

2016 年山东省东营市中考数学试卷

一、选择题：每小题 3 分，共 30 分

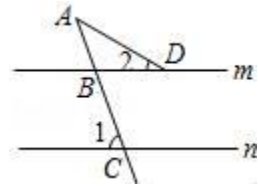
1. $-\frac{1}{2}$ 的倒数是 ()

- A. -2 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. 下列计算正确的是 ()

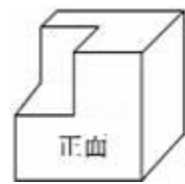
- A. $3a+4b=7ab$ B. $(ab^3)^2=ab^6$ C. $(a+2)^2=a^2+4$ D. $x^{12} \div x^6=x^6$

3. 如图，直线 $m \parallel n$ ， $\angle 1=70^\circ$ ， $\angle 2=30^\circ$ ，则 $\angle A$ 等于 ()



- A. 30° B. 35° C. 40° D. 50°

4. 从棱长为 $2a$ 的正方体零件的一角，挖去一个棱长为 a 的小正方体，得到一个如图所示的零件，则这个零件的俯视图是 ()



- A. B. C. D.

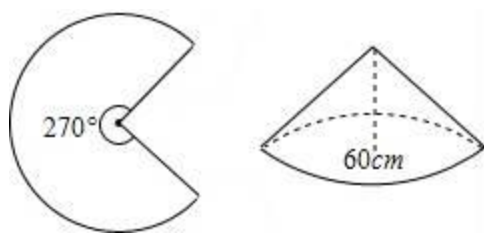
5. 已知不等式组 $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$ ，其解集在数轴上表示正确的是 ()

- A. B. C. D.

6. 东营市某学校组织知识竞赛，共设有 20 道试题，其中有关中国优秀传统文化试题 10 道，实践应用试题 6 道，创新能力试题 4 道。小婕从中任选一道试题作答，他选中创新能力试题的概率是 ()

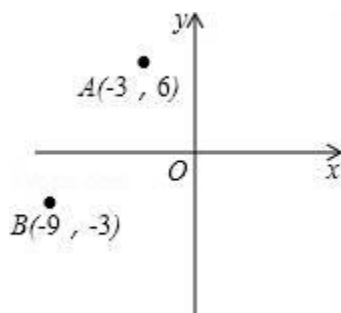
- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

7. 如图，已知一块圆心角为 270° 的扇形铁皮，用它作一个圆锥形的烟囱帽（接缝忽略不计），圆锥底面圆的直径是 60cm，则这块扇形铁皮的半径是 ()



- A. 40cm B. 50cm C. 60cm D. 80cm

8. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 A $(-3, 6)$ ，B $(-9, -3)$ ，以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{3}$ ，把 $\triangle ABO$ 缩小，则点 A 的对应点 A' 的坐标是 ()



- A. $(-1, 2)$ B. $(-9, 18)$
C. $(-9, 18)$ 或 $(9, -18)$ D. $(-1, 2)$ 或 $(1, -2)$

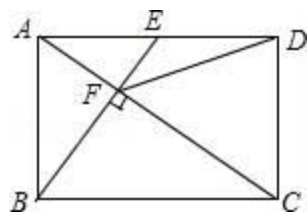
9. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=10$ ， $AC=2\sqrt{10}$ ，BC 边上的高 $AD=6$ ，则另一边 BC 等于 ()

- A. 10 B. 8 C. 6 或 10 D. 8 或 10

10. 如图，在矩形 ABCD 中，E 是 AD 边的中点， $BE \perp AC$ ，垂足为点 F，连接 DF，分析下列四个结论：

- ① $\triangle AEF \sim \triangle CAB$ ；② $CF=2AF$ ；③ $DF=DC$ ；④ $\tan \angle CAD = \sqrt{2}$.

其中正确的结论有 ()



- A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

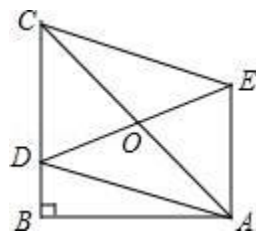
二、填空题：11-14 小题，每小题 3 分，15-18 小题，每小题 3 分

11. 2016 年第一季度，东营市实现生产总值 787.68 亿元，比上年同期提高了 0.9 个百分点，787.68 亿元用科学记数法表示是_____元.

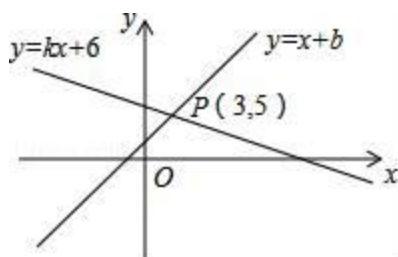
12. 分解因式： $a^3 - 16a =$ _____.

13. 某学习小组有 8 人，在一次数学测验中的成绩分别是：102, 115, 100, 105, 92, 105, 85, 104, 则他们成绩的平均数是_____.

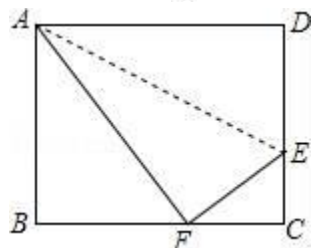
14. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $AB=4$ ， $BC>AB$ ，点 D 在 BC 上，以 AC 为对角线的平行四边形 $ADCE$ 中， DE 的最小值是_____.



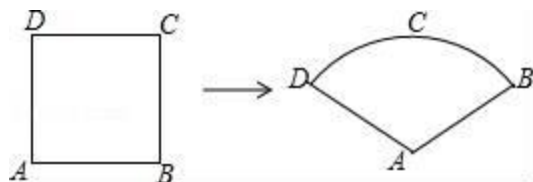
15. 如图，直线 $y=x+b$ 与直线 $y=kx+6$ 交于点 $P(3, 5)$ ，则关于 x 的不等式 $x+b > kx+6$ 的解集是_____.



16. 如图，折叠矩形 $ABCD$ 的一边 AD ，使点 D 落在 BC 边的点 F 处，已知折痕 $AE=5\sqrt{5}$ cm，且 $\tan \angle EFC = \frac{3}{4}$ ，那么矩形 $ABCD$ 的周长为_____cm.



17. 如图，某数学兴趣小组将边长为 5 的正方形铁丝框 $ABCD$ 变形为以 A 为圆心， AB 为半径的扇形（忽略铁丝的粗细），则所得的扇形 ABD 的面积为_____.



18. 在求 $1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8$ 的值时，张红发现：从第二个加数起每一个加数都是前一个加数的 3 倍，于是她假设： $S=1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8$ ①，

然后在①式的两边都乘以 3，得： $3S=3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9$ ②，

② - ①得， $3S - S = 3^9 - 1$ ，即 $2S = 3^9 - 1$ ，

随意 $S = \frac{3^9 - 1}{2}$.

得出答案后，爱动脑筋的张红想：如果把“3”换成字母 m ($m \neq 0$ 且 $m \neq 1$)，能否求出 $1+m+m^2+m^3+m^4+\cdots+m^{2016}$ 的值？如能求出，其正确答案是_____.

