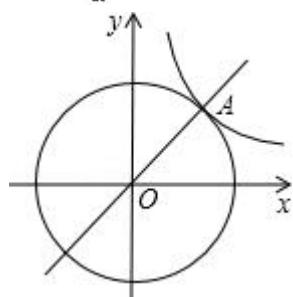
移项合并同类项得： $2x=8$,

解得： $x=4$.

故答案为：4.

【点评】 本题考查了解分式方程，解答本题的关键在于根据题意列出方程，解方程时注意按步骤进行.

20. (3 分) 如图，半径为 2 的 $\odot O$ 在第一象限与直线 $y=x$ 交于点 A，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 的图象过点 A，则 $k=$ 2.



【分析】先求出点 A 的坐标，再代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$)，即可解答.

【解答】解：∵半径为 2 的 $\odot O$ 在第一象限与直线 $y=x$ 交于点 A，

∴ $OA=2$,

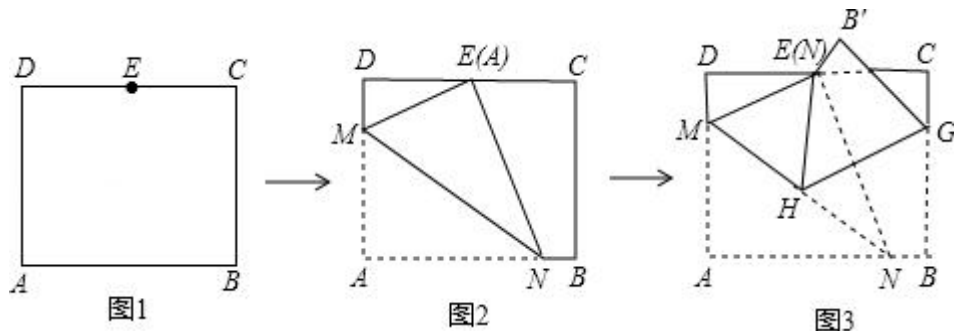
∴点 A 的坐标为 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$,

把点 A 代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 得： $k=\sqrt{2} \times \sqrt{2}=2$,

故答案为：2.

【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点坐标，解决本题的关键是求出点 A 的坐标.

21. (3 分) 如图 1，在矩形纸片 ABCD 中， $AB=8\sqrt{3}$ ， $AD=10$ ，点 E 是 CD 中点，将这张纸片依次折叠两次；第一次折叠纸片使点 A 与点 E 重合，如图 2，折痕为 MN，连接 ME、NE；第二次折叠纸片使点 N 与点 E 重合，如图 3，点 B 落到 B' 处，折痕为 HG，连接 HE，则 $\tan \angle EHG = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.



【分析】如图 2 中，作 $NF \perp CD$ 于 F. 设 $DM=x$ ，则 $AM=EM=10-x$ ，利用勾股定理求出 x ，再利用 $\triangle DME \sim \triangle FEN$ ，得 $\frac{DE}{FN} = \frac{EM}{EN}$ ，求出 EN ， EM ，求出 $\tan \angle AMN$ ，再证明 $\angle EHG = \angle AMN$ 即可解决问题.

【解答】解：如图 2 中，作 $NF \perp CD$ 于 F. 设 $DM=x$ ，则 $AM=EM=10-x$ ，

∵ $DE=EC$ ， $AB=CD=8\sqrt{3}$ ，

$$\therefore DE = \frac{1}{2}CD = 4\sqrt{3},$$

在 $RT\triangle DEM$ 中, $\therefore DM^2 + DE^2 = EM^2$,

$$\therefore (4\sqrt{3})^2 + x^2 = (10 - x)^2,$$

解得 $x = 2.6$,

$$\therefore DM = 2.6, AM = EM = 7.4,$$

$$\therefore \angle DEM + \angle NEF = 90^\circ, \angle NEF + \angle ENF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DEM = \angle ENF, \therefore \angle D = \angle ENF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle DME \sim \triangle FEN,$$

$$\therefore \frac{DE}{FN} = \frac{EM}{EN},$$

$$\therefore \frac{4\sqrt{3}}{10} = \frac{7.4}{EN},$$

$$\therefore EN = \frac{37}{6}\sqrt{3},$$

$$\therefore AN = EN = \frac{37}{6}\sqrt{3},$$

$$\therefore \tan \angle AMN = \frac{AN}{AM} = \frac{5}{6}\sqrt{3},$$

如图 3 中, $\therefore ME \perp EN, HG \perp EN$,

$$\therefore EM \parallel GH,$$

$$\therefore \angle NME = \angle NHG,$$

$$\therefore \angle NME = \angle AMN, \angle EHG = \angle NHG,$$

$$\therefore \angle AMN = \angle EHG,$$

$$\therefore \tan \angle EHG = \tan \angle AMN = \frac{5}{6}\sqrt{3}.$$

$$\text{方法二, } \tan \angle EHG = \tan \angle EMN = \frac{EN}{EM} = \frac{BC}{DE}.$$

故答案为 $\frac{5}{6}\sqrt{3}$.

