

2015 年山东省烟台市中考数学试卷

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）每小题都给出标号为 A、B、C、D 四个备选答案，其中并且只有一个是正确的

1. (3 分) (2015•烟台) $-\frac{2}{3}$ 的相反数是 ()

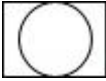
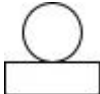
- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

2. (3 分) (2015•烟台) 剪纸是我国最古老民间艺术之一，被列入第四批《人类非物质文化遗产代表作名录》，下列剪纸作品中，是中心对称图形但不是轴对称图形的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

3. (3 分) (2015•烟台) 如图，将一个圆柱体放置在长方体上，其中圆柱体的底面直径与长方体的宽相平，则该几何体的左视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

4. (3 分) (2015•烟台) 下列等式不一定成立的是 ()

- A. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$) B. $a^3 \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^2}$ ($a \neq 0$)
C. $a^2 - 4b^2 = (a+2b)(a-2b)$ D. $(-2a^3)^2 = 4a^6$

5. (3 分) (2015•烟台) 丽华根据演讲比赛中九位评委所给的分数作了如下表格

平均数	中位数	众数	方差
8.5	8.3	8.1	0.15

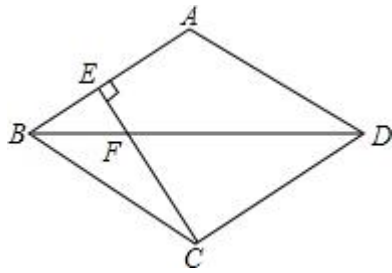
如果去掉一个最高分和一个最低分，则表中数据一定不发生变化的是 ()

- A. 平均数 B. 众数 C. 方差 D. 中位数

6. (3 分) (2015•烟台) 如果 $x^2 - x - 1 = (x+1)^0$ ，那么 x 的值为 ()

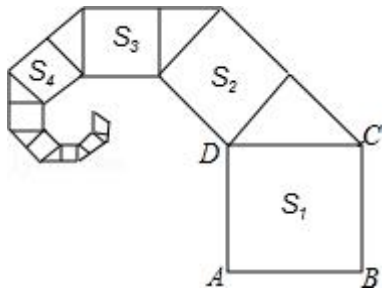
- A. 2 或 -1 B. 0 或 1 C. 2 D. -1

7. (3 分) (2015•烟台) 如图，BD 是菱形 ABCD 的对角线，CE ⊥ AB 交于点 E，交 BD 于点 F，且点 E 是 AB 中点，则 $\tan \angle BFE$ 的值是 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

8. (3分) (2015•烟台) 如图, 正方形 ABCD 的边长为 2, 其面积标记为 S_1 , 以 CD 为斜边作等腰直角三角形, 以该等腰直角三角形的一条直角边为边向外作正方形, 其面积标记为 S_2 , ... 按照此规律继续下去, 则 S_{2015} 的值为 ()

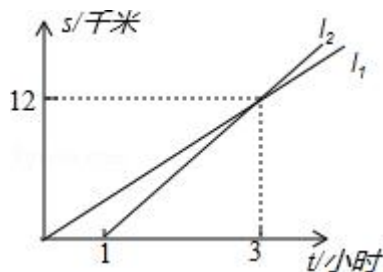


- A. $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2012}$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2013}$ C. $(\frac{1}{2})^{2012}$ D. $(\frac{1}{2})^{2013}$

9. (3分) (2015•烟台) 等腰直角三角形边长分别为 a , b , 2, 且 a , b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + n - 1 = 0$ 的两根, 则 n 的值为 ()

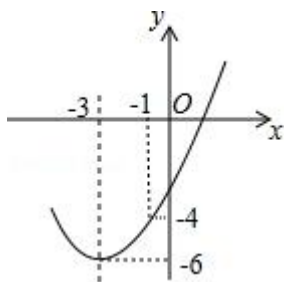
- A. 9 B. 10 C. 9 或 10 D. 8 或 10

10. (3分) (2015•烟台) A、B 两地相距 20 千米, 甲、乙两人都从 A 地去 B 地, 图中 l_1 和 l_2 分别表示甲、乙两人所走路程 s (千米) 与时间 t (小时) 之间的关系, 下列说法: ①乙晚出发 1 小时; ②乙出发 3 小时后追上甲; ③甲的速度是 4 千米/小时; ④乙先到达 B 地. 其中正确的个数是 ()



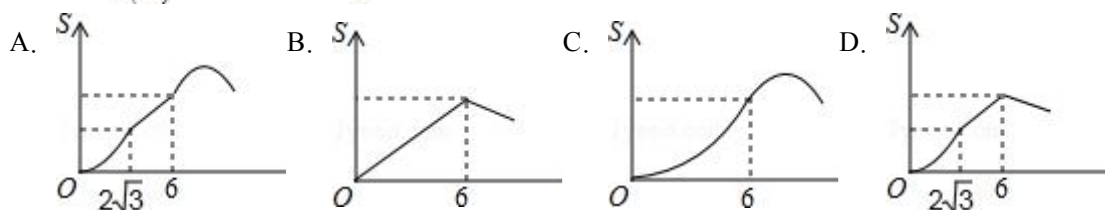
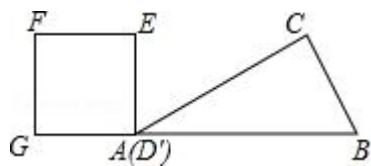
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

11. (3分) (2015•烟台) 如图, 已知顶点为 $(-3, -6)$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, -4)$, 则下列结论中错误的是 ()



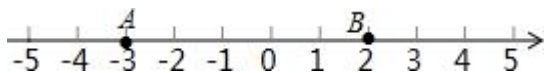
- A. $b^2 > 4ab$
- B. $ax^2 + bx + c \geq -6$
- C. 若点 $(-2, m)$, $(-5, n)$ 在抛物线上, 则 $m > n$
- D. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = -4$ 的两根为 -5 和 -1

12. (3分) (2015•烟台) 如图, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$, $\angle BAC=30^\circ$, $AB=8$, 以 $2\sqrt{3}$ 为边长的正方形 $DEFG$ 的一边 CD 在直线 AB 上, 且点 D 与点 A 重合, 现将正方形 $DEFG$ 沿 $A-B$ 的方向以每秒 1 个单位的速度匀速运动, 当点 D 与点 B 重合时停止, 则在这个运动过程中, 正方形 $DEFG$ 与 $\triangle ABC$ 的重合部分的面积 S 与运动时间 t 之间的函数关系图象大致是 ()



二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

13. (3分) (2015•烟台) 如图, 数轴上点 A 、 B 所表示的两个数的和的绝对值是_____.



14. (3分) (2015•烟台) 正多边形的一个外角是 72° , 则这个多边形的内角和的度数是_____.

15. (3分) (2015•烟台) 如图, 有四张不透明的卡片除正面的函数关系式不同外, 其余相同, 将它们背面朝上洗匀后, 从中抽取一张卡片, 则抽到函数图象不经过第四象限的卡片的概率为_____.

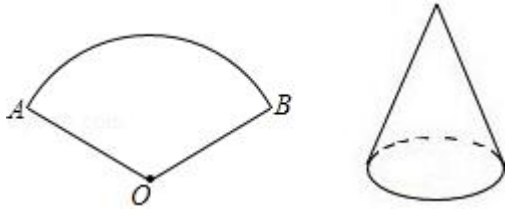
$$y = \frac{1}{x}$$

$$y = -x$$

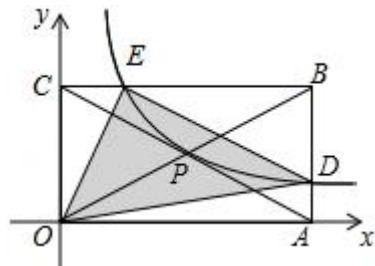
$$y = x^2$$

$$y = 2x + 1$$

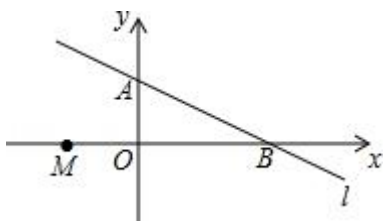
16. (3分) (2015•烟台) 如图, 将弧长为 6π , 圆心角为 120° 的圆形纸片 AOB 围成圆锥形纸帽, 使扇形的两条半径 OA 与 OB 重合 (粘连部分忽略不计) 则圆锥形纸帽的高是_____.



17. (3分) (2015•烟台) 如图, 矩形 OABC 的顶点 A、C 的坐标分别是 (4, 0) 和 (0, 2), 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过对角线的交点 P 并且与 AB, BC 分别交于 D, E 两点, 连接 OD, OE, DE, 则 $\triangle ODE$ 的面积为_____.



18. (3分) (2015•烟台) 如图, 直线 $l: y = -\frac{1}{2}x + 1$ 与坐标轴交于 A, B 两点, 点 M ($m, 0$) 是 x 轴上一动点, 以点 M 为圆心, 2 个单位长度为半径作 $\odot M$, 当 $\odot M$ 与直线 l 相切时, 则 m 的值为_____.