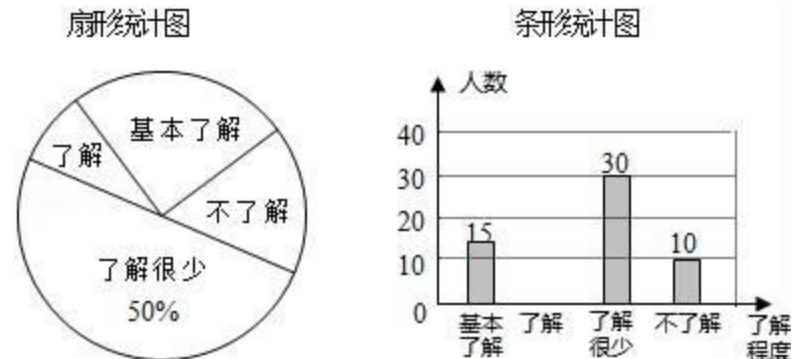
三、解答题：共 7 小题，共 62 分

19. (1) 计算： $(\frac{1}{2016})^{-1} + (\pi - 3.14)^0 - 2\sin 60^\circ - \sqrt{12} + 1 - 3\sqrt{3}$;

(2) 先化简，再求值：

$(a+1 - \frac{4a-5}{a-1}) \div (\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2-a})$ ，其中 $a=2+\sqrt{3}$.

20. “校园安全”受到全社会的广泛关注，东营市某中学对部分学生就校园安全知识的了解程度，采用随机抽样调查的方式，并根据收集到的信息进行统计，绘制了如图两幅尚不完整的统计图，请你根据统计图所提供的信息解答下列问题：



(1) 接受问卷调查的学生共有_____人，扇形统计图中“基本了解”部分所对应扇形的圆心角为_____；

(2) 请补全条形统计图；

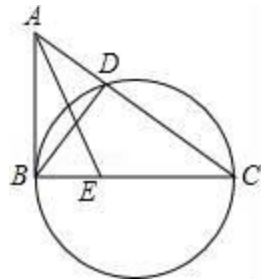
(3) 若该中学共有学生 900 人，请根据上述调查结果，估计该中学学生中对校园安全知识达到“了解”和“基本了解”程度的总人数；

(4) 若从对校园安全知识达到了“了解”程度的 3 个女生和 2 个男生中随机抽取 2 人参加校园安全知识竞赛，请用树状图或列表法求出恰好抽到 1 个男生和 1 个女生的概率.

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以 BC 为直径的圆交 AC 于点 D ， $\angle ABD = \angle ACB$.

(1) 求证： AB 是圆的切线；

(2) 若点 E 是 BC 上一点，已知 $BE=4$ ， $\tan \angle AEB = \frac{5}{3}$ ， $AB:BC=2:3$ ，求圆的直径.



22. 东营市某学校 2015 年在商场购买甲、乙两种不同足球，购买甲种足球共花费 2000 元，购买乙种足球共花费 1400 元，购买甲种足球数量是购买乙种足球数量的 2 倍，且购买一个乙种足球比购买一个甲种足球多花 20 元.

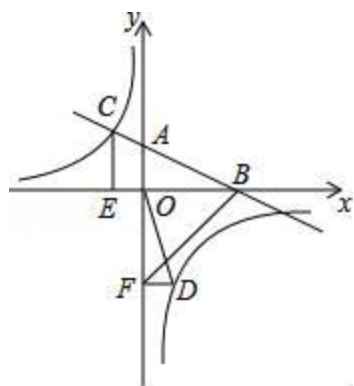
(1) 求购买一个甲种足球、一个乙种足球各需多少元；

(2) 2016 年为响应习总书记“足球进校园”的号召，这所学校决定再次购买甲、乙两种足球共 50 个，恰逢该商场对两种足球的售价进行调整，甲种足球售价比第一次购买时提高了 10%，乙种足球售价比第一次购买时降低了 10%，如果此次购买甲、乙两种足球的总费用不超过 2900 元，那么这所学校最多可购买多少个乙种足球？

23. 如图，在平面直角坐标系中，直线 AB 与 x 轴交于点 B，与 y 轴交于点 A，与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象在第二象限交于点 C，CE ⊥ x 轴，垂足为点 E， $\tan \angle ABO = \frac{1}{2}$ ，OB=4，OE=2.

(1) 求反比例函数的解析式；

(2) 若点 D 是反比例函数图象在第四象限上的点，过点 D 作 DF ⊥ y 轴，垂足为点 F，连接 OD、BF. 如果 $S_{\triangle BAF} = 4S_{\triangle DFO}$ ，求点 D 的坐标.



24. 如图 1， $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，四边形 ADEF 是正方形，点 B、C 分别在边 AD、AF 上，此时 $BD = CF$ ， $BD \perp CF$ 成立.

(1) 当 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 时，如图 2， $BD = CF$ 成立吗？若成立，请证明，若不成立，请说明理由；

(2) 当 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 45° 时，如图 3，延长 BD 交 CF 于点 H.

①求证： $BD \perp CF$ ；

②当 $AB = 2$ ， $AD = 3\sqrt{2}$ 时，求线段 DH 的长.

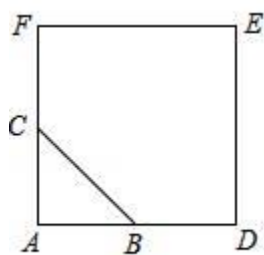


图1

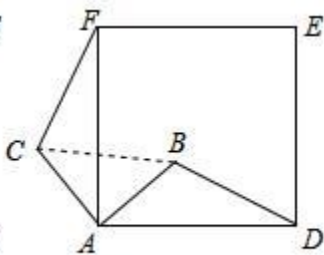


图2

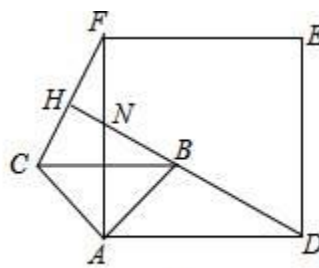


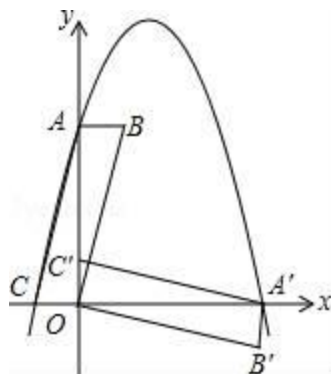
图3

25. 在平面直角坐标系中，平行四边形 $ABOC$ 如图放置，点 A 、 C 的坐标分别是 $(0, 4)$ 、 $(-1, 0)$ ，将此平行四边形绕点 O 顺时针旋转 90° ，得到平行四边形 $A'B'OC'$ 。

(1) 若抛物线经过点 C 、 A 、 A' ，求此抛物线的解析式；

(2) 点 M 是第一象限内抛物线上的一动点，问：当点 M 在何处时， $\triangle AMA'$ 的面积最大？最大面积是多少？并求出此时 M 的坐标；

(3) 若 P 为抛物线上一动点， N 为 x 轴上的一动点，点 Q 坐标为 $(1, 0)$ ，当 P 、 N 、 B 、 Q 构成平行四边形时，求点 P 的坐标，当这个平行四边形为矩形时，求点 N 的坐标。



2016 年山东省东营市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：每小题 3 分，共 30 分

1. $-\frac{1}{2}$ 的倒数是 ()

A. -2 B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【考点】倒数.

【分析】根据倒数的定义求解.