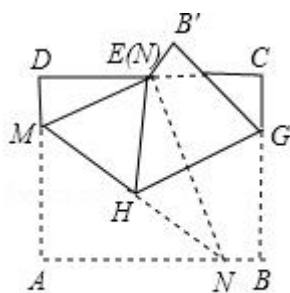


图3

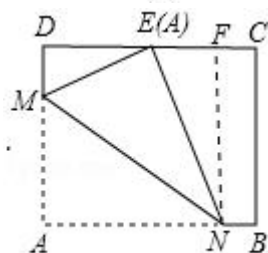


图2

【点评】 本题考查翻折变换、勾股定理、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是学会把问题转化，证明 $\angle AMN = \angle EHG$ 是关键，属于中考填空题中的压轴题.

三、解答题（本大题共 7 个小题，共 57 分）

22. (7 分) (1) 先化简再求值: $a(1 - 4a) + (2a + 1)(2a - 1)$, 其中 $a = 4$.

(2) 解不等式组: $\begin{cases} 2x + 1 \leq 7, & ① \\ 3 + 2x \geq 1 + x, & ② \end{cases}$

【分析】 (1) 先算乘法，再合并同类项，最后代入求出即可；

(2) 先求出每个不等式的解集，再根据找不等式组解集的规律找出不等式组的解集即可.

【解答】 解: (1) $a(1 - 4a) + (2a + 1)(2a - 1)$

$$= a - 4a^2 + 4a^2 - 1$$

$$= a - 1,$$

当 $a = 4$ 时, 原式 $= 4 - 1 = 3$;

$$(2) \begin{cases} 2x+1 \leq 7 & ① \\ 3+2x \geq 1+x & ② \end{cases}$$

∴ 解不等式①得: $x \leq 3$,

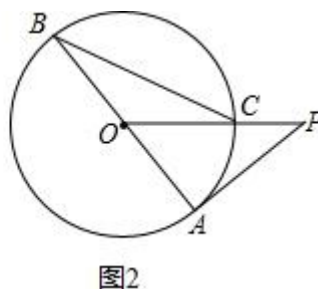
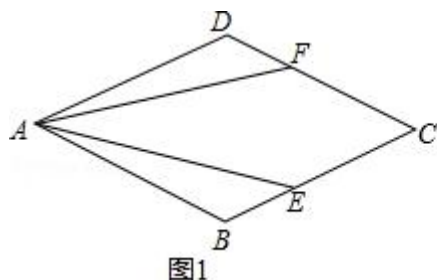
解不等式②得: $x \geq -2$,

∴ 不等式组的解集为 $-2 \leq x \leq 3$.

【点评】 本题考查了整式的混合运算和求值, 解一元一次不等式组的应用, 能正确根据整式的运算法则进行化简是解 (1) 的关键, 能根据找不等式组解集的规律找出不等式组的解集是解 (2) 的关键.

23. (7 分) (1) 如图 1, 在菱形 ABCD 中, $CE=CF$, 求证: $AE=AF$.

(2) 如图 2, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 与 $\odot O$ 相切于点 A, OP 与 $\odot O$ 相交于点 C, 连接 CB, $\angle OPA=40^\circ$, 求 $\angle ABC$ 的度数.



【分析】 (1) 根据菱形的性质, 利用 SAS 判定 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$, 从而求得 $AE=AF$;

(2) 利用切线的性质和直角三角形的两个锐角互余的性质得到圆心角 $\angle PAO$ 的度数, 然后利用圆周角定理来求 $\angle ABC$ 的度数.