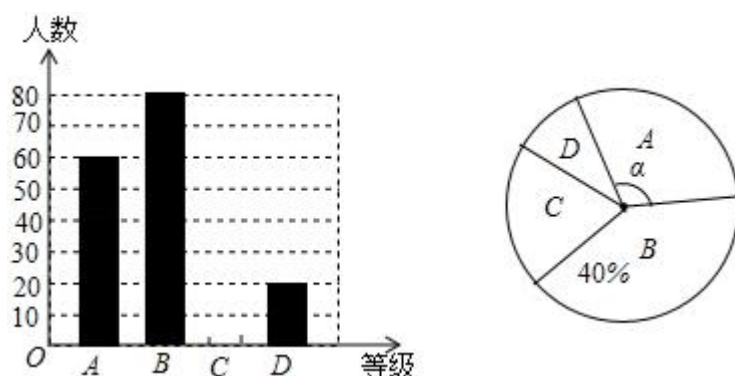


三、解答题 (本大题共 7 小题, 满分 66 分)

19. (6分) (2015•烟台) 先化简: $\frac{x^2+x}{x^2-2x+1} \div (\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x})$, 再从 $-2 < x < 3$ 的范围内选取一个你最喜欢的值代入, 求值.

20. (8 分) (2015•烟台) ”切实减轻学生课业负担”是我市作业改革的一项重要举措. 某中学为了解本校学生平均每天的课外作业时间, 随机抽取部分学生进行问卷调查, 并将调查结果分为 A、B、C、D 四个等级, A: 1 小时以内; B: 1 小时 – 1.5 小时; C: 1.5 小时 – 2 小时; D: 2 小时以上. 根据调查结果绘制了如图所示的两种不完整的统计图, 请根据图中信息解答下列问题:

- (1) 该校共调查了_____学生;
- (2) 请将条形统计图补充完整;
- (3) 表示等级 A 的扇形圆心角 α 的度数是_____;
- (4) 在此次调查问卷中, 甲、乙两班各有 2 人平均每天课外作业量都是 2 小时以上, 从这 4 人中人选 2 人去参加座谈, 用列表表或画树状图的方法求选出的 2 人来自不同班级的概率.



21. (8 分) (2015•烟台) 2014 年 12 月 28 日“青烟威荣”城际铁路正式开通, 从烟台到北京的高铁里程比普快里程缩短了 81 千米, 运行时间减少了 9 小时, 已知烟台到北京的普快列车里程约为 1026 千米, 高铁平均时速为普快平均时速的 2.5 倍.

- (1) 求高铁列车的平均时速;
- (2) 某日王老师要去距离烟台大约 630 千米的某市参加 14: 00 召开的会议, 如果他买到当日 8: 40 从烟台至城市的高铁票, 而且从该市火车站到会议地点最多需要 1.5 小时, 试问在高铁列车准点到达的情况下他能在开会之前到达吗?

22. (9 分) (2015•烟台) 如图 1, 滨海广场装有风能、太阳能发电的风光互补环保路灯, 灯杆顶端装有风力发电机, 中间装有太阳能板, 下端装有路灯. 该系统工作过程中某一时刻的截面图如图 2, 已知太阳能板的支架 BC 垂直于灯杆 OF , 路灯顶端 E 距离地面 6 米, $DE=1.8$ 米, $\angle CDE=60^\circ$. 且根据我市的地理位置设定太阳能板 AB 的倾斜角为 43° . $AB=1.5$ 米, $CD=1$ 米, 为保证长为 1 米的风力发电机叶片无障碍安全旋转, 对叶片与太阳能板顶端 A 的最短距离不得少于 0.5 米, 求灯杆 OF 至少要多高? (利用科学计算器可求得 $\sin 43^\circ \approx 0.6820$, $\cos 43^\circ \approx 0.7314$, $\tan 43^\circ \approx 0.9325$, 结果保留两位小数)



图1

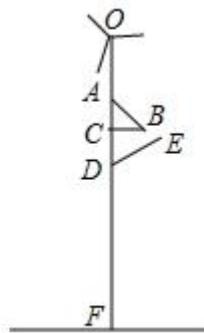
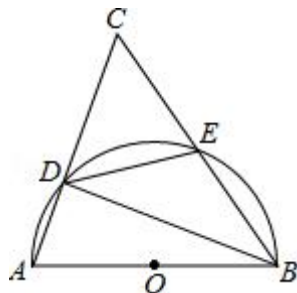


图2

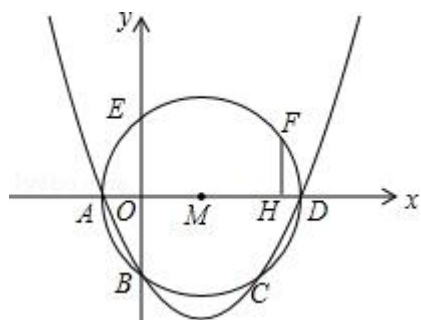
23. (9 分) (2015•烟台) 如图, 以 $\triangle ABC$ 的一边 AB 为直径的半圆与其它两边 AC , BC 的交点分别为 D , E , 且 $\widehat{DE} = \widehat{BE}$.

- (1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由.
- (2) 已知半圆的半径为 5, $BC=12$, 求 $\sin \angle ABD$ 的值.



24. (12 分) (2015•烟台) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $\odot M$ 相交于 A、B、C、D 四点, 其中 A、B 两点的坐标分别为 $(-1, 0)$, $(0, -2)$, 点 D 在 x 轴上且 AD 为 $\odot M$ 的直径. 点 E 是 $\odot M$ 与 y 轴的另一个交点, 过劣弧 $\widehat{ED}$ 上的点 F 作 $FH \perp AD$ 于点 H, 且 $FH=1.5$

- (1) 求点 D 的坐标及该抛物线的表达式;
- (2) 若点 P 是 x 轴上的一个动点, 试求出 $\triangle PEF$ 的周长最小时点 P 的坐标;
- (3) 在抛物线的对称轴上是否存在点 Q, 使 $\triangle QCM$ 是等腰三角形? 如果存在, 请直接写出点 Q 的坐标; 如果不存在, 请说明理由.



25. (14 分) (2015•烟台) 【问题提出】

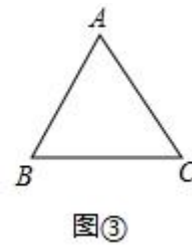
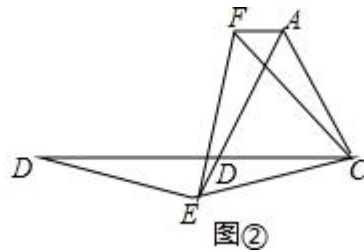
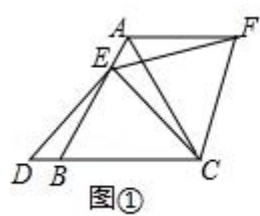
如图①, 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 点 E 在线段 AB 上, 点 D 在直线 BC 上, 且 $ED=EC$, 将 $\triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$ 连接 EF

试证明: $AB=DB+AF$

【类比探究】

(1) 如图②, 如果点 E 在线段 AB 的延长线上, 其他条件不变, 线段 AB , DB , AF 之间又有怎样的数量关系? 请说明理由

(2) 如果点 E 在线段 BA 的延长线上, 其他条件不变, 请在图③的基础上将图形补充完整, 并写出 AB , DB , AF 之间的数量关系, 不必说明理由.



2015 年山东省烟台市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）每小题都给出标号为 A、B、C、D 四个备选答案，其中并且只有一个是正确的

1. (3 分) (2015•烟台) $-\frac{2}{3}$ 的相反数是 ()

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

考点: 相反数.

分析: 根据只有符号不同的两个数叫做互为相反数解答.

解答: 解: $-\frac{2}{3}$ 的相反数是 $\frac{2}{3}$.

故选 B.

点评: 本题考查了相反数的定义, 是基础题, 熟记概念是解题的关键.

2. (3 分) (2015•烟台) 剪纸是我国最古老民间艺术之一, 被列入第四批《人类非物质文化遗产代表作名录》, 下列剪纸作品中, 是中心对称图形但不是轴对称图形的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

考点: 中心对称图形; 轴对称图形.

分析: 根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

解答: 解: A、是轴对称图形, 不是中心对称图形. 故错误;

B、是轴对称图形, 也是中心对称图形. 故错误;

C、不是轴对称图形, 也不是中心对称图形. 故错误;

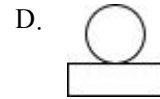
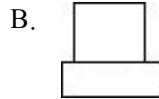
D、不是轴对称图形, 是中心对称图形. 故正确.

故选 D.

点评: 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念: 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分沿对称轴折叠后可重合; 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180 度后与

原图重合.

3. (3分) (2015•烟台) 如图, 将一个圆柱体放置在长方体上, 其中圆柱体的底面直径与长方体的宽相平, 则该几何体的左视图是 ()



考点: 简单组合体的三视图.

分析: 找到从左面看所得到的图形即可, 注意所有的看到的棱都应表现在左视图中.

解答:



解: 从左面看易得左视图为:

故选 A.

点评: 本题考查了三视图的知识, 左视图是从物体的左面看得到的视图.