【解答】解： $-\frac{1}{2}$ 的倒数是 -2 .

故选：A.

2. 下列计算正确的是 ()

A. $3a+4b=7ab$ B. $(ab^3)^2=ab^6$ C. $(a+2)^2=a^2+4$ D. $x^{12} \div x^6=x^6$

【考点】同底数幂的除法；合并同类项；幂的乘方与积的乘方；完全平方公式.

【分析】A：根据合并同类项的方法判断即可.

B：根据积的乘方的运算方法判断即可.

C：根据完全平方公式判断即可.

D：根据同底数幂的除法法则判断即可.

【解答】解： $\because 3a+4b \neq 7ab$,

$\therefore$ 选项 A 不正确；

$\because (ab^3)^2=a^2b^6$,

$\therefore$ 选项 B 不正确；

$\because (a+2)^2=a^2+4a+4$,

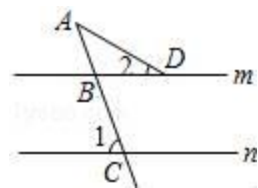
$\therefore$ 选项 C 不正确；

$\because x^{12} \div x^6=x^6$,

$\therefore$ 选项 D 正确.

故选：D.

3. 如图，直线 $m \parallel n$ ， $\angle 1=70^\circ$ ， $\angle 2=30^\circ$ ，则 $\angle A$ 等于 ()



A. 30° B. 35° C. 40° D. 50°

【考点】平行线的性质.

【分析】首先根据平行线的性质求出 $\angle 3$ 的度数, 然后根据三角形的外角的知识求出 $\angle A$ 的度数.

【解答】解: 如图, $\because$ 直线 $m \parallel n$,

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

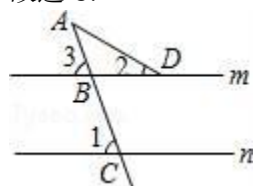
$$\because \angle 1 = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 70^\circ,$$

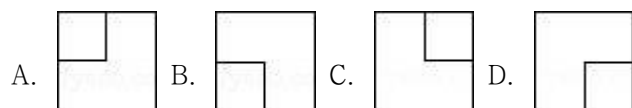
$$\because \angle 3 = \angle 2 + \angle A, \angle 2 = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle A = 40^\circ,$$

故选 C.



4. 从棱长为 $2a$ 的正方体零件的一角, 挖去一个棱长为 a 的小正方体, 得到一个如图所示的零件, 则这个零件的俯视图是 ()



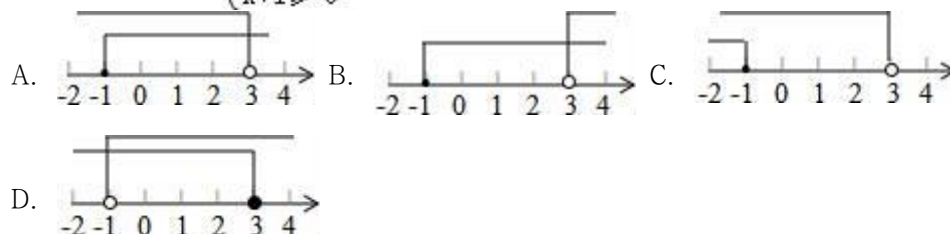
【考点】简单组合体的三视图.

【分析】根据从上面看得到的图形是俯视图, 可得答案.

【解答】解: 从上面看是一个正方形, 正方形的左下角是一个小正方形,

故选: B.

5. 已知不等式组 $\begin{cases} x-3 > 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases}$, 其解集在数轴上表示正确的是 ()



【考点】在数轴上表示不等式的解集; 解一元一次不等式组.

【分析】求出每个不等式的解集, 找出不等式组的解集, 再在数轴上把不等式组的解集表示出来, 即可得出选项.

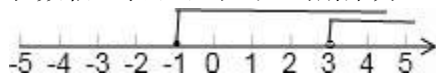
【解答】解：
$$\begin{cases} x-3>0 \text{ ①} \\ x+1\geq 0 \text{ ②} \end{cases}$$

∴解不等式①得： $x>3$,

解不等式②得： $x\geq -1$,

∴不等式组的解集为： $x>3$,

在数轴上表示不等式组的解集为：



故选： B.

6. 东营市某学校组织知识竞赛，共设有 20 道试题，其中有关中国传统文化试题 10 道，实践应用试题 6 道，创新能力试题 4 道. 小婕从中任选一道试题作答，他选中创新能力试题的概率是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{1}{2}$

【考点】 概率公式.

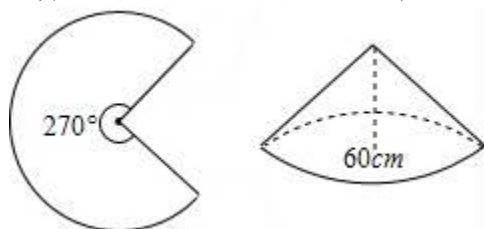
【分析】 直接根据概率公式即可得出结论.

【解答】 解： ∵ 共设有 20 道试题，创新能力试题 4 道，

∴ 他选中创新能力试题的概率 $= \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$.

故选 A.

7. 如图，已知一块圆心角为 270° 的扇形铁皮，用它作一个圆锥形的烟囱帽（接缝忽略不计），圆锥底面圆的直径是 60cm，则这块扇形铁皮的半径是 ()



- A. 40cm B. 50cm C. 60cm D. 80cm

【考点】 圆锥的计算.

【分析】 首先根据圆锥的底面直径求得圆锥的底面周长，然后根据底面周长等于展开扇形的弧长求得铁皮的半径即可.

【解答】 解： ∵ 圆锥的底面直径为 60cm，

∴ 圆锥的底面周长为 60π cm，

∴ 扇形的弧长为 60π cm，

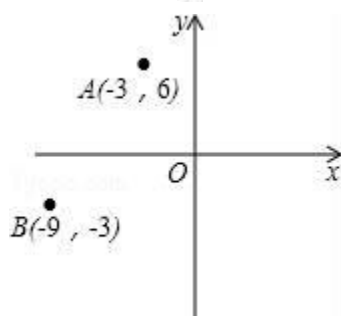
设扇形的半径为 r ，

$$\text{则 } \frac{270\pi r}{180} = 60\pi,$$

解得： $r=40$ cm，

故选 A.

8. 如图，在平面直角坐标系中，已知点 A (-3, 6)，B (-9, -3)，以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{3}$ ，把 $\triangle ABO$ 缩小，则点 A 的对应点 A' 的坐标是 ()



A. (-1, 2) B. (-9, 18) C. (-9, 18) 或 (9, -18) D. (-1, 2) 或 (1, -2)

【考点】位似变换；坐标与图形性质.

【分析】利用位似变换是以原点为位似中心，相似比为 k ，那么位似图形对应点的坐标的比等于 k 或 $-k$ 进行求解.

【解答】解： $\because A(-3, 6)$ ， $B(-9, -3)$ ，以原点 O 为位似中心，相似比为 $\frac{1}{3}$ ，把 $\triangle ABO$ 缩小，

$\therefore$ 点 A 的对应点 A' 的坐标为 $(-3 \times \frac{1}{3}, 6 \times \frac{1}{3})$ 或 $[-3 \times (-\frac{1}{3}), 6 \times (-\frac{1}{3})]$ ，即 A' 点的坐标为 $(-1, 2)$ 或 $(1, -2)$.

