

2015 年山东省济宁市中考数学试卷

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2015•济宁) $-\frac{2}{3}$ 的相反数是 ()

- A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{3}{2}$

2. (3 分) (2015•济宁) 化简 $-16(x-0.5)$ 的结果是 ()

- A. $-16x-0.5$ B. $-16x+0.5$ C. $16x-8$ D. $-16x+8$

3. (3 分) (2015•济宁) 要使二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义, x 必须满足 ()

- A. $x \leq 2$ B. $x \geq 2$ C. $x > 2$ D. $x < 2$

4. (3 分) (2015•济宁) 一个正方体的每个面都有一个汉字, 其展开图如图所示, 那么在该正方体中和“值”字相对的字是 ()

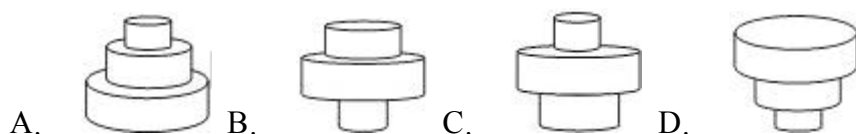
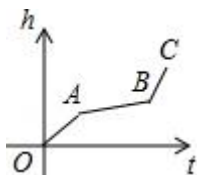


- A. 记 B. 观 C. 心 D. 间

5. (3 分) (2015•济宁) 三角形两边长分别为 3 和 6, 第三边的长是方程 $x^2 - 13x + 36 = 0$ 的两根, 则该三角形的周长为 ()

- A. 13 B. 15 C. 18 D. 13 或 18

6. (3 分) (2015•济宁) 匀速地向一个容器内注水, 最后把容器注满, 在注水过程中, 水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示 (图中 OABC 为一折线), 这个容器的形状是下图中的 ()



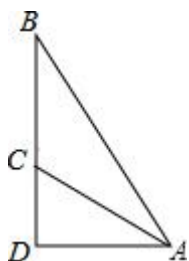
7. (3分) (2015•济宁) 只用下列哪一种正多边形可以进行平面镶嵌 ()

- A. 正五边形 B. 正六边形 C. 正八边形 D. 正十边形

8. (3分) (2015•济宁) 解分式方程 $\frac{2}{x-1} + \frac{x+2}{1-x} = 3$ 时, 去分母后变形为 ()

- A. $2 + (x+2) = 3(x-1)$ B. $2 - x + 2 = 3(x-1)$
C. $2 - (x+2) = 3(1-x)$ D. $2 - (x+2) = 3(x-1)$

9. (3分) (2015•济宁) 如图, 斜面 AC 的坡度 (CD 与 AD 的比) 为 1: 2, $AC = 3\sqrt{5}$ 米, 坡顶有旗杆 BC, 旗杆顶端 B 点与 A 点有一条彩带相连. 若 $AB = 10$ 米, 则旗杆 BC 的高度为 ()

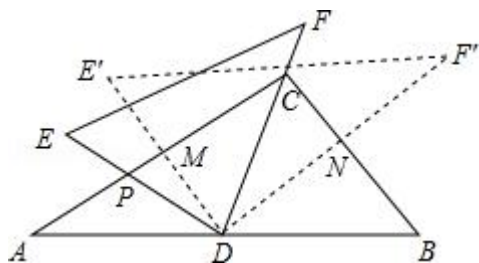


- A. 5 米 B. 6 米 C. 8 米 D. $(3 + \sqrt{5})$ 米

10. (3分) (2015•济宁) 将一副三角尺 (在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, 在 $Rt\triangle EDF$ 中, $\angle EDF = 90^\circ$, $\angle E = 45^\circ$) 如图摆放, 点 D 为 AB 的中点,

DE 交 AC 于点 P, DF 经过点 C, 将 $\triangle EDF$ 绕点 D 顺时针方向旋转 α ($0^\circ < \alpha < 60^\circ$), DE' 交 AC 于点 M, DF' 交 BC 于点 N, 则 $\frac{PM}{CN}$ 的值为