4. (3分) (2015•烟台) 下列等式不一定成立的是 ()

A. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($b \neq 0$)

B. $a^3 \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^2}$ ($a \neq 0$)

C. $a^2 - 4b^2 = (a+2b)(a-2b)$

D. $(-2a^3)^2 = 4a^6$

考点: 二次根式的乘除法; 幂的乘方与积的乘方; 因式分解-运用公式法; 负整数指数幂.

分析: 分别利用二次根式的性质以及负整数指数幂的性质和平方差公式以及积的乘方运算法则化简求出即可.

解答: 解: A、 $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ($a \geq 0, b > 0$), 故此选项错误, 符合题意;

B、 $a^3 \cdot a^{-5} = \frac{1}{a^2}$ ($a \neq 0$), 正确, 不合题意;

C、 $a^2 - 4b^2 = (a+2b)(a-2b)$, 正确, 不合题意;

D、 $(-2a^3)^2 = 4a^6$, 正确, 不合题意.

故选: A.

点评: 此题主要考查了二次根式的性质以及负整数指数幂的性质和平方差公式以及积的乘方运算法则等知识, 正确掌握运算法则是解题关键.

5. (3 分) (2015•烟台) 丽华根据演讲比赛中九位评委所给的分数作了如下表格

平均数	中位数	众数	方差
8.5	8.3	8.1	0.15

如果去掉一个最高分和一个最低分, 则表中数据一定不发生变化的是 ()

- A. 平均数 B. 众数 C. 方差 D. 中位数

考点: 统计量的选择.

分析: 根据中位数的定义: 位于中间位置或中间两数的平均数可以得到去掉一个最高分和一个最低分不影响中位数.

解答: 解: 去掉一个最高分和一个最低分对中位数没有影响,
故选 D.

点评: 本题考查了统计量的选择, 解题的关键是了解中位数的定义, 难度不大.

6. (3 分) (2015•烟台) 如果 $x^2 - x - 1 = (x+1)^0$, 那么 x 的值为 ()

- A. 2 或 -1 B. 0 或 1 C. 2 D. -1

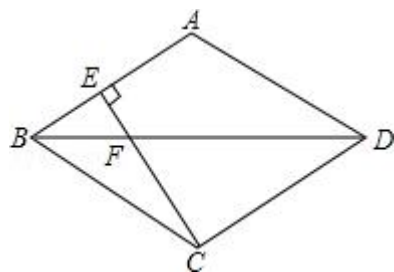
考点: 解一元二次方程-因式分解法; 零指数幂.

分析: 首先利用零指数幂的性质整理一元二次方程, 进而利用因式分解法解方程得出即可.

解答: 解: $\because x^2 - x - 1 = (x+1)^0$,
 $\therefore x^2 - x - 1 = 1$,
即 $(x - 2)(x + 1) = 0$,
解得: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$,
当 $x = -1$ 时, $x + 1 = 0$, 故 $x \neq -1$,
故选: C.

点评: 此题主要考查了因式分解法解一元二次方程以及零指数幂的性质, 注意 $x + 1 \neq 0$ 是解题关键.

7. (3分) (2015•烟台) 如图, BD 是菱形 ABCD 的对角线, $CE \perp AB$ 交于点 E, 交 BD 于点 F, 且点 E 是 AB 中点, 则 $\tan \angle BFE$ 的值是 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

考点: 菱形的性质; 解直角三角形.

分析: 首先利用菱形的性质得出 $AB=BC$, 即可得出 $\angle ABC=60^\circ$, 再利用三角函数得出答案.

解答: 解: $\because$ 四边形 ABCD 是菱形,

$$\therefore AB=BC,$$

$$\because CE \perp AB, \text{ 点 E 是 AB 中点,}$$

$$\therefore \angle ABC=60^\circ,$$

$$\therefore \angle EBF=30^\circ,$$

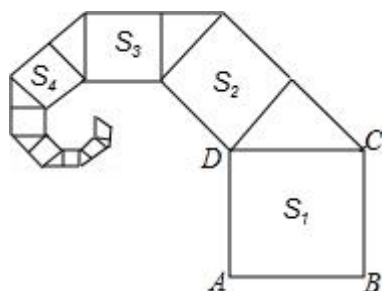
$$\therefore \angle BFE=60^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle BFE \text{ 的值为 } \sqrt{3}.$$

故选 D.

点评: 此题考查菱形的性质, 关键是根据含 30° 的直角三角形的性质和三角函数解答.

8. (3分) (2015•烟台) 如图, 正方形 ABCD 的边长为 2, 其面积标记为 S_1 , 以 CD 为斜边作等腰直角三角形, 以该等腰直角三角形的一条直角边为边向外作正方形, 其面积标记为 S_2 , ... 按照此规律继续下去, 则 S_{2015} 的值为 ()



- A. $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2012}$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2})^{2013}$ C. $(\frac{1}{2})^{2012}$ D. $(\frac{1}{2})^{2013}$

考点: 等腰直角三角形; 正方形的性质.

专题: 规律型.

分析: 根据题意可知第 2 个正方形的边长是 $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2$, 则第 3 个正方形的边长是

$$(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times 2, \dots, \text{进而可找出规律, 第 } n \text{ 个正方形的边长是 } (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1} \times 2,$$

那么易求 S_{2015} 的值.

解答: 解: 根据题意: 第一个正方形的边长为 2;

$$\text{第二个正方形的边长为: } \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2;$$

$$\text{第三个正方形的边长为: } (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 \times 2,$$

...

$$\text{第 } n \text{ 个正方形的边长是 } (\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-1} \times 2,$$

$$\text{所以 } S_{2015} \text{ 的值是 } (\frac{1}{2})^{2012},$$

故选 C

点评: 本题考查了正方形的性质、等腰直角三角形的性质、勾股定理. 解题的关键是找出第 n 个正方形的边长.

9. (3 分) (2015•烟台) 等腰直角三角形边长分别为 a , b , 2, 且 a , b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + n - 1 = 0$ 的两根, 则 n 的值为

()

- A. 9 B. 10 C. 9 或 10 D. 8 或 10

考点: 根的判别式; 一元二次方程的解; 等腰直角三角形.

分析: 由三角形是等腰直角三角形, 得到① $a=2$, 或 $b=2$, ② $a=b$ ①当 $a=2$, 或 $b=2$ 时, 得到方程的根 $x=2$, 把 $x=2$ 代入 $x^2 - 6x + n - 1 = 0$ 即可得到结果; ②当 $a=b$ 时, 方程 $x^2 - 6x + n - 1 = 0$ 有两个相等的实数根, 由 $\Delta = (-6)^2 - 4(n-1) = 0$ 可的结果.

解答: 解: $\because$ 三角形是等腰直角三角形,

∴ ① $a=2$ ，或 $b=2$ ，② $a=b$ 两种情况，

①当 $a=2$ ，或 $b=2$ 时，

∵ a, b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + n - 1 = 0$ 的两根，

∴ $x=2$ ，

把 $x=2$ 代入 $x^2 - 6x + n - 1 = 0$ 得， $2^2 - 6 \times 2 + n - 1 = 0$ ，

解得： $n=9$ ，

当 $n=9$ ，方程的两根是 2 和 4，而 2，4，2 不能组成三角形，

故 $n=9$ 不合题意，

②当 $a=b$ 时，方程 $x^2 - 6x + n - 1 = 0$ 有两个相等的实数根，

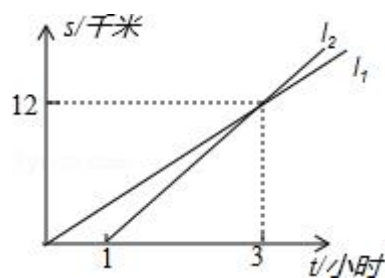
∴ $\Delta = (-6)^2 - 4(n-1) = 0$

解得： $n=10$ ，

故选 B.

点评： 本题考查了等腰直角三角形的性质，一元二次方程的根，一元二次方程根的判别式，注意分类讨论思想的应用.

10. (3 分) (2015•烟台) A、B 两地相距 20 千米，甲、乙两人都从 A 地去 B 地，图中 l_1 和 l_2 分别表示甲、乙两人所走路程 s (千米) 与时间 t (小时) 之间的关系，下列说法：①乙晚出发 1 小时；②乙出发 3 小时后追上甲；③甲的速度是 4 千米/小时；④乙先到达 B 地. 其中正确的个数是 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

考点： 一次函数的应用.

分析： 观察函数图象，从图象中获取信息，根据速度，路程，时间三者之间的关系求得结果.

解答： 解：由函数图象可知，乙比甲晚出发 1 小时，故①正确；

乙出发 $3 - 1 = 2$ 小时后追上甲，故②错误；

甲的速度为： $12 \div 3 = 4$ (千米/小时)，故③正确；

乙的速度为： $12 \div (3 - 1) = 6$ (千米/小时)，

则甲到达 B 地用的时间为： $20 \div 4 = 5$ (小时)，

乙到达 B 地用的时间为： $20 \div 6 = 3\frac{1}{3}$ (小时)，

$$1 + 3\frac{1}{3} = 4\frac{1}{3} < 5,$$

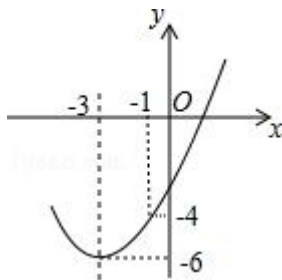
$\therefore$ 乙先到达 B 地，故④正确；

正确的有 3 个.