【解答】 证明: (1) ∵ 四边形 ABCD 是菱形,

∴ $AB=BC=CD=AD$, $\angle B=\angle D$

∵ $CE=CF$,

∴ $BE=DF$

在 $\triangle ABE$ 与 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle B=\angle D, \\ BE=DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF.$$

$$\therefore AE=AF;$$

(2) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, 直线 PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ,

$$\therefore \angle PAO=90^\circ.$$

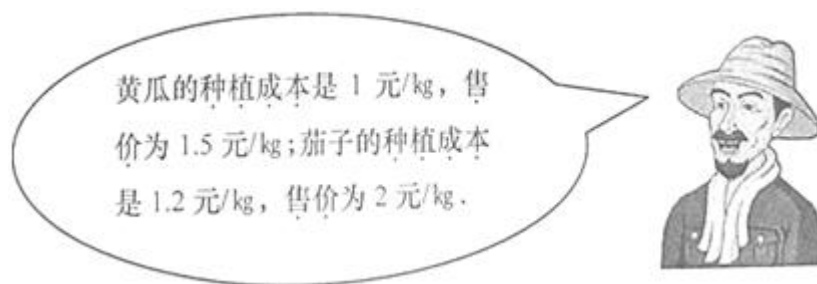
$$\text{又} \because \angle OPA=40^\circ,$$

$$\therefore \angle POA=50^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC=\frac{1}{2}\angle POA=25^\circ.$$

【点评】 本题考查三角形全等的判定方法, 判定两个三角形全等的一般方法有: SSS、SAS、ASA、AAS、HL. 判定两个三角形全等, 先根据已知条件或求证的结论确定三角形, 然后再根据三角形全等的判定方法, 看缺什么条件, 再去证什么条件. 同时考查了切线的性质, 圆周角定理. 圆的切线垂直于经过切点的半径.

24. (8 分) 学生在素质教育基地进行社会实践活动, 帮助农民伯伯采摘了黄瓜和茄子共 40kg, 了解到这些蔬菜的种植成本共 42 元, 还了解到如下信息:



(1) 请问采摘的黄瓜和茄子各多少千克?

(2) 这些采摘的黄瓜和茄子可赚多少元?

【分析】 (1) 设他当天采摘黄瓜 x 千克, 茄子 y 千克, 根据采摘了黄瓜和茄子共 40kg, 了解到这些蔬菜的种植成本共 42 元, 列出方程, 求出 x 的值, 即可求出

答案;

(2) 根据黄瓜和茄子的斤数, 再求出每斤黄瓜和茄子赚的钱数, 即可求出总的赚的钱数.

【解答】解: (1) 设采摘黄瓜 x 千克, 茄子 y 千克. 根据题意, 得

$$\begin{cases} x+y=40 \\ x+1.2y=42 \end{cases}$$

解得 $\begin{cases} x=30 \\ y=10 \end{cases}$.

答: 采摘的黄瓜和茄子各 30 千克、10 千克;

$$(2) 30 \times (1.5 - 1) + 10 \times (2 - 1.2) = 23 \text{ (元)}.$$

答: 这些采摘的黄瓜和茄子可赚 23 元.

【点评】本题考查了二元一次方程组的应用. 解题关键是弄清题意, 合适的等量关系, 列出方程组.

25. (8 分) 随着教育信息化的发展, 学生的学习方式日益增多, 教师为了指导学生有效利用网络进行学习, 对学生进行了随机问卷调查 (问卷调查表如图所示), 并用调查结果绘制了图 1、图 2 两幅统计图 (均不完整), 请根据统计图解答以下问题:

(1) 本次接受问卷调查的学生共有 100 人, 在扇形统计图中“D”选项所占的百分比为 10%;

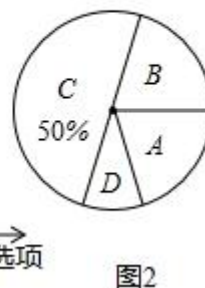
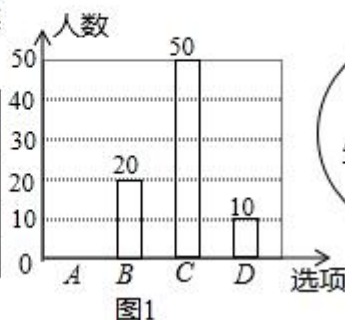
(2) 扇形统计图中, “B”选项所对应扇形圆心角为 72 度;

(3) 请补全条形统计图;

(4) 若该校共有 1200 名学生, 请您估计该校学生课外利用网络学习的时间在“A”选项的有多少人?