()



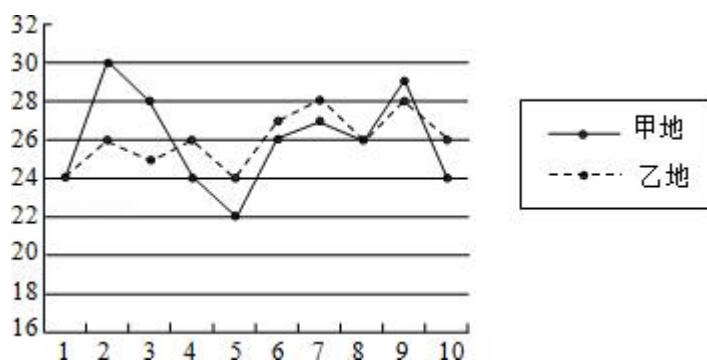
- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分

11. (3 分) (2015•济宁) 2014 年, 我国国内生产总值约为 636000 亿元, 用科学记数法表示 2014 年国内生产总值约为_____亿元.

12. (3 分) (2015•济宁) 分解因式: $12x^2 - 3y^2 =$ _____.

13. (3 分) (2015•济宁) 甲乙两地 9 月上旬的日平均气温如图所示, 则甲乙两地这 10 天日平均气温方差大小关系为 $S_{甲}^2$ _____ $S_{乙}^2$ (填 > 或 <).



14. (3 分) (2015•济宁) 在平面直角坐标系中, 以原点为中心, 把点 A (4, 5) 逆时针旋转 90° , 得到的点 A' 的坐标为_____.

15. (3 分) (2015•济宁) 若 $1 \times 2^2 - 2 \times 3^2 = -1 \times 2 \times 7$;

$$(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) = -2 \times 3 \times 11;$$

$$(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) + (5 \times 6^2 - 6 \times 7^2) = -3 \times 4 \times 15;$$

则 $(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) + \dots + [(2n-1)(2n)^2 - 2n(2n+1)^2] =$ _____.

三、解答题: 本大题共 7 小题, 共 55 分

16. (5 分) (2015•济宁) 计算: $\pi^0 + 2^{-1} - \sqrt{\frac{1}{4}} - |-\frac{1}{3}|$

17. (7 分) (2015•济宁) 某学校初三年级男生共 200 名, 随机抽取 10 名测量他们的身高 (单位: cm) 为: 181, 176, 169, 155, 163, 175, 173, 167, 165, 166.

- (1) 求这 10 名男生的平均身高和上面这组数据的中位数;
- (2) 估计该校初三年级男生身高高于 170cm 的人数;
- (3) 从身高为 181, 176, 175, 173 的男生中任选 2 名, 求身高为 181cm 的男生被抽中的概率.

18. (7 分) (2015•济宁) 小明到服装店进行社会实践活动, 服装店经理让小明帮助解决以下问题: 服装店准备购进甲乙两种服装, 甲种每件进价 80 元, 售价 120 元, 乙种每件进价 60 元, 售价 90 元. 计划购进两种服装共 100 件, 其中甲种服装不少于 65 件.

- (1) 若购进这 100 件服装的费用不得超过 7500 元, 则甲种服装最多购进多少件? ?
- (2) 在 (1) 的条件下, 该服装店对甲种服装以每件优惠 a ($0 < a < 20$) 元的价格进行促销活动, 乙种服装价格不变, 那么该服装店应如何调整进货方案才能获得最大利润?

19. (8 分) (2015•济宁) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle DAC$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角.