故选： C.

点评： 本题考查了一次函数的应用，解决本题的关键是读懂函数图象，获取相关信息.

11. (3 分) (2015•烟台) 如图，已知顶点为 $(-3, -6)$ 的抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 $(-1, -4)$ ，则下列结论中错误的是 ()



- A. $b^2 > 4ac$
- B. $ax^2 + bx + c \geq -6$
- C. 若点 $(-2, m)$ ， $(-5, n)$ 在抛物线上，则 $m > n$
- D. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = -4$ 的两根为 -5 和 -1

考点： 二次函数图象与系数的关系；二次函数图象上点的坐标特征；抛物线与 x 轴的交点；二次函数与不等式 (组).

分析： 由抛物线与 x 轴有两个交点则可对 A 进行判断；由于抛物线开口向上，有最小值则可对 B 进行判断；根据抛物线上的点离对称轴的远近，则可对 C 进行判断；根据二次函数的对称性可对 D 进行判断.

解答： 解： A、图象与 x 轴有两个交点，方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 有两个不相等的实数根， $b^2 - 4ac > 0$ 所以 $b^2 > 4ac$ ，故 A 选项正确；

B、抛物线的开口向上，函数有最小值，因为抛物线的最小值为 -6 ，所以 $ax^2+bx+c \geq -6$ ，故 B 选项正确；

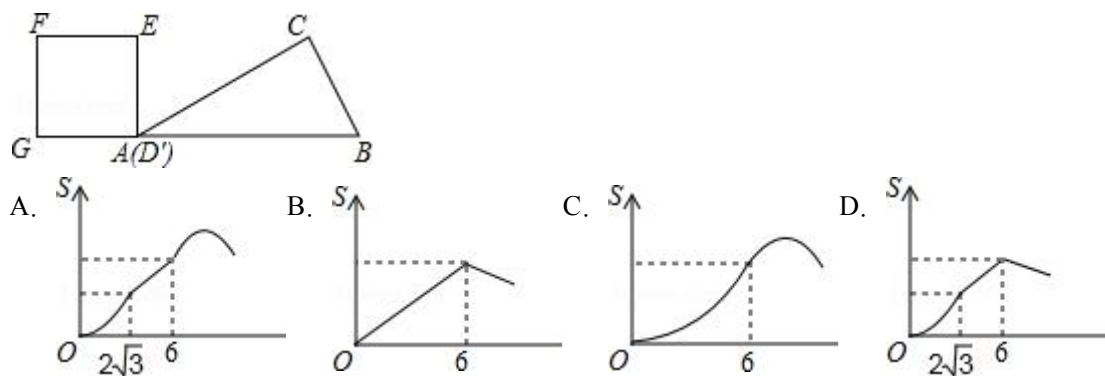
C、抛物线的对称轴为直线 $x = -3$ ，因为 -5 离对称轴的距离大于 -2 离对称轴的距离，所以 $m < n$ ，故 C 选项错误；

D、根据抛物线的对称性可知， $(-1, -4)$ 关于对称轴的对称点为 $(-5, -4)$ ，所以关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c = -4$ 的两根为 -5 和 -1 ，故 D 选项正确。

故选 C.

点评: 本题考查了二次函数图象与系数的关系，二次函数图象上点的坐标特征，抛物线与 x 轴的交点远近二次函数与不等式的关系.

12. (3 分) (2015•烟台) 如图， $Rt\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$ ， $\angle BAC=30^\circ$ ， $AB=8$ ，以 $2\sqrt{3}$ 为边长的正方形 DEFG 的一边 CD 在直线 AB 上，且点 D 与点 A 重合，现将正方形 DEFG 沿 A-B 的方向以每秒 1 个单位的速度匀速运动，当点 D 与点 B 重合时停止，则在这个运动过程中，正方形 DEFG 与 $\triangle ABC$ 的重合部分的面积 S 与运动时间 t 之间的函数关系图象大致是 ()



考点: 动点问题的函数图象.

分析: 首先根据 $Rt\triangle ABC$ 中 $\angle C=90^\circ$ ， $\angle BAC=30^\circ$ ， $AB=8$ ，分别求出 AC 、 BC ，以及 AB 边上的高各是多少；然后根据图示，分三种情况：(1) 当 $0 \leq t \leq 2\sqrt{3}$ 时；(2) 当 $2\sqrt{3} < t \leq 6$ 时；(3) 当 $6 < t \leq 8$ 时；分别求出正方形 DEFG 与 $\triangle ABC$ 的重合部分的面积 S 的表达式，进而判断出正方形 DEFG 与 $\triangle ABC$ 的重合部分的面积 S 与运动时间 t 之间的函数关系图象大致是哪个即可.

解答:

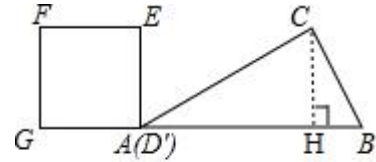


图1

解: 如图 1, CH 是 AB 边上的高, 与 AB 相交于点 H,

$$\because \angle C=90^{\circ}, \angle BAC=30^{\circ}, AB=8,$$

$$\therefore AC=AB \times \cos 30^{\circ}=8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=4 \sqrt{3}, BC=AB \times \sin 30^{\circ}=8 \times \frac{1}{2}=4,$$

$$\therefore CH=AC \times BC \div AB=4 \sqrt{3} \times 4 \div 8=2 \sqrt{3}, AH=AC^2 \div AB=(4 \sqrt{3})^2 \div 8=6,$$

(1) 当 $0 \leq t \leq 2 \sqrt{3}$ 时,

$$S=\frac{1}{2} t \cdot (t \cdot \tan 30^{\circ})=\frac{\sqrt{3}}{6} t^2;$$

(2) 当 $2 \sqrt{3} < t \leq 6$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} t \cdot (t \cdot \tan 30^{\circ}) - \frac{1}{2} (t - 2 \sqrt{3}) \cdot [(t - 2 \sqrt{3}) \cdot \tan 30^{\circ}] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{6} t^2 - \frac{\sqrt{3}}{6} [t^2 - 4 \sqrt{3} t + 12] \\ &= 2t - 2 \sqrt{3} \end{aligned}$$

(3) 当 $6 < t \leq 8$ 时,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times [(t - 2 \sqrt{3}) \cdot \tan 30^{\circ} + 2 \sqrt{3}] \times [6 - (t - 2 \sqrt{3})] + \frac{1}{2} \times [(8 - t) \cdot \tan 60^{\circ} + 2 \sqrt{3}] \times \\ &\quad (t - 6) \\ &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{\sqrt{3}}{3} t + 2 \sqrt{3} - 2 \right] \times [-t + 2 \sqrt{3} + 6] + \frac{1}{2} \times [-\sqrt{3} t + 10 \sqrt{3}] \times (t - 6) \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6} t^2 + 2t + 6 \sqrt{3} - 6 - \frac{\sqrt{3}}{2} t^2 + 8 \sqrt{3} t - 30 \sqrt{3} \\ &= -\frac{2 \sqrt{3}}{3} t^2 + (2 + 8 \sqrt{3}) t - 6 - 24 \sqrt{3} \end{aligned}$$

综上, 可得

$$S = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{6} t^2, & 0 \leq t \leq 2 \sqrt{3} \\ 2t - 2 \sqrt{3}, & 2 \sqrt{3} < t \leq 6 \\ -\frac{2 \sqrt{3}}{3} t^2 + (2 + 8 \sqrt{3}) t - 6 - 24 \sqrt{3}, & 6 < t \leq 8 \end{cases}$$

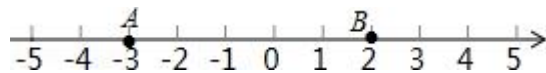
∴正方形DEFG与△ABC的重合部分的面积S与运动时间t之间的函数关系图象大致是A图象.

故选: A.

点评: (1) 此题主要考查了动点问题的函数图象, 解答此类问题的关键是通过看图获取信息, 并能解决生活中的实际问题, 用图象解决问题时, 要理清图象的含义即学会识图.
(2) 此题还考查了直角三角形的性质和应用, 以及三角形、梯形的面积的求法, 要熟练掌握.

二、填空题 (本大题共 6 个小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

13. (3 分) (2015•烟台) 如图, 数轴上点 A、B 所表示的两个数的和的绝对值是 1.



考点: 数轴; 绝对值; 有理数的加法.

分析: 首先根据数轴得到表示点 A、B 的实数, 然后求其和绝对值即可.

解答: 解: 从数轴上可知: 表示点 A 的数为 -3, 表示点 B 的数是 2,

$$\text{则 } -3+2=-1,$$

$$|-1|=1,$$

故答案为: 1.

点评: 本题考查了数轴和绝对值, 解题的关键是从数轴上得到点 A、点 B 表示的数, 然后求其和的绝对值.