课外利用网络学习的时间问卷调查表
您好！这是一份关于您平均每周课外利用网络学习时间的调查表，请在表格中选择一项符合您学习时间的选择，在其后空格内打“√”，非常感谢您的合作。

选项	学习时间t (h)	
A	$0 < t \leq 2$	
B	$2 < t \leq 2.5$	
C	$2.5 < t \leq 3$	
D	$t > 3$	



【分析】由条形统计图与扇形统计图获得的数据：

(1) 因为图 (1)、图 (2) 中已知 C 选项的百分比与人数，由 C 选项的百分比 $= \frac{\text{C选项的人数}}{\text{接受调查的学生的总人数}} \times 100\%$ 求解；

(2) 先求出 B 选项的百分比，再利用扇形统计图的圆心角的度数 $= 360^\circ \times \text{B选项的百分比}$ 求解；

(3) 由 (1) 所得总人数求出 B 选项的人数即可作图；

(4) 先求出 A 选项的百分比即可求得.

【解答】解：(1) 因为，图 (1)、图 (2) 中已知 C 选项的百分比是 50%，人数是 50，

所以，本次接受问卷调查的学生 $= 50 \div 50\% = 100$ (人)

又，D 选项的人数是 10

所以，D 选项的百分比 $= \frac{10}{100} \times 100\% = 10\%$

故答案为：100，10%.

(2) 因为，B 选项的人数为 20，

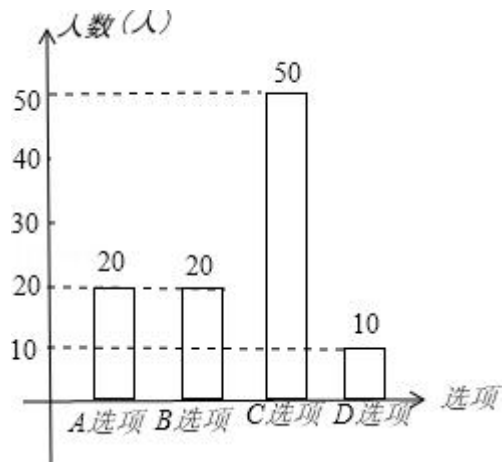
所以，B 选项的百分比 $= 20 \div 100 = 20\%$ ，

故，B 选项所对应扇形圆心角 $= 360^\circ \times 20\% = 72^\circ$.

故答案为 72

(3) 因为，A 选项的人数 $= 100 - 20 - 50 - 10 = 20$ (人)，则，条形统计

图补全如下图所示：



接受调查学生条形统计图

(4) 因为，A 选项所占的百分比为 20%，

所以， $1200 \times 20\% = 240$ （人）

即，课外利用网络学习的时间在“A”选项的有 240 人

【点评】此题是条形统计图，是常规题型，考查的是概率与统计中条形统计图、扇形统计图、利用样本估计总体等基础知识点

26. (9 分) 如图 1， $\square OABC$ 的边 OC 在 x 轴的正半轴上， $OC=5$ ，反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ ($x>0$) 的图象经过点 $A(1, 4)$.

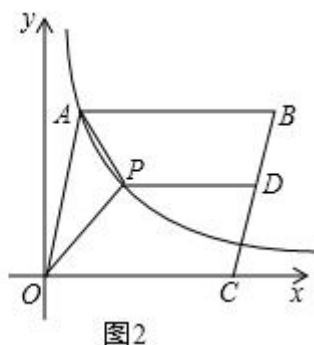
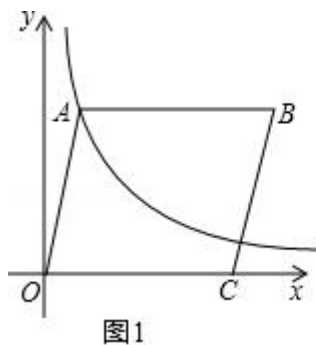
(1) 求反比例函数的关系式和点 B 的坐标；

(2) 如图 2，过 BC 的中点 D 作 $DP \parallel x$ 轴交反比例函数图象于点 P ，连接 AP 、 OP .

①求 $\triangle AOP$ 的面积；

②在 $\square OABC$ 的边上是否存在点 M ，使得 $\triangle POM$ 是以 PO 为斜边的直角三角形？

若存在，请求出所有符合条件的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由.