实验与操作:

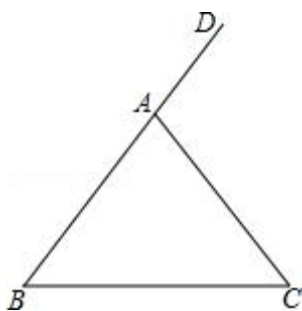
根据要求进行尺规作图, 并在图中标明相应字母 (保留作图痕迹, 不写作法)

(1) 作 $\angle DAC$ 的平分线 AM ;

(2) 作线段 AC 的垂直平分线, 与 AM 交于点 F , 与 BC 边交于点 E , 连接 AE , CF .

猜想并证明:

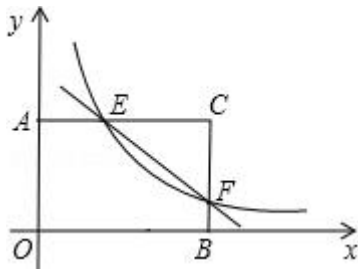
判断四边形 $AECF$ 的形状并加以证明.



20. (8 分) (2015•济宁) 在矩形 $AOBC$ 中, $OB=6$, $OA=4$, 分别以 OB , OA 所在直线为 x 轴和 y 轴, 建立如图所示的平面直角坐标系. F 是边 BC 上一点 (不与 B 、 C 两点重合), 过点 F 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 图象与 AC 边交于点 E .

(1) 请用 k 的表示点 E , F 的坐标;

(2) 若 $\triangle OEF$ 的面积为 9, 求反比例函数的解析式.



21. (9分) (2015•济宁) 阅读材料: 在一个三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等,

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 利用上述结论可以求解如下题目:

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别为 a 、 b 、 c . 若 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=30^\circ$, $a=6$, 求 b .

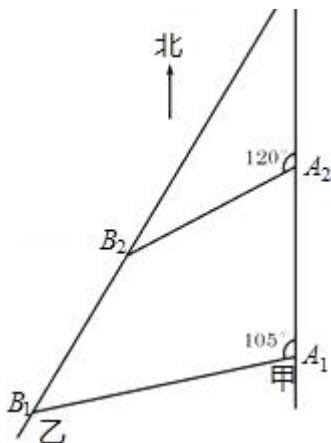
解: 在 $\triangle ABC$ 中, $\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \therefore b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}$.

理解应用:

如图, 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 当甲船位于 A_1 处时, 乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处, 且乙船从 B_1 处按北偏东 15° 方向匀速直线航行, 当甲船航行20分钟到达 A_2 时, 乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处, 此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里.

(1) 判断 $\triangle A_1A_2B_2$ 的形状, 并给出证明;

(2) 求乙船每小时航行多少海里?

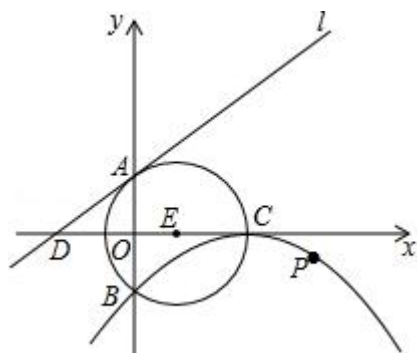


22. (11 分) (2015•济宁) 如图, $\odot E$ 的圆心 $E(3, 0)$, 半径为 5, $\odot E$ 与 y 轴相交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的上方), 与 x 轴的正半轴交于点 C , 直线 l 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 4$, 与 x 轴相交于点 D , 以点 C 为顶点的抛物线过点 B .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 判断直线 l 与 $\odot E$ 的位置关系, 并说明理由;

(3) 动点 P 在抛物线上, 当点 P 到直线 l 的距离最小时, 求出点 P 的坐标及最小距离.



2015 年山东省济宁市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2015•济宁) $-\frac{2}{3}$ 的相反数是 ()

A. $-\frac{2}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{3}{2}$

考点： 相反数.

分析： 根据只有符号不同的两个数互为相反数，可得答案.

解答： 解： $-\frac{2}{3}$ 的相反数是 $\frac{2}{3}$,

故选： C.