14. (3 分) (2015•烟台) 正多边形的一个外角是 72° , 则这个多边形的内角和的度数是 540° .

考点: 多边形内角与外角.

分析: 根据任何多边形的外角和都是 360° , 利用 360 除以外角的度数就可以求出外角和中外角的个数, 即多边形的边数. n 边形的内角和是 $(n-2) \cdot 180^\circ$, 把多边形的边数代入公式, 就得到多边形的内角和.

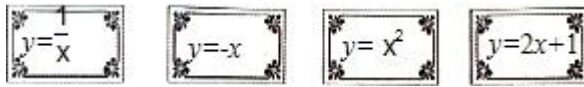
解答: 解: 多边形的边数: $360^\circ \div 72^\circ = 5$,

正多边形的内角和的度数是： $(5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$.

故答案为： 540° .

点评：考查了多边形内角与外角，根据外角和的大小与多边形的边数无关，由外角和求正多边形的边数，是常见的题目，需要熟练掌握.

15. (3分) (2015•烟台) 如图，有四张不透明的卡片除正面的函数关系式不同外，其余相同，将它们背面朝上洗匀后，从中抽取一张卡片，则抽到函数图象不经过第四象限的卡片的概率为 $\frac{3}{4}$.



考点：概率公式；一次函数的性质；正比例函数的性质；反比例函数的性质；二次函数的图象.

分析：用不经过第四象限的个数除以总个数即可确定答案.

解答：解： $\because$ 4 张卡片中只有第 2 个精光第四象限，

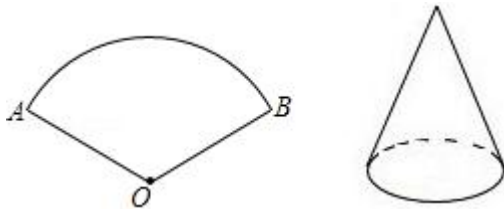
$\therefore$ 取一张卡片，则抽到函数图象不经过第四象限的卡片的概率为 $\frac{3}{4}$.

故答案为： $\frac{3}{4}$.

点评：本题考查的是概率的求法. 如果一个事件有 n 种可能，而且这些事件的可能性相同，

其中事件 A 出现 m 种结果，那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

16. (3分) (2015•烟台) 如图，将弧长为 6π ，圆心角为 120° 的圆形纸片 AOB 围成圆锥形纸帽，使扇形的两条半径 OA 与 OB 重合 (粘连部分忽略不计) 则圆锥形纸帽的高是 $6\sqrt{2}$.



考点：圆锥的计算.

分析：根据弧长求得圆锥的底面半径和扇形的半径，利用勾股定理求得圆锥的高即可.

解答: 解: $\because$ 弧长为 6π ,

$\therefore$ 底面半径为 $6\pi \div 2\pi = 3$,

$\because$ 圆心角为 120° ,

$$\therefore \frac{120\pi R}{180} = 6\pi,$$

解得: $R=9$,

$\therefore$ 圆锥的高为 $\sqrt{9^2 - 3^2} = 6\sqrt{2}$.

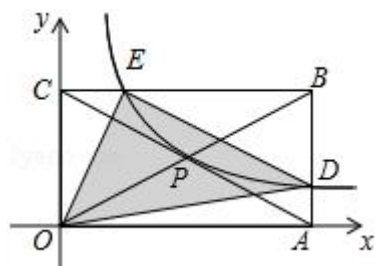
故答案为: $6\sqrt{2}$.

点评: 本题考查了圆锥的计算, 解题的关键是能够利用圆锥的底面周长等于侧面展开扇形的弧长求得圆锥的底面半径, 难度一般.

17. (3 分) (2015•烟台) 如图, 矩形 OABC 的顶点 A、C 的坐标分别是 (4, 0) 和 (0, 2),

反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过对角线的交点 P 并且与 AB, BC 分别交于 D, E 两点,

连接 OD, OE, DE, 则 $\triangle ODE$ 的面积为 $\frac{15}{4}$.



考点: 反比例函数系数 k 的几何意义.

分析: 由 A、C 的坐标分别是 (4, 0) 和 (0, 2), 得到 P (2, 1), 求得 $k=2$, 得到反比例

函数的解析式为: $y = \frac{2}{x}$, 求出 D (4, $\frac{1}{2}$), E (1, 2) 于是问题可解.

解答: 解: $\because$ 四边形 OABC 是矩形,

$\therefore AB=OC$, $BC=OA$,

$\because$ A、C 的坐标分别是 (4, 0) 和 (0, 2),

$\therefore OA=4$, $OB=2$,

$\because$ P 是矩形对角线的交点,

$\therefore P$ (2, 1),

∵ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象过对角线的交点 P,

∴ $k=2$,

∴ 反比例函数的解析式为: $y = \frac{2}{x}$,

∵ D, E 两点在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 的图象的图象上,

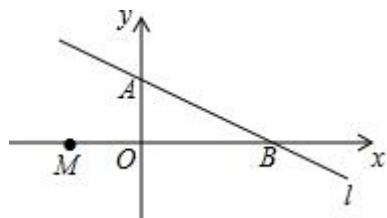
∴ D $(4, \frac{1}{2})$, E $(1, 2)$

∴ $S_{\text{阴影}} = S_{\text{矩形}} - S_{\triangle AOD} - S_{\triangle COF} - S_{\triangle BDE} = 4 \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = \frac{15}{4}$.

故答案为: $\frac{15}{4}$.

点评: 本题考查了反比例函数系数 k 的几何意义, 待定系数法求函数的解析式, 矩形的性质三角形的面积的求法, 掌握反比例函数系数 k 的几何意义是解题的关键.

18. (3 分) (2015•烟台) 如图, 直线 $l: y = -\frac{1}{2}x + 1$ 与坐标轴交于 A, B 两点, 点 M ($m, 0$) 是 x 轴上一动点, 以点 M 为圆心, 2 个单位长度为半径作 $\odot M$, 当 $\odot M$ 与直线 l 相切时, 则 m 的值为 $2 - 2\sqrt{5}$ 或 $2 + 2\sqrt{5}$.



考点: 直线与圆的位置关系; 一次函数的性质.

分析: 根据直线 $l: y = -\frac{1}{2}x + 1$ 与 x 轴的交点坐标 A $(0, 1)$, B $(2, 0)$, 得到 $OA=1$, $OB=2$, 求出 $AB=\sqrt{5}$; 设 $\odot M$ 与 AB 相切于 C, 连接 MC, 则 $MC=2$, $MC \perp AB$, 通过 $\triangle BMO \sim \triangle ABO$, 即可得到结果.

解答: 解: 在 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 中,

令 $x=0$, 则 $y=1$,

令 $y=0$, 则 $x=2$,

∴ A $(0, 1)$, B $(2, 0)$,

$$\therefore AB=\sqrt{5};$$

如图，设 $\odot M$ 与 AB 相切与 C ，

连接 MC ，则 $MC=2$ ， $MC\perp AB$ ，

$$\because \angle MCB=\angle AOB=90^\circ, \quad \angle B=\angle B,$$

$$\therefore \triangle BMO \sim \triangle ABO,$$

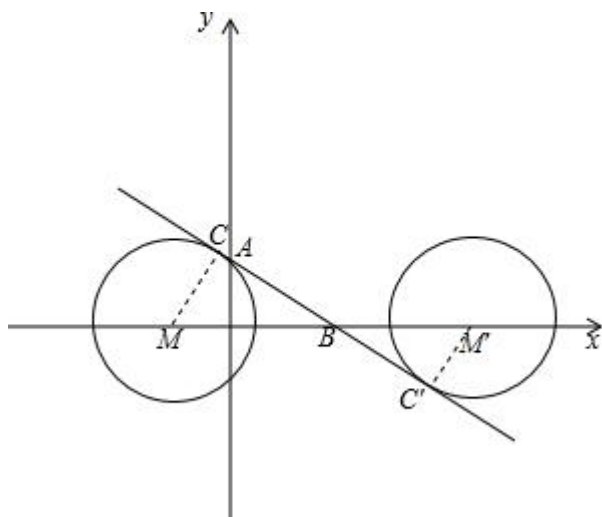
$$\therefore \frac{CM}{OA}=\frac{BM}{AB}, \quad \text{即} \frac{2}{1}=\frac{BM}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore BM=2\sqrt{5},$$

$$\therefore OM=2\sqrt{5}-2, \quad \text{或} \quad OM=2\sqrt{5}+2.$$

$$\therefore m=2-2\sqrt{5} \text{ 或 } m=2+2\sqrt{5}.$$

故答案为： $2-2\sqrt{5}$, $2+2\sqrt{5}$.



点评： 本题考查了直线与圆的位置关系，一次函数的性质，相似三角形的判定和性质，注意分类讨论是解题的关键.

三、解答题（本大题共 7 小题，满分 66 分）

19. (6 分) (2015•烟台) 先化简： $\frac{x^2+x}{x^2-2x+1} \div (\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x})$ ，再从 $-2 < x < 3$ 的范围内选

取一个你最喜欢的值代入，求值.

考点： 分式的化简求值.