【分析】 (1) 由点 A 的坐标利用反比例函数图象上点的坐标特征即可求出反比例函数关系式，再根据平行四边形的性质结合点 A、O、C 的坐标即可求出点 B 的坐标；

(2) ①延长 DP 交 OA 于点 E，由点 D 为线段 BC 的中点，可求出点 D 的坐标，再令反比例函数关系式中 $y=2$ 求出 x 值即可得出点 P 的坐标，由此即可得出 PD、EP 的长度，根据三角形的面积公式即可得出结论；

②假设存在，以 OP 为直径作圆，交 OC 于点 M_1 ，交 OA 于点 M_2 ，通过解直角三角形和勾股定理求出点 M_1 、 M_2 的坐标，此题得解。

【解答】 解：(1) $\because$ 反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ ($x>0$) 的图象经过点 A (1, 4)，

$$\therefore m=1 \times 4=4,$$

$$\therefore \text{反比例函数的关系式为 } y=\frac{4}{x} \quad (x>0).$$

$\because$ 四边形 OABC 为平行四边形，且点 O (0, 0)，OC=5，点 A (1, 4)，

$$\therefore \text{点 C (5, 0)，点 B (6, 4)}.$$

(2) ①延长 DP 交 OA 于点 E，如图 3 所示。

$\because$ 点 D 为线段 BC 的中点，点 C (5, 0)、B (6, 4)，

$$\therefore \text{点 D } \left(\frac{11}{2}, 2\right).$$

令 $y=\frac{4}{x}$ 中 $y=2$ ，则 $x=2$ ，

$$\therefore \text{点 P (2, 2)},$$

$$\therefore PD = \frac{11}{2} - 2 = \frac{7}{2}, \quad EP = ED - PD = \frac{3}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle AOP} = \frac{1}{2} EP \cdot (y_A - y_O) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times (4 - 0) = 3.$$

②假设存在. 以 OP 为直径作圆, 交 OC 于点 M_1 , 交 OA 于点 M_2 , 连接 PM_1 、 PM_2 , 如图 4 所示.

$$\therefore \text{点 } P(2, 2), \quad O(0, 0),$$

$$\therefore \text{点 } M_1(2, 0);$$

$$\therefore \text{点 } A(1, 4), \quad \text{点 } O(0, 0),$$

$$\therefore \text{直线 } OA \text{ 的关系式为 } y=4x.$$

$$\text{设点 } M_2(n, 4n),$$

$$\therefore S_{\triangle AOP}=3, \quad OA=\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{17},$$

$$\therefore PM_2 = \sqrt{(n-2)^2 + (4n-2)^2} = \sqrt{17n^2 - 20n + 8} = \frac{2S_{\triangle AOP}}{OA} = \frac{6\sqrt{17}}{17},$$

$$\text{即 } 289n^2 - 340n + 100 = 0,$$

$$\text{解得: } n = \frac{10}{17},$$

$$\therefore \text{点 } M_2\left(\frac{10}{17}, \frac{40}{17}\right).$$

故在 $\square OABC$ 的边上存在点 M , 使得 $\triangle POM$ 是以 PO 为斜边的直角三角形, 点

M 的坐标为 $(2, 0)$ 或 $\left(\frac{10}{17}, \frac{40}{17}\right)$.

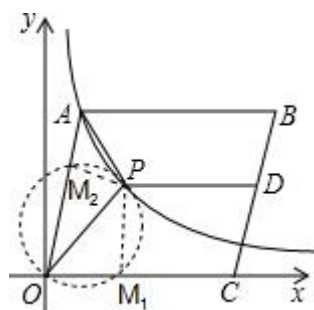


图4

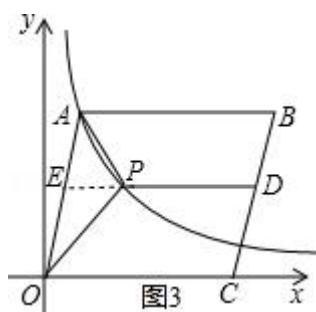


图3

【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征、三角形的面积公式、平行四边形的性质以及解直角三角形，解题的关键是：(1) 根据反比例函数图象上点的坐标特征求出反比例函数解析式；(2) ①求出 EP 长度；②以 OP 为直径作圆，找出点 M 的位置. 本题属于中档题，难度不大，解决该题型题目时，通过作圆来确定点的数目与位置是关键.

27. (9 分) 在学习了图形的旋转知识后，数学兴趣小组的同学们又进一步对图形旋转前后的线段之间、角之间的关系进行了探究.