点评： 本题考查了相反数，在一个数的前面加上负号就是这个数的相反数.

2. (3 分) (2015•济宁) 化简 $-16(x-0.5)$ 的结果是 ()

A. $-16x-0.5$ B. $-16x+0.5$ C. $16x-8$ D. $-16x+8$

考点： 去括号与添括号.

分析： 根据去括号的法则计算即可.

解答： 解： $-16(x-0.5) = -16x+8$,

故选 D

点评： 此题考查去括号，关键是根据括号外是负号，去括号时应该变号.

3. (3 分) (2015•济宁) 要使二次根式 $\sqrt{x-2}$ 有意义， x 必须满足 ()

A. $x \leq 2$ B. $x \geq 2$ C. $x > 2$ D. $x < 2$

考点： 二次根式有意义的条件.

分析： 根据二次根式的性质，被开方数大于或等于 0，可以求出 x 的范围.

解答： 解：根据题意得： $x - 2 \geq 0$ ，解得： $x \geq 2$ 。

故选 B。

点评： 本题考查了二次根式的意义和性质。概念：式子 $\sqrt{a}$ ($a \geq 0$) 叫二次根式。性质：二次根式中的被开方数必须是非负数，否则二次根式无意义。

4. (3 分) (2015•济宁) 一个正方体的每个面都有一个汉字，其展开图如图所示，那么在该正方体中和“值”字相对的字是 ()



A. 记 B. 观 C. 心 D. 间

考点： 专题：正方体相对两个面上的文字。

分析： 由平面图形的折叠及立体图形的表面展开图的特点解题。

解答： 解：对于正方体的平面展开图中相对的面一定相隔一个小正方形，由图形可知，与“值”字相对的字是“记”。

故选：A。

点评： 本题考查了正方体相对的两个面上的文字，注意正方体的空间图形，从相对面入手，分析及解答问题。

5. (3 分) (2015•济宁) 三角形两边长分别为 3 和 6，第三边的长是方程 $x^2 - 13x + 36 = 0$ 的两根，则该三角形的周长为 ()

A. 13 B. 15 C. 18 D. 13 或 18

考点： 解一元二次方程-因式分解法；三角形三边关系。

分析： 先求出方程 $x^2 - 13x + 36 = 0$ 的两根，再根据三角形的三边关系定理，得到合题意的边，进而求得三角形周长即可。

解答： 解：解方程 $x^2 - 13x + 36 = 0$ 得，

$x = 9$ 或 4 ，

即第三边长为 9 或 4 。

边长为 $9, 3, 6$ 不能构成三角形；

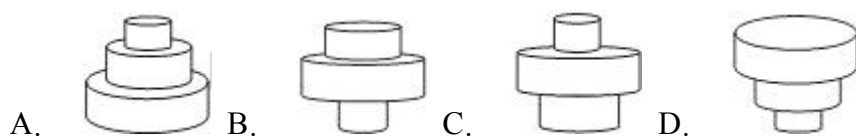
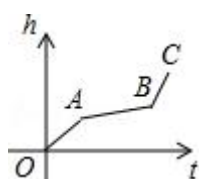
而 $4, 3, 6$ 能构成三角形，

所以三角形的周长为 $3 + 4 + 6 = 13$ ，

故选：A。

点评： 此题主要考查了因式分解法解一元二次方程以及三角形的三边关系，求三角形的周长，不能盲目地将三边长相加起来，而应养成检验三边长能否成三角形的好习惯。

6. (3 分) (2015•济宁) 匀速地向一个容器内注水，最后把容器注满，在注水过程中，水面高度 h 随时间 t 的变化规律如图所示 (图中 $OABC$ 为一折线)，这个容器的形状是下图中的 ()



考点： 函数的图象。

分析： 根据每一段函数图象的倾斜程度，反映了水面上升速度的快慢，再观察容器的粗细，作出判断。

解答： 解：注水量一定，函数图象的走势是稍陡，平，陡；那么速度就相应的变化，跟所给容器的粗细有关。则相应的排列顺序就为 C。

故选 C。

点评： 此题考查函数图象的应用，需注意容器粗细和水面高度变化的关联。

7. (3 分) (2015•济宁) 只用下列哪一种正多边形可以进行平面镶嵌 ()

A. 正五边形 B. 正六边形 C. 正八边形 D. 正十边形

考点： 平面镶嵌（密铺）.