专题： 计算题.

分析：原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算，同时利用除法法则变形，约分得到最简结果，把 x 的值代入计算即可求出值.

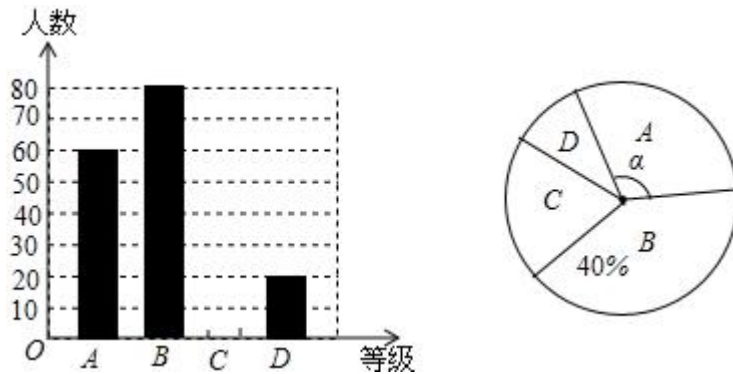
解答：解：原式 $= \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \div \frac{2x-x+1}{x(x-1)} = \frac{x(x+1)}{(x-1)^2} \cdot \frac{x(x-1)}{x+1} = \frac{x^2}{x-1}$,

当 $x=2$ 时，原式 $=4$.

点评：此题考查了分式的化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (8 分) (2015•烟台) ”切实减轻学生课业负担”是我市作业改革的一项重要举措. 某中学为了解本校学生平均每天的课外作业时间，随机抽取部分学生进行问卷调查，并将调查结果分为 A、B、C、D 四个等级，A: 1 小时以内；B: 1 小时 – 1.5 小时；C: 1.5 小时 – 2 小时；D: 2 小时以上. 根据调查结果绘制了如图所示的两种不完整的统计图，请根据图中信息解答下列问题:

- (1) 该校共调查了 200 学生；
- (2) 请将条形统计图补充完整；
- (3) 表示等级 A 的扇形圆心角 α 的度数是 108° ；
- (4) 在此次调查问卷中，甲、乙两班各有 2 人平均每天课外作业量都是 2 小时以上，从这 4 人中人选 2 人去参加座谈，用列表表或画树状图的方法求选出的 2 人来自不同班级的概率.



考点：列表法与树状图法；扇形统计图；条形统计图.

- 分析：**
- (1) 根据 B 类的人数和所占的百分比即可求出总数；
 - (2) 求出 C 的人数从而补全统计图；
 - (3) 用 A 的人数除以总人数再乘以 360° ，即可得到圆心角 α 的度数；
 - (4) 先设甲班学生为 A_1, A_2 ，乙班学生为 B_1, B_2 ，根据题意画出树形图，再根据概

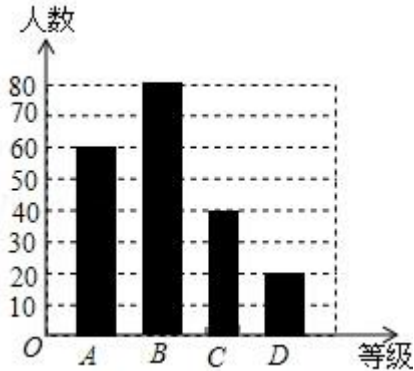
率公式列式计算即可.

解答: 解: (1) 共调查的中学生数是: $80 \div 40\% = 200$ (人),

故答案为: 200;

(2) C 类的人数是: $200 - 60 - 80 - 20 = 40$ (人),

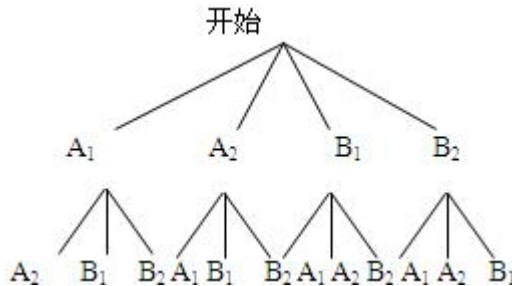
补图如下:



(3) 根据题意得: $\alpha = \frac{60}{200} \times 360^\circ = 108^\circ$,

故答案为: 108° ;

(4) 设甲班学生为 A_1, A_2 , 乙班学生为 B_1, B_2 ,



一共有 12 种等可能结果, 其中 2 人来自不同班级共有 8 种,

$$\therefore P(2 \text{ 人来自不同班级}) = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}.$$

点评: 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

21. (8 分) (2015•烟台) 2014 年 12 月 28 日“青烟威荣”城际铁路正式开通, 从烟台到北京的高铁里程比普快里程缩短了 81 千米, 运行时间减少了 9 小时, 已知烟台到北京的普快列车里程约为 1026 千米, 高铁平均时速为普快平均时速的 2.5 倍.

(1) 求高铁列车的平均时速;

(2) 某日王老师要去距离烟台大约 630 千米的某市参加 14: 00 召开的会议, 如果他买到当日 8: 40 从烟台至城市的高铁票, 而且从该市火车站到会议地点最多需要 1.5 小时, 试问在高铁列车准点到达的情况下他能在开会之前到达吗?

考点: 分式方程的应用; 一元一次不等式的应用.

分析: (1) 设普快的平均时速为 x 千米/小时, 高铁列车的平均时速为 2.5 千米/小时, 根据题意可得, 高铁走 $(1026 - 81)$ 千米比普快走 1026 千米时间减少了 9 小时, 据此列方程求解;

(2) 求出王老师所用的时间, 然后进行判断.

解答: 解: (1) 设普快的平均时速为 x 千米/小时, 高铁列车的平均时速为 $2.5x$ 千米/小时,

$$\text{由题意得, } \frac{1026}{x} - \frac{1026 - 81}{2.5x} = 9,$$

解得: $x=72$,

经检验, $x=72$ 是原分式方程的解, 且符合题意,

则 $2.5x=180$,

答: 高铁列车的平均时速为 180 千米/小时;

$$(2) 630 \div 180 = 3.5,$$

则坐车共需要 $3.5 + 1.5 = 5$ (小时),

王老师到达会议地点的时间为 1 点 40.

故他能在开会之前到达.

点评: 本题考查了分式方程的应用, 解答本题的关键是读懂题意, 设出未知数, 找出合适的等量关系, 列方程求解, 注意检验.

22. (9 分) (2015•烟台) 如图 1, 滨海广场装有风能、太阳能发电的风光互补环保路灯, 灯杆顶端装有风力发电机, 中间装有太阳能板, 下端装有路灯. 该系统工作过程中某一时刻的截面图如图 2, 已知太阳能板的支架 BC 垂直于灯杆 OF , 路灯顶端 E 距离地面 6 米, $DE=1.8$ 米, $\angle CDE=60^\circ$. 且根据我市的地理位置设定太阳能板 AB 的倾斜角为 43° . $AB=1.5$ 米, $CD=1$ 米, 为保证长为 1 米的风力发电机叶片无障碍安全旋转, 对叶片与太阳能板顶端 A 的

最近距离不得少于 0.5 米，求灯杆 OF 至少要多高？（利用科学计算器可求得 $\sin 43^\circ \approx 0.6820$, $\cos 43^\circ \approx 0.7314$, $\tan 43^\circ \approx 0.9325$, 结果保留两位小数）



图1

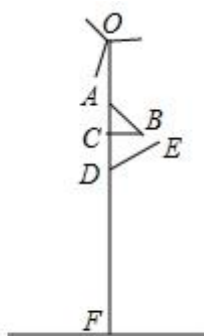


图2

考点：解直角三角形的应用.

分析：过 E 作 $EG \perp$ 地面于 G，过 D 作 $DH \perp EG$ 于 H，在 $Rt\triangle ABC$ 中，求得

$$AC = AB \cdot \cos \angle CAB = 1.5 \times 0.7314 \approx 1.1, \text{ 由 } \angle CDE = 60^\circ, \text{ 得到 } EH = \frac{1}{2}DE = 0.9, \text{ 得出}$$

$$DF = GH = EG - EH = 6 - 0.9 = 5.1, \text{ 于是 } OF = 1 + 0.5 + 1.10 + 1 + 5.1 = 8.70\text{m}.$$

解答：解：过 E 作 $EG \perp$ 地面于 G，过 D 作 $DH \perp EG$ 于 H，

$$\therefore DF = HG,$$

$$\text{在 } Rt\triangle ABC \text{ 中, } AC = AB \cdot \cos \angle CAB = 1.5 \times 0.7314 \approx 1.10,$$

$$\because \angle CDE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EDH = 30^\circ,$$

$$\therefore EH = \frac{1}{2}DE = 0.9,$$

$$\therefore DF = GH = EG - EH = 6 - 0.9 = 5.1,$$

$$\therefore OF = 1 + 0.5 + 1.10 + 1 + 5.1 = 8.70\text{m}.$$

答：灯杆 OF 至少要 8.70m.