(一) 尝试探究

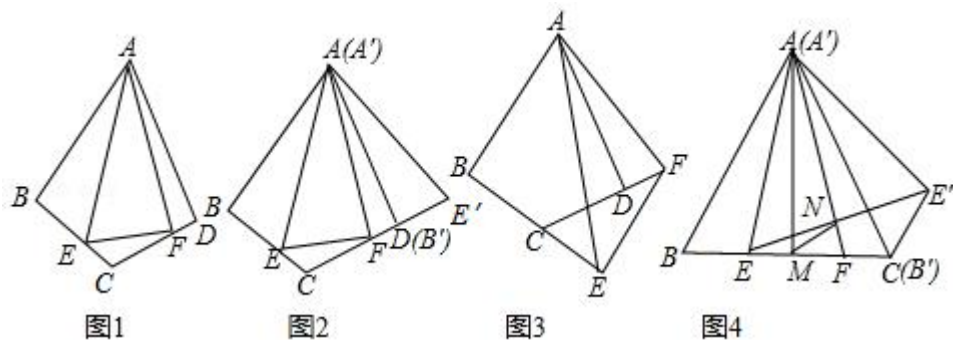
如图 1，在四边形 $ABCD$ 中， $AB=AD$ ， $\angle BAD=60^\circ$ ， $\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$ ，点 E 、 F 分别在线段 BC 、 CD 上， $\angle EAF=30^\circ$ ，连接 EF .

(1) 如图 2，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 后得到 $\triangle A'B'E'$ ($A'B'$ 与 AD 重合)，请直接写出 $\angle E'AF=$ 30 度，线段 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系为 $BE+DF=EF$.

(2) 如图 3，当点 E 、 F 分别在线段 BC 、 CD 的延长线上时，其他条件不变，请探究线段 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系，并说明理由.

(二) 拓展延伸

如图 4，在等边 $\triangle ABC$ 中， E 、 F 是边 BC 上的两点， $\angle EAF=30^\circ$ ， $BE=1$ ，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle A'B'E'$ ($A'B'$ 与 AC 重合)，连接 EE' ， AF 与 EE' 交于点 N ，过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M ，连接 MN ，求线段 MN 的长度.



【分析】（一）（1）根据图形旋转前后对应边相等，对应角相等，判定 $\triangle AEF \cong \triangle AE'F$ ，进而根据线段的和差关系得出结论；

（2）先在 BE 上截取 $BG=DF$ ，连接 AG ，构造 $\triangle ABG \cong \triangle ADF$ ，进而利用全等三角形的对应边相等，对应角相等，判定 $\triangle GAE \cong \triangle FAE$ ，最后根据线段的和差关系得出结论；

（二）先根据旋转的性质判定 $\triangle AEE'$ 是等边三角形，进而利用等边 $\triangle ABC$ 、等边 $\triangle AEE'$ 的三线合一的性质，得到 $\frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AB}$ 和 $\angle BAE = \angle MAN$ ，最后判定 $\triangle BAE \sim \triangle MAN$ ，并根据相似三角形对应边成比例，列出比例式求得 MN 的长.

【解答】解：（一）（1）如图 2，将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 后得到 $\triangle A'B'E'$ ，则

$$\angle 1 = \angle 2, BE = DE', AE = AE',$$

$$\because \angle BAD = 60^\circ, \angle EAF = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 3 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 30^\circ, \text{ 即 } \angle FAE' = 30^\circ$$

$$\therefore \angle EAF = \angle FAE',$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle AE'F$ 中,

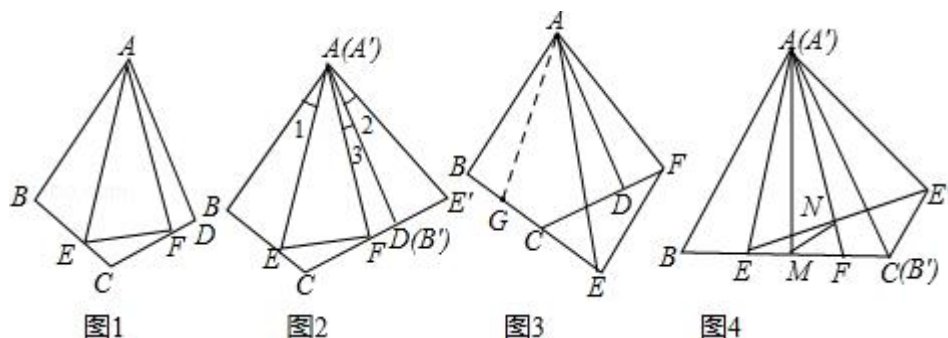
$$\begin{cases} AE = AE' \\ \angle EAF = \angle FAE' \\ AF = AF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle AE'F \text{ (SAS)},$$