故选 D.

9. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB=10$ ， $AC=2\sqrt{10}$ ，BC 边上的高 $AD=6$ ，则另一边 BC 等于 ()

A. 10 B. 8 C. 6 或 10 D. 8 或 10

【考点】勾股定理.

【分析】分两种情况考虑，如图所示，分别在直角三角形 ABC 与直角三角形 ACD 中，利用勾股定理求出 BD 与 CD 的长，即可求出 BC 的长.

【解答】解：根据题意画出图形，如图所示，

如图 1 所示， $AB=10$ ， $AC=2\sqrt{10}$ ， $AD=6$ ，

在 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle ACD$ 中，

根据勾股定理得： $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=8$ ， $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=2$ ，

此时 $BC=BD+CD=8+2=10$ ；

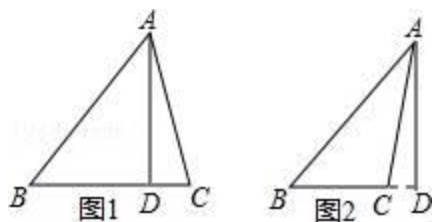
如图 2 所示， $AB=10$ ， $AC=2\sqrt{10}$ ， $AD=6$ ，

在 $Rt\triangle ABD$ 和 $Rt\triangle ACD$ 中，

根据勾股定理得： $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=8$ ， $CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=2$ ，此时 $BC=BD-CD=8-2=6$ ，

则 BC 的长为 6 或 10.

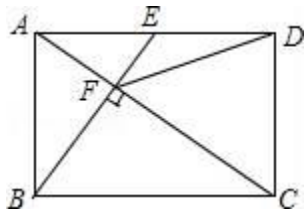
故选 C.



10. 如图，在矩形 ABCD 中，E 是 AD 边的中点，BE ⊥ AC，垂足为点 F，连接 DF，分析下列四个结论：

① $\triangle AEF \sim \triangle CAB$ ；② $CF = 2AF$ ；③ $DF = DC$ ；④ $\tan \angle CAD = \sqrt{2}$.

其中正确的结论有 ()



A. 4 个 B. 3 个 C. 2 个 D. 1 个

【考点】相似形综合题.

【分析】① 四边形 ABCD 是矩形，BE ⊥ AC，则 $\angle ABC = \angle AFB = 90^\circ$ ，又 $\angle BAF = \angle CAB$ ，于是 $\triangle AEF \sim \triangle CAB$ ，故①正确；

② 由 $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$ ，又 $AD \parallel BC$ ，所以 $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{FC} = \frac{1}{2}$ ，故②正确；

③ 过 D 作 $DM \parallel BE$ 交 AC 于 N，得到四边形 BMDE 是平行四边形，求出 $BM = DE = \frac{1}{2}BC$ ，得到 $CN = NF$ ，根据线段的垂直平分线的性质可得结论，故③正确；

④ CD 与 AD 的大小不知道，于是 $\tan \angle CAD$ 的值无法判断，故④错误.

【解答】解：过 D 作 $DM \parallel BE$ 交 AC 于 N，

∵ 四边形 ABCD 是矩形，

∴ $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AD = BC$ ，

∵ BE ⊥ AC 于点 F，

∴ $\angle EAC = \angle ACB$ ， $\angle ABC = \angle AFE = 90^\circ$ ，

∴ $\triangle AEF \sim \triangle CAB$ ，故①正确；

∵ $AD \parallel BC$ ，

∴ $\triangle AEF \sim \triangle CBF$ ，

∴ $\frac{AE}{BC} = \frac{AF}{CF}$ ，

∵ $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BC$ ，

∴ $\frac{AF}{CF} = \frac{1}{2}$ ，

∴ $CF = 2AF$ ，故②正确，

∵ $DE \parallel BM$ ， $BE \parallel DM$ ，

∴ 四边形 BMDE 是平行四边形，

$$\therefore BM=DE=\frac{1}{2}BC,$$

$$\therefore BM=CM,$$

$$\therefore CN=NF,$$

$$\because BE \perp AC \text{ 于点 } F, DM \parallel BE,$$

$$\therefore DN \perp CF,$$

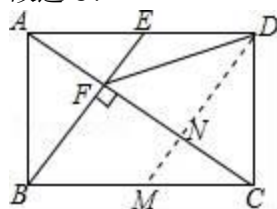
$$\therefore DF=DC, \text{ 故③正确;}$$

$$\text{设 } AD=a, AB=b \text{ 由 } \triangle BAE \sim \triangle ADC, \text{ 有 } \frac{b}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{b}.$$

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{b}{a},$$

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故④错误,}$$

故选 C.



二、填空题：11-14 小题，每小题 3 分，15-18 小题，每小题 3 分

11. 2016 年第一季度，东营市实现生产总值 787.68 亿元，比上年同期提高了 0.9 个百分点，787.68 亿元用科学记数法表示是 7.8768×10^{10} 元.

【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解：将 787.68 亿用科学记数法表示为 7.8768×10^{10} .

故答案为： 7.8768×10^{10} .

$$12. \text{ 分解因式： } a^3 - 16a = a(a+4)(a-4).$$

【考点】提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】先提取公因式 a ，再对余下的多项式利用平方差公式继续分解. 平方差公式： $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

【解答】解： $a^3 - 16a$,

$$= a(a^2 - 16),$$

$$= a(a+4)(a-4).$$

13. 某学习小组有 8 人，在一次数学测验中的成绩分别是：102，115，100，105，92，105，85，104，则他们成绩的平均数是 101.

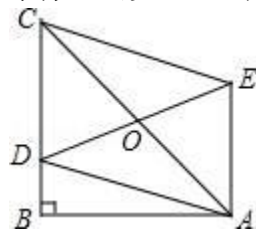
【考点】算术平均数.

【分析】根据算术平均数的计算公式列式计算即可得解.

【解答】解： $\bar{x} = \frac{1}{8} = \frac{1}{8} \times 808 = 101$.

故答案为：101.

14. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle B=90^\circ$ ， $AB=4$ ， $BC>AB$ ，点 D 在 BC 上，以 AC 为对角线的平行四边形 $ADCE$ 中， DE 的最小值是 4.



【考点】平行四边形的性质；垂线段最短；三角形中位线定理.

【分析】首先证明 $BC \parallel AE$ ，当 $DE \perp BC$ 时， DE 最短，只要证明四边形 $ABDE$ 是矩形即可解决问题.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ADCE$ 是平行四边形，

$\therefore BC \parallel AE$,

$\therefore$ 当 $DE \perp BC$ 时， DE 最短，

此时 $\because \angle B=90^\circ$ ，

$\therefore AB \perp BC$,

$\therefore DE \parallel AB$,

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是平行四边形，

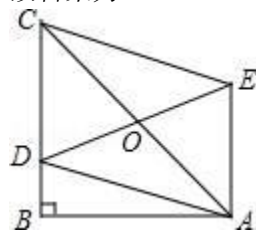
$\because \angle B=90^\circ$ ，

$\therefore$ 四边形 $ABDE$ 是矩形，

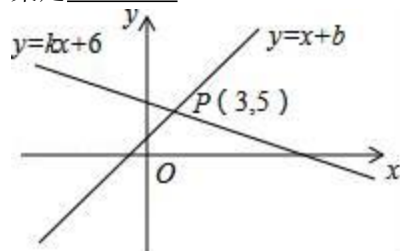
$\therefore DE=AB=4$,

$\therefore DE$ 的最小值为 4.