分析： 分别求出各个正多边形的每个内角的度数，再利用镶嵌应符合一个内角度数能整除 360° 即可作出判断.

解答： 解： A、正五边形的每个内角度数为 $180^\circ - 360^\circ \div 5 = 108^\circ$ ，不能整除 360° ，不能进行平面镶嵌，不符合题意；

B、正六边形的每个内角度数为 $180^\circ - 360^\circ \div 6 = 120^\circ$ ，能整除 360° ，能进行平面镶嵌，符合题意；

C、正八边形的每个内角度数为 $180^\circ - 360^\circ \div 8 = 135^\circ$ ，不能整除 360° ，不能进行平面镶嵌，不符合题意；

D、正十边形的每个内角度数为 $180^\circ - 360^\circ \div 10 = 144^\circ$ ，不能整除 360° ，不能进行平面镶嵌，不符合题意；

故选 B.

点评： 本题考查平面密铺的问题，用到的知识点为：一种正多边形能镶嵌平面，这个正多边形的一个内角的度数是 360° 的约数；正多边形一个内角的度数 $= 180^\circ - 360^\circ \div$ 边数.

8. (3 分) (2015•济宁) 解分式方程 $\frac{2}{x-1} + \frac{x+2}{1-x} = 3$ 时，去分母后变形为 ()

A. $2 + (x+2) = 3(x-1)$ B. $2 - x + 2 = 3(x-1)$ C. $2 - (x+2) = 3(1-x)$ D. $2 - (x+2) = 3(x-1)$

考点： 解分式方程.

分析： 本题考查对一个分式确定最简公分母，去分母得能力. 观察式子 $x-1$ 和 $1-x$ 互为相反数，可得 $1-x = -(x-1)$ ，所以可得最简公分母为 $x-1$ ，因为去分母时式子不能漏乘，所以方程中式子每一项都要乘最简公分母.

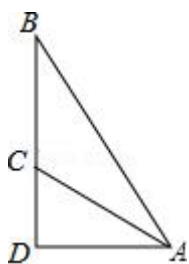
解答： 解： 方程两边都乘以 $x-1$ ，

得： $2 - (x+2) = 3(x-1)$.

故选 D.

点评：考查了解分式方程，对一个分式方程而言，确定最简公分母后要注意不要漏乘，这正是本题考查点所在．切忌避免出现去分母后： $2 - (x+2) = 3$ 形式的出现．

9. (3 分) (2015•济宁) 如图，斜面 AC 的坡度 (CD 与 AD 的比) 为 1: 2, $AC=3\sqrt{5}$ 米, 坡顶有旗杆 BC, 旗杆顶端 B 点与 A 点有一条彩带相连. 若 $AB=10$ 米, 则旗杆 BC 的高度为 ()



A. 5 米 B. 6 米 C. 8 米 D. $(3+\sqrt{5})$ 米

考点：解直角三角形的应用-坡度坡角问题.

分析：设 $CD=x$, 则 $AD=2x$, 根据勾股定理求出 AC 的长, 从而求出 CD、AC 的长, 然后根据勾股定理求出 BD 的长, 即可求出 BC 的长.