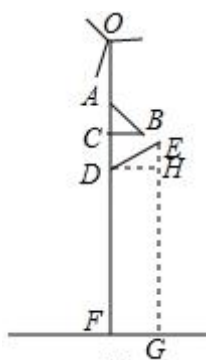
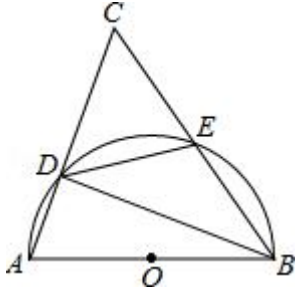


图2

点评: 本题考查了解直角三角形, 作辅助线构造直角三角形是解题的关键.

23. (9分) (2015•烟台) 如图, 以 $\triangle ABC$ 的一边 AB 为直径的半圆与其它两边 AC , BC 的交点分别为 D , E , 且 $\widehat{DE} = \widehat{BE}$.

- (1) 试判断 $\triangle ABC$ 的形状, 并说明理由.
- (2) 已知半圆的半径为 5, $BC=12$, 求 $\sin \angle ABD$ 的值.



考点: 圆周角定理; 等腰三角形的判定与性质; 勾股定理.

专题: 计算题.

分析: (1) 连结 AE , 如图, 根据圆周角定理, 由 $\widehat{DE} = \widehat{BE}$ 得 $\angle DAE = \angle BAE$, 由 AB 为直径得 $\angle AEB = 90^\circ$, 根据等腰三角形的判定方法即可得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形;

(2) 由等腰三角形的性质得 $BE = CE = \frac{1}{2}BC = 6$, 再在 $Rt\triangle ABE$ 中利用勾股定理计算出 $AE = 8$, 接着由 AB 为直径得到 $\angle ADB = 90^\circ$, 则可利用面积法计算出 $BD = \frac{48}{5}$, 然后在 $Rt\triangle ABD$ 中利用勾股定理计算出 $AD = \frac{14}{5}$, 再根据正弦的定义求解.

解答: 解: (1) $\triangle ABC$ 为等腰三角形. 理由如下:

连结 AE , 如图,

$$\because \widehat{DE} = \widehat{BE},$$

$$\therefore \angle DAE = \angle BAE, \text{ 即 } AE \text{ 平分 } \angle BAC,$$

$$\because AB \text{ 为直径},$$

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore AE \perp BC,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 为等腰三角形};$$

$$(2) \because \triangle ABC \text{ 为等腰三角形}, AE \perp BC,$$

$$\therefore BE=CE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 12=6,$$

在 $Rt\triangle ABE$ 中, $\because AB=10, BE=6,$

$$\therefore AE=\sqrt{10^2-6^2}=8,$$

$\because AB$ 为直径,

$$\therefore \angle ADB=90^\circ,$$

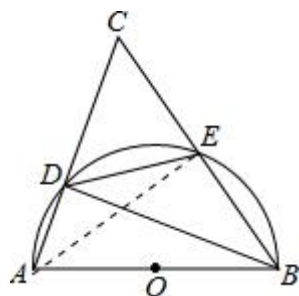
$$\therefore \frac{1}{2}AE\cdot BC=\frac{1}{2}BD\cdot AC,$$

$$\therefore BD=\frac{8\times 12}{10}=\frac{48}{5},$$

在 $Rt\triangle ABD$ 中, $\because AB=10, BD=\frac{48}{5},$

$$\therefore AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\frac{14}{5},$$

$$\therefore \sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}=\frac{\frac{14}{5}}{10}=\frac{7}{25}.$$



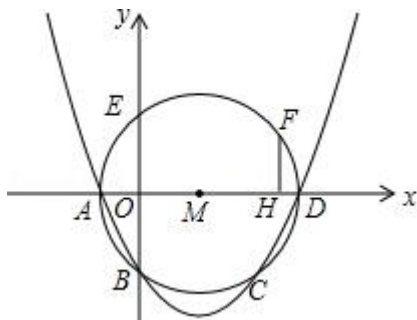
点评: 本题考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半. 推论: 半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径. 也考查了等腰三角形的判定与性质和勾股定理.

24. (12 分) (2015•烟台) 如图, 在平面直角坐标系中, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 $\odot M$ 相交于 A、B、C、D 四点, 其中 A、B 两点的坐标分别为 $(-1, 0)$, $(0, -2)$, 点 D 在 x 轴上且 AD 为 $\odot M$ 的直径. 点 E 是 $\odot M$ 与 y 轴的另一个交点, 过劣弧 $\widehat{ED}$ 上的点 F 作 $FH\perp AD$ 于点 H, 且 $FH=1.5$

(1) 求点 D 的坐标及该抛物线的表达式;

(2) 若点 P 是 x 轴上的一个动点, 试求出 $\triangle PEF$ 的周长最小时点 P 的坐标;

(3) 在抛物线的对称轴上是否存在点 Q, 使 $\triangle QCM$ 是等腰三角形? 如果存在, 请直接写出点 Q 的坐标; 如果不存在, 请说明理由.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 首先根据圆的轴对称性求出点 D 的坐标, 将 A、B、D 三点代入, 即可求出本题的答案;

(2) 由于点 E 与点 B 关于 x 轴对称, 所以, 连接 BF, 直线 BF 与 x 轴的交点, 即为点 P, 据此即可得解;

(3) 从 $CM = MQ$, $CM = CQ$, $MQ = CQ$ 三个方面进行分析, 据此即可得解.

解答: 解: (1) 连接 BD,

$\because AD$ 是 $\odot M$ 的直径, $\therefore \angle ABD = 90^\circ$

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle ABD$,

$$\therefore \frac{AO}{AB} = \frac{AB}{AD},$$

在 $Rt\triangle AOB$ 中, $AO = 1$, $BO = 2$,

根据勾股定理得: $AB = \sqrt{5}$,

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{AD},$$

$\therefore AD = 5$,

$\therefore DO = AD - AO = 5 - 1 = 4$,

$\therefore D(4, 0)$,

把点 A $(-1, 0)$ 、B $(0, -2)$ 、D $(4, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 可得:

$$\begin{cases} c = -2 \\ 16a + 4b + c = 0 \\ a - b + c = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \\ c = -2 \end{cases}$$

∴ 抛物线表达式为: $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$;

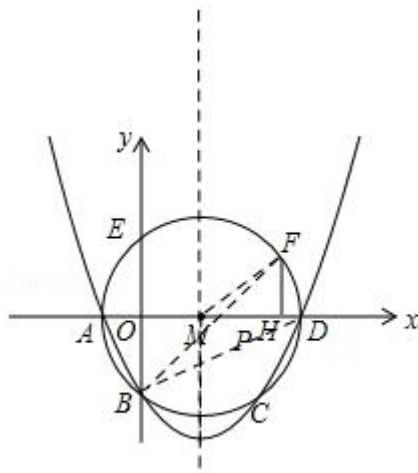


图1

(2) 连接 FM,

在 $\text{Rt}\triangle FHM$ 中, $FM = \frac{5}{2}$, $FH = \frac{3}{2}$,

$$\therefore MH = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 2,$$

$$OM = AM - OA = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2},$$

$$\therefore OH = OM + MH = \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2},$$

$$\therefore F\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

设直线 BF 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{则: } \begin{cases} \frac{7}{2}k + b = \frac{3}{2} \\ b = -2 \end{cases}$$

∴ 直线 BF 的解析式为: $y = x - 2$,

连接 BF 交 x 轴于点 P, ∵ 点 E 与点 B 关于 x 轴对称,

∴ 点 P 即为所求,

当 $y = 0$ 时, $x = 2$,

∴ $P(2, 0)$;

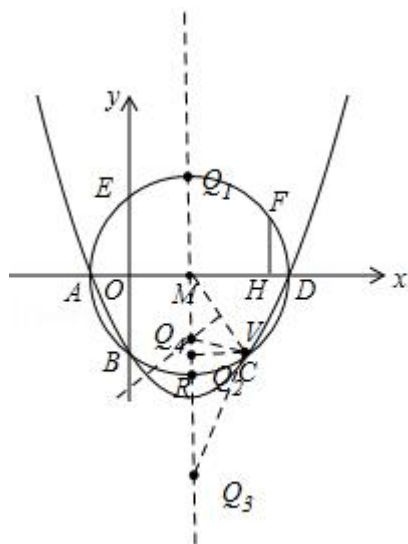


图2

(3) 如图, $CM = \frac{5}{2}$

抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2$ 的对称轴为直线 $x = \frac{3}{2}$,

$\therefore OM = \frac{3}{2}$, $\therefore$ 点 M 在直线 $x = \frac{3}{2}$ 上,

根据圆的对称性可知, 点 C 与点 B 关于直线 $x = \frac{3}{2}$ 对称,

$\therefore$ 点 C $(3, -2)$,

①当 $CM = MQ = \frac{5}{2}$ 时, 点 Q 可能在 x 轴上方, 也可能在 x 轴下方,

$\therefore Q_1 (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$, $Q_2 (\frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$,

②当 $CM = CQ$ 时, 过点 C 作 $CN \perp MQ$,

$\therefore MN = NQ = 2$, $\therefore MQ = 4$,

$\therefore Q_3 (\frac{3}{2}, -4)$,

③当 $CQ_4 = MQ_4$ 时, 过点 C 作 $CR \perp MQ$, $Q_4V \perp CM$,

则: $MV = CV = \frac{5}{4}$, $Q_4V = \sqrt{MQ_4^2 - \frac{25}{16}}$,

$Rt\triangle CRM \sim Rt\triangle Q_4VM$,

$$\therefore \frac{MQ_4}{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{MQ_4^2 - \frac{25}{16}}}{\frac{3}{2}},$$

解得: $MQ_4 = \frac{25}{16}$,

$\therefore Q_4 (\frac{3}{2}, -\frac{25}{16})$

综上可知，存在四个点，即：

$$Q_1 \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right), Q_2 \left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2} \right), Q_3 \left(\frac{3}{2}, -4 \right), Q_4 \left(\frac{3}{2}, -\frac{25}{16} \right).$$

点评：本题主要考查了二次函数的抛物线的解析式的求法，以及根据对称求线段的最小值的问题，还考查了等腰三角形的知识和相似三角形的知识，是一道综合性很强的题目，注意认真总结.