故答案为 4.



15. 如图，直线 $y=x+b$ 与直线 $y=kx+6$ 交于点 $P(3, 5)$ ，则关于 x 的不等式 $x+b > kx+6$ 的解集是 $x > 3$.



【考点】一次函数与一元一次不等式.

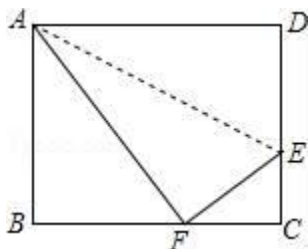
【分析】观察函数图象得到当 $x > 3$ 时，函数 $y = x + b$ 的图象都在 $y = kx + 4$ 的图象上方，所以关于 x 的不等式 $x + b > kx + 4$ 的解集为 $x > 3$.

【解答】解：当 $x > 3$ 时， $x + b > kx + 4$,

即不等式 $x + b > kx + 4$ 的解集为 $x > 3$.

故答案为： $x > 3$.

16. 如图，折叠矩形 $ABCD$ 的一边 AD ，使点 D 落在 BC 边的点 F 处，已知折痕 $AE = 5\sqrt{5}\text{cm}$ ，且 $\tan \angle EFC = \frac{3}{4}$ ，那么矩形 $ABCD$ 的周长为 36 cm .



【考点】矩形的性质；翻折变换（折叠问题）.

【分析】根据 $\tan \angle EFC$ 的值，可设 $CE = 3k$ ，在 $\text{RT}\triangle EFC$ 中可得 $CF = 4k$ ， $EF = DE = 5k$ ，根据 $\angle BAF = \angle EFC$ ，利用三角函数的知识求出 AF ，然后在 $\text{RT}\triangle AEF$ 中利用勾股定理求出 k ，继而代入可得出答案.

【解答】解： $\because \tan \angle EFC = \frac{3}{4}$,

$\therefore$ 设 $CE = 3k$ ，则 $CF = 4k$,

由勾股定理得 $EF = DE = 5k$,

$\therefore DC = AB = 8k$,

$\because \angle AFB + \angle BAF = 90^\circ$ ， $\angle AFB + \angle EFC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BAF = \angle EFC$,

$\therefore \tan \angle BAF = \tan \angle EFC = \frac{3}{4}$,

$\therefore BF = 6k$ ， $AF = BC = AD = 10k$,

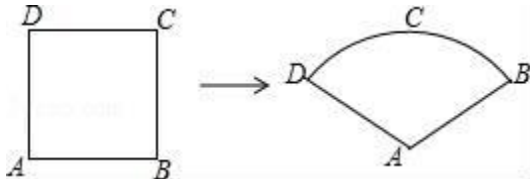
在 $\text{Rt}\triangle AFE$ 中由勾股定理得 $AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{125k^2} = 5\sqrt{5}$,

解得： $k = 1$,

故矩形 $ABCD$ 的周长 $= 2(AB + BC) = 2(8k + 10k) = 36\text{cm}$,

故答案为： 36.

17. 如图，某数学兴趣小组将边长为 5 的正方形铁丝框 $ABCD$ 变形为以 A 为圆心， AB 为半径的扇形（忽略铁丝的粗细），则所得的扇形 ABD 的面积为 25.



【考点】扇形面积的计算.

【分析】根据扇形面积公式： $S = \frac{1}{2} \cdot L \cdot R$ （ L 是弧长， R 是半径），求出弧长 BD ，根据题意

$BD = AD + DC$ ，由此即可解决问题。

【解答】解：由题意 $\widehat{DB} = AD + CD = 10$ ，

$$S_{\text{扇形} ADB} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{BD} \cdot AB = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25,$$

故答案为 25。

18. 在求 $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8$ 的值时，张红发现：从第二个加数起每一个加数都是前一个加数的 3 倍，于是她假设： $S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8$ ①，

然后在①式的两边都乘以 3，得： $3S = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + 3^7 + 3^8 + 3^9$ ②，

② - ①得， $3S - S = 3^9 - 1$ ，即 $2S = 3^9 - 1$ ，

$$\text{随意 } S = \frac{3^9 - 1}{2}.$$

得出答案后，爱动脑筋的张红想：如果把“3”换成字母 m （ $m \neq 0$ 且 $m \neq 1$ ），能否求出

$1 + m + m^2 + m^3 + m^4 + \cdots + m^{2016}$ 的值？如能求出，其正确答案是 $\frac{m^{2017} - 1}{m - 1}$ （ $m \neq 0$ 且 $m \neq 1$ ）。

【考点】规律型：数字的变化类。

【分析】仿照例子，将 3 换成 m ，设 $S = 1 + m + m^2 + m^3 + m^4 + \cdots + m^{2016}$ （ $m \neq 0$ 且 $m \neq 1$ ），则有 $mS = m + m^2 + m^3 + m^4 + \cdots + m^{2017}$ ，二者做差后两边同时除以 $m - 1$ ，即可得出结论。

【解答】解：设 $S = 1 + m + m^2 + m^3 + m^4 + \cdots + m^{2016}$ （ $m \neq 0$ 且 $m \neq 1$ ）①，

将① $\times m$ 得： $mS = m + m^2 + m^3 + m^4 + \cdots + m^{2017}$ ②，

$$\text{由② - ①得：} mS - S = m^{2017} - 1, \text{ 即 } S = \frac{m^{2017} - 1}{m - 1},$$

$$\therefore 1 + m + m^2 + m^3 + m^4 + \cdots + m^{2016} = \frac{m^{2017} - 1}{m - 1} \quad (m \neq 0 \text{ 且 } m \neq 1).$$

$$\text{故答案为：} \frac{m^{2017} - 1}{m - 1} \quad (m \neq 0 \text{ 且 } m \neq 1).$$

三、解答题：共 7 小题，共 62 分

$$19. (1) \text{ 计算：} \left(\frac{1}{2016}\right)^{-1} + (\pi - 3.14)^0 - 2\sin 60^\circ - \sqrt{12} + 1 - 3\sqrt{3};$$

(2) 先化简，再求值：

$$\left(a + 1 - \frac{4a - 5}{a - 1}\right) \div \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2 - a}\right) \sqrt{3}, \text{ 其中 } a = 2 + \sqrt{3}.$$

【考点】分式的化简求值；实数的运算；零指数幂；负整数指数幂；特殊角的三角函数值。

【分析】(1) 分别根据 0 指数幂及负整数指数幂的计算法则、特殊角的三角函数值、绝对值的性质及数的开方法则计算出各数，再根据实数混合运算的法则进行计算即可；

(2) 先算括号里面的，再算除法，最后把 a 的值代入进行计算即可.