$\therefore EF=E'F$, 即 $EF=DF+DE'$,

$\therefore EF=DF+BE$, 即线段 BE 、 EF 、 FD 之间的数量关系为 $BE+DF=EF$,

故答案为: 30, $BE+DF=EF$;



(2) 如图 3, 在 BE 上截取 $BG=DF$, 连接 AG ,

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle ADF$ 中,

$$\begin{cases} AB=AD \\ \angle ABE=\angle ADF, \\ BG=DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABG \cong \triangle ADF$ (SAS),

$\therefore \angle BAG=\angle DAF$, 且 $AG=AF$,

$\therefore \angle DAF+\angle DAE=30^\circ$,

$\therefore \angle BAG+\angle DAE=30^\circ$,

$\therefore \angle BAD=60^\circ$,

$\therefore \angle GAE=60^\circ-30^\circ=30^\circ$,

$\therefore \angle GAE=\angle FAE$,

在 $\triangle GAE$ 和 $\triangle FAE$ 中,

$$\begin{cases} AG=AF \\ \angle GAE=\angle FAE, \\ AE=AE \end{cases}$$

$\therefore \triangle GAE \cong \triangle FAE$ (SAS),

$$\therefore GE=FE,$$

$$\text{又} \because BE - BG=GE, \quad BG=DF,$$

$$\therefore BE - DF=EF,$$

即线段 BE、EF、FD 之间的数量关系为 $BE - DF=EF$;

(二) 如图 4, 将 $\triangle ABE$ 绕点 A 逆时针旋转 60° 得到 $\triangle A'B'E'$, 则

$$AE=AE', \quad \angle EAE'=60^\circ,$$

$\therefore \triangle AEE'$ 是等边三角形,

$$\text{又} \because \angle EAF=30^\circ,$$

$$\therefore AN \text{ 平分 } \angle EAE',$$

$$\therefore AN \perp EE',$$

$$\therefore \text{直角三角形 ANE 中, } \frac{AN}{AE} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\because \text{在等边 } \triangle ABC \text{ 中, } AM \perp BC,$$

$$\therefore \angle BAM=30^\circ,$$

$$\therefore \frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 且 } \angle BAE + \angle EAM = 30^\circ,$$

$$\therefore \frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AB},$$

$$\text{又} \because \angle MAN + \angle EAM = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle BAE = \angle MAN,$$

$$\therefore \triangle BAE \sim \triangle MAN,$$

$$\therefore \frac{MN}{BE} = \frac{AM}{AB}, \text{ 即 } \frac{MN}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore MN = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【点评】 本题以旋转为背景, 考查了全等三角形与相似三角形, 考核了学生对图形进行分解、组合的能力, 解题关键是抓住图形旋转前后的对应边相等, 对应角

相等. 解题时应注意等边三角形具有三线合一的性质, 此类试题的一般解题方法为作辅助线构造全等三角形或相似三角形.

28. (9分) 如图 1, 抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(4, 0)$, 与 y 轴交于点 B , 在 x 轴上有一动点 $E(m, 0)$ ($0 < m < 4$), 过点 E 作 x 轴的垂线交直线 AB 于点 N , 交抛物线于点 P , 过点 P 作 $PM \perp AB$ 于点 M .

(1) 求 a 的值和直线 AB 的函数表达式;

(2) 设 $\triangle PMN$ 的周长为 C_1 , $\triangle AEN$ 的周长为 C_2 , 若 $\frac{C_1}{C_2} = \frac{6}{5}$, 求 m 的值;

(3) 如图 2, 在 (2) 条件下, 将线段 OE 绕点 O 逆时针旋转得到 OE' , 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$), 连接 $E'A$ 、 $E'B$, 求 $E'A + \frac{2}{3}E'B$ 的最小值.

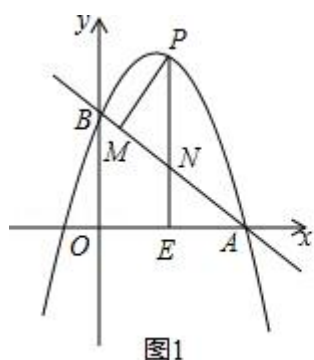


图1

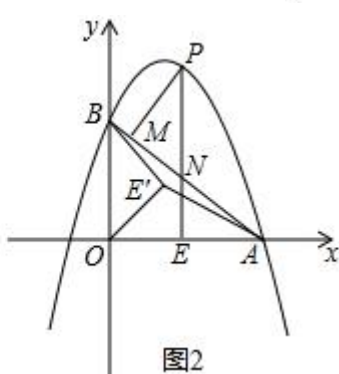


图2

【分析】 (1) 令 $y=0$, 求出抛物线与 x 轴交点, 列出方程即可求出 a , 根据待定系数法可以确定直线 AB 解析式.