25. (14 分) (2015•烟台) 【问题提出】

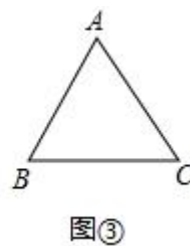
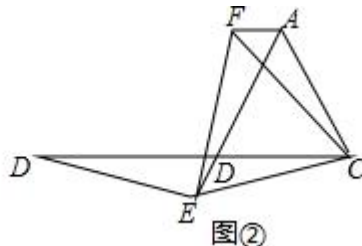
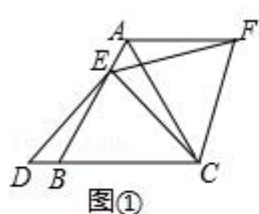
如图①，已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，点 E 在线段 AB 上，点 D 在直线 BC 上，且 $ED=EC$ ，将 $\triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$ 连接 EF

试证明： $AB=DB+AF$

【类比探究】

(1) 如图②，如果点 E 在线段 AB 的延长线上，其他条件不变，线段 AB ， DB ， AF 之间又有怎样的数量关系？请说明理由

(2) 如果点 E 在线段 BA 的延长线上，其他条件不变，请在图③的基础上将图形补充完整，并写出 AB ， DB ， AF 之间的数量关系，不必说明理由.



考点：几何变换综合题.

分析：首先判断出 $\triangle CEF$ 是等边三角形，即可判断出 $EF=EC$ ，再根据 $ED=EC$ ，可得 $ED=EF$ ， $\angle CAF=\angle BAC=60^\circ$ ，所以 $\angle EAF=\angle BAC+\angle CAF=120^\circ$ ， $\angle DBE=120^\circ$ ， $\angle EAF=\angle DBE$ ；然后根据全等三角形判定的方法，判断出 $\triangle EDB\cong\triangle FEA$ ，即可判断出 $BD=AE$ ， $AB=AE+BF$ ，所以 $AB=DB+AF$.

(1) 首先判断出 $\triangle CEF$ 是等边三角形，即可判断出 $EF=EC$ ，再根据 $ED=EC$ ，可得 $ED=EF$ ， $\angle CAF=\angle BAC=60^\circ$ ，所以 $\angle EFC=\angle FGC+\angle FCG$ ， $\angle BAC=\angle FGC+\angle FEA$ ， $\angle FCG=\angle FEA$ ，再根据 $\angle FCG=\angle EAD$ ， $\angle D=\angle EAD$ ，可得 $\angle D=\angle FEA$ ；然后根据全等三角形判定的方法，判断出 $\triangle EDB\cong\triangle FEA$ ，即可判断出 $BD=AE$ ， $EB=AF$ ，进

而判断出 $AB=BD+AF$ 即可.

(2) 首先根据点 E 在线段 BA 的延长线上, 在图③的基础上将图形补充完整, 然后判断出 $\triangle CEF$ 是等边三角形, 即可判断出 $EF=EC$, 再根据 $ED=EC$, 可得 $ED=EF$, $\angle CAF=\angle BAC=60^\circ$, 再判断出 $\angle DBE=\angle EAF$, $\angle BDE=\angle AEF$; 最后根据全等三角形判定的方法, 判断出 $\triangle EDB \cong \triangle FEA$, 即可判断出 $BD=AE$, $EB=AF$, 进而判断出 $AF=AB+BD$ 即可.

解答: 证明: $ED=EC=CF$,

$\because \triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$,

$\therefore \angle ECF=60^\circ$, $BE=AF$, $EC=CF$,

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形,

$\therefore EF=EC$,

又 $\because ED=EC$,

$\therefore ED=EF$, $\angle CAF=\angle BAC=60^\circ$,

$\therefore \angle EAF=\angle BAC+\angle CAF=120^\circ$, $\angle DBE=120^\circ$, $\angle EAF=\angle DBE$,

$\therefore A$ 、E、C、F 四点共圆,

$\therefore \angle AEF=\angle ACF$,

又 $\because ED=EC$,

$\therefore \angle D=\angle BCE$, $\angle BCE=\angle ACF$,

$\therefore \angle D=\angle AEF$,

在 $\triangle EDB$ 和 $\triangle FEA$ 中,

$$\begin{cases} \angle DBE=\angle EAF \\ \angle D=\angle AEF \\ ED=EF \end{cases} \quad (\text{AAS})$$

$\therefore \triangle EDB \cong \triangle FEA$,

$\therefore BD=AE$, $AB=AE+BF$,

$\therefore AB=BD+AF$.

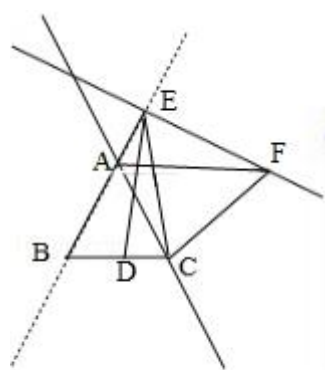
(1) $ED=EC=CF$,

$\because \triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$,

$\therefore \angle ECF=60^\circ$, $BE=AF$, $EC=CF$,

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形,
 $\therefore EF=EC$,
 又 $\because ED=EC$,
 $\therefore ED=EF$, $\angle CAF=\angle BAC=60^\circ$,
 $\therefore \angle EFC=\angle FGC+\angle FCG$, $\angle BAC=\angle FGC+\angle FEA$,
 $\therefore \angle FCG=\angle FEA$,
 又 $\because \angle FCG=\angle EAD$, $\angle D=\angle EAD$,
 $\therefore \angle D=\angle FEA$,
 由旋转的性质, 可得
 $\angle CBE=\angle CAF=120^\circ$,
 $\therefore \angle DBE=\angle FAE=60^\circ$,
 在 $\triangle EDB$ 和 $\triangle FEA$ 中,

$$\begin{cases} \angle DBE=\angle EAF \\ \angle D=\angle AEF \\ ED=EF \end{cases} \quad (\text{AAS})$$
 $\therefore \triangle EDB \cong \triangle FEA$,
 $\therefore BD=AE$, $EB=AF$,
 $\therefore BD=FA+AB$,
 即 $AB=BD+AF$.



图③

(2) 如图③, $ED=EC=CF$,
 $\therefore \triangle BCE$ 绕点 C 顺时针旋转 60° 至 $\triangle ACF$,
 $\therefore \angle ECF=60^\circ$, $BE=AF$, $EC=CF$, $BC=AC$,

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形,

$\therefore EF=EC$,

又 $\because ED=EC$,

$\therefore ED=EF$,

$\because AB=AC$, $BC=AC$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore \angle ABC=60^\circ$,

又 $\because \angle CBE=\angle CAF$,

$\therefore \angle CAF=60^\circ$,

$\therefore \angle EAF=180^\circ - \angle CAF - \angle BAC$

$=180^\circ - 60^\circ - 60^\circ$

$=60^\circ$

$\therefore \angle DBE=\angle EAF$;

$\because ED=EC$,

$\therefore \angle ECD=\angle EDC$,

$\therefore \angle BDE=\angle ECD+\angle DEC=\angle EDC+\angle DEC$,

又 $\because \angle EDC=\angle EBC+\angle BED$,

$\therefore \angle BDE=\angle EBC+\angle BED+\angle DEC=60^\circ+\angle BEC$,

$\because \angle AEF=\angle CEF+\angle BEC=60^\circ+\angle BEC$,

$\therefore \angle BDE=\angle AEF$,

在 $\triangle EDB$ 和 $\triangle FEA$ 中,

$$\begin{cases} \angle DBE=\angle EAF \\ \angle BDE=\angle AEF \\ ED=EF \end{cases} \quad (\text{AAS})$$

$\therefore \triangle EDB \cong \triangle FEA$,

$\therefore BD=AE$, $EB=AF$,

$\therefore BE=AB+AE$,

$\therefore AF=AB+BD$,

即 AB , DB , AF 之间的数量关系是:

$AF=AB+BD$.

点评: (1) 此题主要考查了几何变换综合题, 考查了分析推理能力, 考查了空间想象能力, 考查了数形结合方法的应用, 要熟练掌握.

(2) 此题还考查了全等三角形的判定和性质的应用, 要熟练掌握.