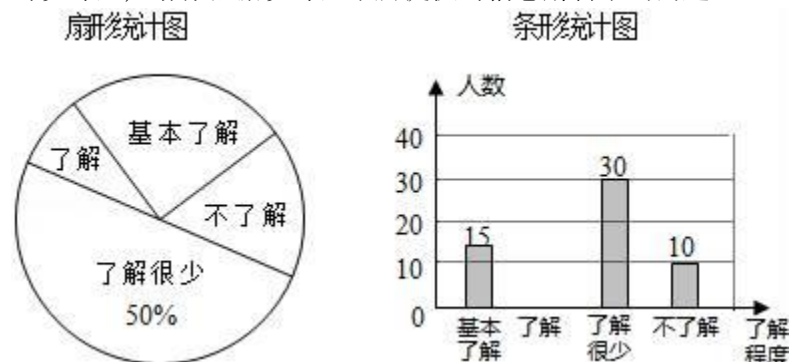
【解答】 解：(1) 原式 $= 2016 + 1 - \sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 1$
 $= 2016$;

$$\begin{aligned} (2) \text{ 原式} &= \frac{a^2 - 1 - 4a + 5}{a - 1} \div \frac{a - 1 - 1}{a(a - 1)} \\ &= \frac{a^2 - 4a + 4}{a - 1} \div \frac{a - 2}{a(a - 1)} \\ &= \frac{(a - 2)^2}{a - 1} \cdot \frac{a(a - 1)}{a - 2} \end{aligned}$$

$= a(a - 2)$.

当 $a = 2 + \sqrt{3}$ 时，原式 $= (2 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3} - 2) = 3 + 2\sqrt{3}$.

20. “校园安全”受到全社会的广泛关注，东营市某中学对部分学生就校园安全知识的了解程度，采用随机抽样调查的方式，并根据收集到的信息进行统计，绘制了如图两幅尚不完整的统计图，请你根据统计图所提供的信息解答下列问题：



(1) 接受问卷调查的学生共有 60 人，扇形统计图中“基本了解”部分所对应扇形的圆心角为 90° ；

(2) 请补全条形统计图；

(3) 若该中学共有学生 900 人，请根据上述调查结果，估计该中学学生中对校园安全知识达到“了解”和“基本了解”程度的总人数；

(4) 若从对校园安全知识达到了“了解”程度的 3 个女生和 2 个男生中随机抽取 2 人参加校园安全知识竞赛，请用树状图或列表法求出恰好抽到 1 个男生和 1 个女生的概率.

【考点】 列表法与树状图法；用样本估计总体；扇形统计图；条形统计图.

【分析】 (1) 由了解很少的有 30 人，占 50%，可求得接受问卷调查的学生数，继而求得扇形统计图中“基本了解”部分所对应扇形的圆心角；

(2) 由 (1) 可求得了解的人数，继而补全条形统计图；

(3) 利用样本估计总体的方法，即可求得答案；

(4) 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与恰好抽到 1 个男生和 1 个女生的情况，再利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】 解：(1) $\because$ 了解很少的有 30 人，占 50%，
 $\therefore$ 接受问卷调查的学生共有： $30 \div 50\% = 60$ (人)；

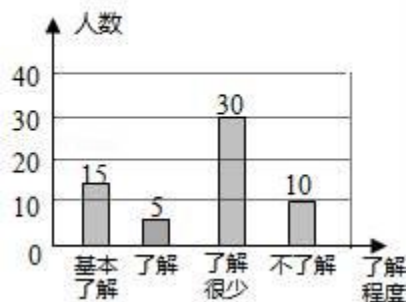
∴ 扇形统计图中“基本了解”部分所对应扇形的圆心角为： $\frac{15}{60} \times 360^\circ = 90^\circ$ ；

故答案为：60， 90° ；

(2) $60 - 15 - 30 - 10 = 5$ ；

补全条形统计图得：

条形统计图



(3) 根据题意得： $900 \times \frac{15+5}{60} = 300$ (人)，

则估计该中学学生中对校园安全知识达到“了解”和“基本了解”程度的总人数为 300 人；

(4) 画树状图得：



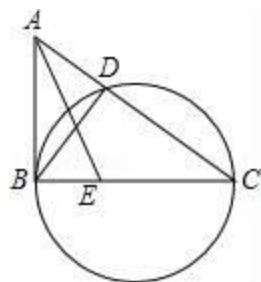
∴ 共有 20 种等可能的结果，恰好抽到 1 个男生和 1 个女生的有 12 种情况，

∴ 恰好抽到 1 个男生和 1 个女生的概率为： $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ 。

21. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，以 BC 为直径的圆交 AC 于点 D ， $\angle ABD = \angle ACB$ 。

(1) 求证： AB 是圆的切线；

(2) 若点 E 是 BC 上一点，已知 $BE=4$ ， $\tan \angle AEB = \frac{5}{3}$ ， $AB:BC=2:3$ ，求圆的直径。



【考点】切线的判定。

【分析】(1) 欲证明 AB 是圆的切线，只要证明 $\angle ABC = 90^\circ$ 即可。

(2) 在 $\text{RT}\triangle AEB$ 中, 根据 $\tan \angle AEB = \frac{5}{3}$, 求出 BC , 在 $\text{RT}\triangle ABC$ 中, 根据 $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ 求出

AB 即可.

【解答】 (1) 证明: $\because BC$ 是直径,

$$\therefore \angle BDC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB + \angle DBC = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABD = \angle ACB,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle DBC = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ABC = 90^\circ$$

$$\therefore AB \perp BC,$$

$\therefore AB$ 是圆的切线.

(2) 解: 在 $\text{RT}\triangle AEB$ 中, $\tan \angle AEB = \frac{5}{3}$,

$$\therefore \frac{AB}{BE} = \frac{5}{3}, \text{ 即 } AB = \frac{5}{3}BE = \frac{20}{3},$$

$$\text{在 } \text{RT}\triangle ABC \text{ 中, } \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore BC = \frac{3}{2}AB = 10,$$

$\therefore$ 圆的直径为 10.

22. 东营市某学校 2015 年在商场购买甲、乙两种不同足球, 购买甲种足球共花费 2000 元, 购买乙种足球共花费 1400 元, 购买甲种足球数量是购买乙种足球数量的 2 倍, 且购买一个乙种足球比购买一个甲种足球多花 20 元.

(1) 求购买一个甲种足球、一个乙种足球各需多少元;

(2) 2016 年为响应习总书记“足球进校园”的号召, 这所学校决定再次购买甲、乙两种足球共 50 个, 恰逢该商场对两种足球的售价进行调整, 甲种足球售价比第一次购买时提高了 10%, 乙种足球售价比第一次购买时降低了 10%, 如果此次购买甲、乙两种足球的总费用不超过 2900 元, 那么这所学校最多可购买多少个乙种足球?

【考点】 分式方程的应用; 一元一次不等式的应用.

【分析】 (1) 设购买一个甲种足球需 x 元, 则购买一个乙种足球需 $(x+20)$, 根据购买甲种足球数量是购买乙种足球数量的 2 倍列出方程解答即可;

(2) 设这所学校再次购买 y 个乙种足球, 根据题意列出不等式解答即可.