(2) 由 $\triangle PNM \sim \triangle ANE$, 推出 $\frac{PN}{AN} = \frac{6}{5}$, 列出方程即可解决问题.

(3) 在 y 轴上取一点 M 使得 $OM' = \frac{4}{3}$, 构造相似三角形, 可以证明 AM' 就是 $E'A + \frac{2}{3}E'B$ 的最小值.

【解答】 解: (1) 令 $y=0$, 则 $ax^2+(a+3)x+3=0$,

$$\therefore (x+1)(ax+3)=0,$$

$$\therefore x=-1 \text{ 或 } -\frac{3}{a},$$

∵ 抛物线 $y=ax^2+(a+3)x+3$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于点 $A(4, 0)$,

$$\therefore -\frac{3}{a}=4,$$

$$\therefore a=-\frac{3}{4}.$$

∴ $A(4, 0)$, $B(0, 3)$,

设直线 AB 解析式为 $y=kx+b$, 则 $\begin{cases} b=3 \\ 4k+b=0 \end{cases}$,

$$\text{解得} \begin{cases} k=-\frac{3}{4} \\ b=3 \end{cases}$$

∴ 直线 AB 解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$.

(2) 如图 1 中,

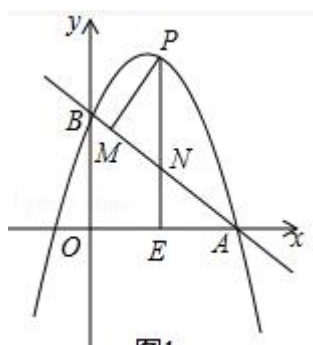


图1

∵ $PM \perp AB$, $PE \perp OA$,

∴ $\angle PMN = \angle AEN$, ∴ $\angle PNM = \angle ANE$,

∴ $\triangle PNM \sim \triangle ANE$,

$$\therefore \frac{PN}{AN} = \frac{6}{5},$$

∵ $NE \parallel OB$,

$$\therefore \frac{AN}{AB} = \frac{AE}{OA},$$

$$\therefore AN = \frac{5}{4}(4-m),$$

∴ 抛物线解析式为 $y = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{4}x + 3$,

$$\therefore PN = -\frac{3}{4}m^2 + \frac{9}{4}m + 3 - \left(-\frac{3}{4}m + 3\right) = -\frac{3}{4}m^2 + 3m,$$

$$\therefore \frac{-\frac{3}{4}m^2 + 3m}{\frac{5}{4}(4-m)} = \frac{6}{5},$$

解得 $m=2$.

(3) 如图 2 中, 在 y 轴上取一点 M' 使得 $OM' = \frac{4}{3}$, 连接 AM' , 在 AM' 上取一点 E' 使得 $OE' = OE$.

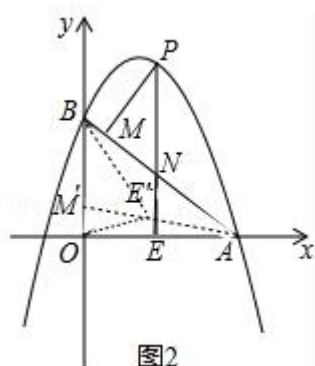


图2

$$\therefore OE' = 2, \quad OM' \cdot OB = \frac{4}{3} \times 3 = 4,$$

$$\therefore OE'^2 = OM' \cdot OB,$$

$$\therefore \frac{OE'}{OM'} = \frac{OB}{OE'}, \quad \therefore \angle BOE' = \angle M'OE',$$

$$\therefore \triangle M'OE' \sim \triangle E'OB,$$

$$\therefore \frac{M'E'}{BE'} = \frac{OE'}{OB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore M'E' = \frac{2}{3}BE',$$

$$\therefore AE' + \frac{2}{3}BE' = AE' + E'M' = AM', \quad \text{此时 } AE' + \frac{2}{3}BE' \text{ 最小 (两点间线段最短, A、M'、}$$

E' 共线时),

$$\text{最小值} = AM' = \sqrt{4^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{10}.$$

【点评】 本题考查相似三角形的判定和性质、待定系数法、最小值问题等知识, 解题的关键是构造相似三角形, 找到线段 AM' 就是 $E'A + \frac{2}{3}E'B$ 的最小值, 属于

中考压轴题.