【解答】 解: (1) 设购买一个甲种足球需 x 元, 则购买一个乙种足球需 $(x+20)$, 可得:

$$\frac{2000}{x} = 2 \times \frac{1400}{x+20},$$

解得: $x=50$,

经检验 $x=50$ 是原方程的解,

答: 购买一个甲种足球需 50 元, 则购买一个乙种足球需 70 元;

(2) 设这所学校再次购买 y 个乙种足球, 可得: $50 \times (1+10\%) \times (50-y) + 70 \times (1-10\%)y \leq 2900$,

解得: $y \leq 18.75$,

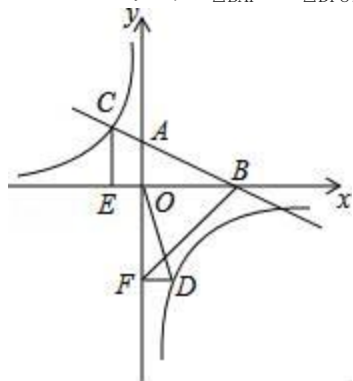
由题意可得, 最多可购买 18 个乙种足球,

答: 这所学校最多可购买 18 个乙种足球.

23. 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 AB 与 x 轴交于点 B, 与 y 轴交于点 A, 与反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象在第二象限交于点 C, $CE \perp x$ 轴, 垂足为点 E, $\tan \angle ABO = \frac{1}{2}$, $OB = 4$, $OE = 2$.

(1) 求反比例函数的解析式;

(2) 若点 D 是反比例函数图象在第四象限上的点, 过点 D 作 $DF \perp y$ 轴, 垂足为点 F, 连接 OD、BF. 如果 $S_{\triangle BAF} = 4S_{\triangle DFO}$, 求点 D 的坐标.



【考点】反比例函数与一次函数的交点问题; 反比例函数系数 k 的几何意义; 反比例函数图象上点的坐标特征.

【分析】(1) 由边的关系可得出 $BE = 6$, 通过解直角三角形可得出 $CE = 3$, 结合函数图象即可得出点 C 的坐标, 再根据点 C 的坐标利用反比例函数图象上点的坐标特征, 即可求出反比例函数系数 m , 由此即可得出结论;

(2) 由点 D 在反比例函数在第四象限的图象上, 设出点 D 的坐标为 $(n, -\frac{6}{n})$ ($n > 0$). 通过解直角三角形求出线段 OA 的长度, 再利用三角形的面积公式利用含 n 的代数式表示出 $S_{\triangle BAF}$, 根据点 D 在反比例函数图形上利用反比例函数系数 k 的几何意义即可得出 $S_{\triangle DFO}$ 的值, 结合题意给出的两三角形的面积间的关系即可得出关于 n 的分式方程, 解方程, 即可得出 n 值, 从而得出点 D 的坐标.

【解答】解: (1) $\because OB = 4$, $OE = 2$,
 $\therefore BE = OB + OE = 6$.
 $\because CE \perp x$ 轴,
 $\therefore \angle CEB = 90^\circ$.

在 $Rt\triangle BEC$ 中, $\angle CEB = 90^\circ$, $BE = 6$, $\tan \angle ABO = \frac{1}{2}$,

$$\therefore CE = BE \cdot \tan \angle ABO = 6 \times \frac{1}{2} = 3,$$

结合函数图象可知点 C 的坐标为 $(-2, 3)$.

$\because$ 点 C 在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象上,

$$\therefore m = -2 \times 3 = -6,$$

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = -\frac{6}{x}.$$

(2) $\because$ 点 D 在反比例函数 $y = -\frac{6}{x}$ 第四象限的图象上,

∴ 设点 D 的坐标为 $(n, -\frac{6}{n})$ ($n > 0$).

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中, $\angle AOB=90^\circ$, $OB=4$, $\tan \angle ABO=\frac{1}{2}$,

∴ $OA=OB \cdot \tan \angle ABO=4 \times \frac{1}{2}=2$.

∴ $S_{\triangle BAF}=\frac{1}{2}AF \cdot OB=\frac{1}{2}(OA+OF) \cdot OB=\frac{1}{2}(2+\frac{6}{n}) \times 4=4+\frac{12}{n}$.

∴ 点 D 在反比例函数 $y=-\frac{6}{x}$ 第四象限的图象上,

∴ $S_{\triangle DFO}=\frac{1}{2} \times |-6|=3$.

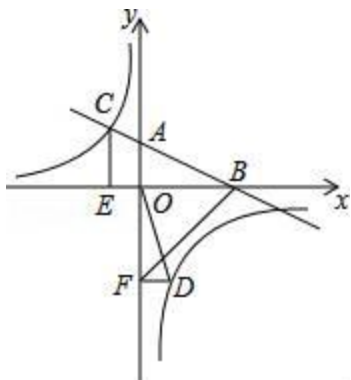
∴ $S_{\triangle BAF}=4S_{\triangle DFO}$,

∴ $4+\frac{12}{n}=4 \times 3$,

解得: $n=\frac{3}{2}$,

经验证, $n=\frac{3}{2}$ 是分式方程 $4+\frac{12}{n}=4 \times 3$ 的解,

∴ 点 D 的坐标为 $(\frac{3}{2}, -4)$.



24. 如图 1, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $\angle BAC=90^\circ$, $AB=AC$, 四边形 ADEF 是正方形, 点 B、C 分别在边 AD、AF 上, 此时 $BD=CF$, $BD \perp CF$ 成立.

(1) 当 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) 时, 如图 2, $BD=CF$ 成立吗? 若成立, 请证明, 若不成立, 请说明理由;

(2) 当 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 45° 时, 如图 3, 延长 BD 交 CF 于点 H.

①求证: $BD \perp CF$;

②当 $AB=2$, $AD=3\sqrt{2}$ 时, 求线段 DH 的长.

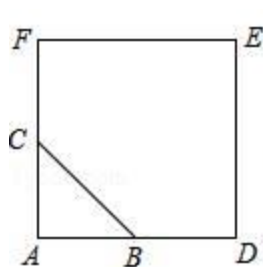


图1

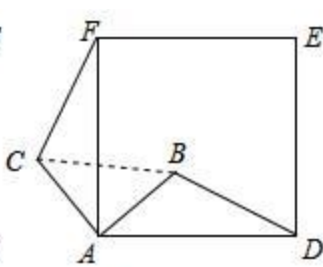


图2

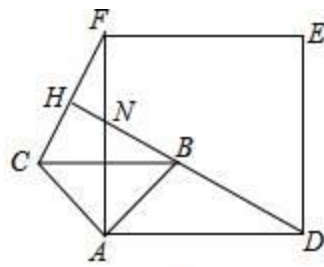


图3

【考点】 四边形综合题.

【分析】 (1) 根据旋转变换的性质和全等三角形的判定定理证明 $\triangle CAF \cong \triangle BAD$, 证明结论;

(2) ①根据全等三角形的性质、垂直的定义证明即可;

②连接 DF, 延长 AB 交 DF 于 M, 根据题意和等腰直角三角形的性质求出 DM、BM 的长, 根据勾股定理求出 BD 的长, 根据相似三角形的性质列出比例式, 计算即可得到答案.

【解答】 解: (1) $BD=CF$.

理由如下: 由题意得, $\angle CAF = \angle BAD = \theta$,

在 $\triangle CAF$ 和 $\triangle BAD$ 中,

$$\begin{cases} CA=BA \\ \angle CAF=\angle BAD, \\ FA=DA \end{cases}$$

$\therefore \triangle CAF \cong \triangle BAD$,

$\therefore BD=CF$;

(2) ①由 (1) 得 $\triangle CAF \cong \triangle BAD$,

$\therefore \angle CFA = \angle BDA$,

$\therefore \angle FNH = \angle DNA$, $\angle DNA + \angle NAD = 90^\circ$,

$\therefore \angle CFA + \angle FNH = 90^\circ$,

$\therefore \angle FHN = 90^\circ$, 即 $BD \perp CF$;

②连接 DF, 延长 AB 交 DF 于 M,

$\because$ 四边形 ADEF 是正方形, $AD = 3\sqrt{2}$, $AB = 2$,

$\therefore AM = DM = 3$, $BM = AM - AB = 1$,

$$DB = \sqrt{DM^2 + BM^2} = \sqrt{10},$$

$\therefore \angle MAD = \angle MDA = 45^\circ$,

$\therefore \angle AMD = 90^\circ$, 又 $\angle DHF = 90^\circ$, $\angle MDB = \angle HDF$,

$\therefore \triangle DMB \sim \triangle DHF$,

$$\therefore \frac{DM}{DH} = \frac{DB}{DF}, \text{ 即 } \frac{3}{DH} = \frac{\sqrt{10}}{6},$$

$$\text{解得, } DH = \frac{9\sqrt{10}}{5}.$$

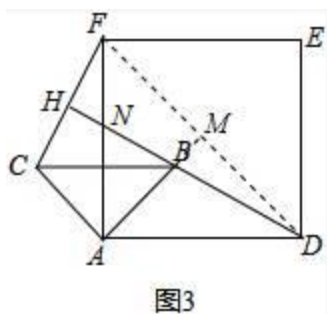


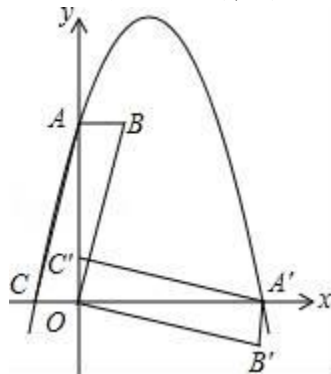
图3

25. 在平面直角坐标系中，平行四边形 ABOC 如图放置，点 A、C 的坐标分别是 (0, 4)、(-1, 0)，将此平行四边形绕点 O 顺时针旋转 90°，得到平行四边形 A'B'OC'.

(1) 若抛物线经过点 C、A、A'，求此抛物线的解析式；

(2) 点 M 是第一象限内抛物线上的一动点，问：当点 M 在何处时，△AMA' 的面积最大？最大面积是多少？并求出此时 M 的坐标；

(3) 若 P 为抛物线上一动点，N 为 x 轴上的一动点，点 Q 坐标为 (1, 0)，当 P、N、B、Q 构成平行四边形时，求点 P 的坐标，当这个平行四边形为矩形时，求点 N 的坐标.



【考点】二次函数综合题.

【分析】(1) 由平行四边形 ABOC 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到平行四边形 A'B'OC'，且点 A 的坐标是 (0, 4)，可求得点 A' 的坐标，然后利用待定系数法即可求得经过点 C、A、A' 的抛物线的解析式；

(2) 首先连接 AA'，设直线 AA' 的解析式为：y=kx+b，利用待定系数法即可求得直线 AA' 的解析式，再设点 M 的坐标为：(x, -x²+3x+4)，继而可得△AMA' 的面积，继而求得答案；

(3) 分别从 BQ 为边与 BQ 为对角线去分析求解即可求得答案.

【解答】解：(1) ∵ 平行四边形 ABOC 绕点 O 顺时针旋转 90°，得到平行四边形 A'B'OC'，且点 A 的坐标是 (0, 4)，

∴ 点 A' 的坐标为：(4, 0)，

∵ 点 A、C 的坐标分别是 (0, 4)、(-1, 0)，抛物线经过点 C、A、A'，

设抛物线的解析式为：y=ax²+bx+c，

$$\therefore \begin{cases} a - b + c = 0 \\ c = 4 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases},$$

∴ 此抛物线的解析式为: $y = -x^2 + 3x + 4$;

(2) 连接 AA' , 设直线 AA' 的解析式为: $y = kx + b$,

$$\therefore \begin{cases} b=4 \\ 4k+b=0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=-1 \\ b=4 \end{cases},$$

∴ 直线 AA' 的解析式为: $y = -x + 4$,

设点 M 的坐标为: $(x, -x^2 + 3x + 4)$,

$$\text{则 } S_{\triangle AMA'} = \frac{1}{2} \times 4 \times [-x^2 + 3x + 4 - (-x + 4)] = -2x^2 + 8x = -2(x - 2)^2 + 8,$$

∴ 当 $x=2$ 时, $\triangle AMA'$ 的面积最大, 最大值 $S_{\triangle AMA'} = 8$,

∴ M 的坐标为: $(2, 6)$;

(3) 设点 P 的坐标为 $(x, -x^2 + 3x + 4)$, 当 P, N, B, Q 构成平行四边形时,

∵ 平行四边形 $ABOC$ 中, 点 A, C 的坐标分别是 $(0, 4), (-1, 0)$,

∴ 点 B 的坐标为 $(1, 4)$,

∵ 点 Q 坐标为 $(1, 0)$, P 为抛物线上一动点, N 为 x 轴上的一动点,

① 当 BQ 为边时, $PN \parallel BQ$, $PN = BQ$,

∵ $BQ = 4$,

∴ $-x^2 + 3x + 4 = \pm 4$,

当 $-x^2 + 3x + 4 = 4$ 时, 解得: $x_1 = 0, x_2 = 3$,

∴ $P_1(0, 4), P_2(3, 4)$;

当 $-x^2 + 3x + 4 = -4$ 时, 解得: $x_3 = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}, x_4 = \frac{3 - \sqrt{41}}{2}$,

∴ $P_3(\frac{3 + \sqrt{41}}{2}, -4), P_4(\frac{3 - \sqrt{41}}{2}, -4)$;

② 当 PQ 为对角线时, $BP \parallel QN$, $BP = QN$, 此时 P 与 P_1, P_2 重合;

综上所述: 点 P 的坐标为: $P_1(0, 4), P_2(3, 4), P_3(\frac{3 + \sqrt{41}}{2}, -4), P_4(\frac{3 - \sqrt{41}}{2}, -4)$;

如图 2, 当这个平行四边形为矩形时, 点 N 的坐标为: $(0, 0)$ 或 $(3, 0)$.

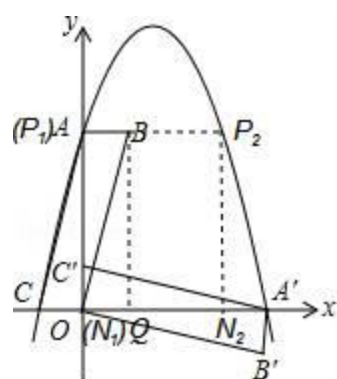


图2

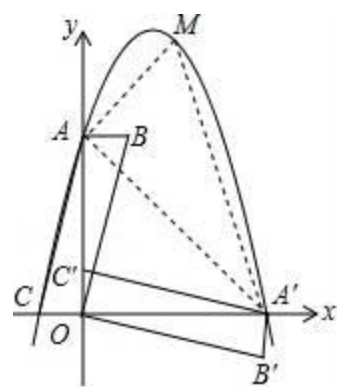


图1