解答：解: 设 $CD=x$, 则 $AD=2x$,

由勾股定理可得, $AC=\sqrt{x^2+(2x)^2}=\sqrt{5}x$,

$\because AC=3\sqrt{5}$ 米,

$\therefore \sqrt{5}x=3\sqrt{5}$,

$\therefore x=3$ 米,

$\therefore CD=3$ 米,

$\therefore AD=2 \times 3=6$ 米,

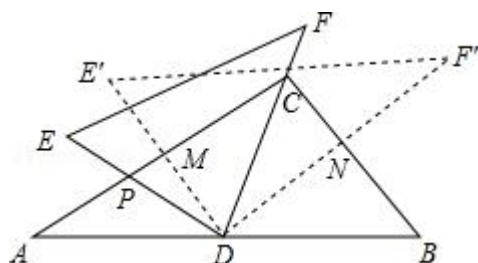
在 $Rt\triangle ABD$ 中, $BD=\sqrt{10^2-6^2}=8$ 米,

$\therefore BC=8-3=5$ 米.

故选 A.

点评： 本题考查了解直角三角形的应用——坡度坡角问题，找到合适的直角三角形，熟练运用勾股定理是解题的关键.

10. (3 分) (2015•济宁) 将一副三角尺 (在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $\angle B=60^\circ$, 在 $\text{Rt}\triangle EDF$ 中, $\angle EDF=90^\circ$, $\angle E=45^\circ$) 如图摆放, 点 D 为 AB 的中点, DE 交 AC 于点 P , DF 经过点 C , 将 $\triangle EDF$ 绕点 D 顺时针方向旋转 α ($0^\circ < \alpha < 60^\circ$), DE' 交 AC 于点 M , DF' 交 BC 于点 N , 则 $\frac{PM}{CN}$ 的值为 ()



- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{1}{2}$

考点： 旋转的性质.

专题： 计算题.

分析： 先根据直角三角形斜边上的中线性质的得 $CD=AD=DB$, 则 $\angle ACD=\angle A=30^\circ$, $\angle BCD=\angle B=60^\circ$, 由于 $\angle EDF=90^\circ$, 可利用互余得 $\angle CPD=60^\circ$, 再根据旋转的性质得 $\angle PDM=\angle CDN=\alpha$, 于是可判断 $\triangle PDM \sim \triangle CDN$, 得到 $\frac{PM}{CN}=\frac{PD}{CD}$, 然后在 $\text{Rt}\triangle PCD$ 中利用正切的定义得到 $\tan \angle PCD=\tan 30^\circ=\frac{PD}{CD}$, 于是可得 $\frac{PM}{CN}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

解答： 解: $\because$ 点 D 为斜边 AB 的中点,

$$\therefore CD=AD=DB,$$

$$\therefore \angle ACD=\angle A=30^\circ, \angle BCD=\angle B=60^\circ,$$

$$\because \angle EDF=90^\circ,$$

$$\therefore \angle CPD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle MPD = \angle NCD,$$

$\therefore \triangle EDF$ 绕点 D 顺时针方向旋转 α ($0^\circ < \alpha < 60^\circ$),

$$\therefore \angle PDM = \angle CDN = \alpha,$$

$$\therefore \triangle PDM \sim \triangle CDN,$$

$$\therefore \frac{PM}{CN} = \frac{PD}{CD},$$

在 $Rt\triangle PCD$ 中, $\therefore \tan \angle PCD = \tan 30^\circ = \frac{PD}{CD},$

$$\therefore \frac{PM}{CN} = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

故选 C.

点评: 本题考查了旋转的性质: 对应点到旋转中心的距离相等; 对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角; 旋转前、后的图形全等. 也考查了相似三角形的判定与性质.

二、填空题: 本大题共 5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分

11. (3 分) (2015•济宁) 2014 年, 我国国内生产总值约为 636000 亿元, 用科学记数法表示 2014 年国内生产总值约为 6.36×10^5 亿元.

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 636000 用科学记数法表示为 6.36×10^5 .

故答案为 6.36×10^5 .

点评: 本题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

12. (3 分) (2015•济宁) 分解因式: $12x^2 - 3y^2 = \underline{3(2x+y)(2x-y)}$.

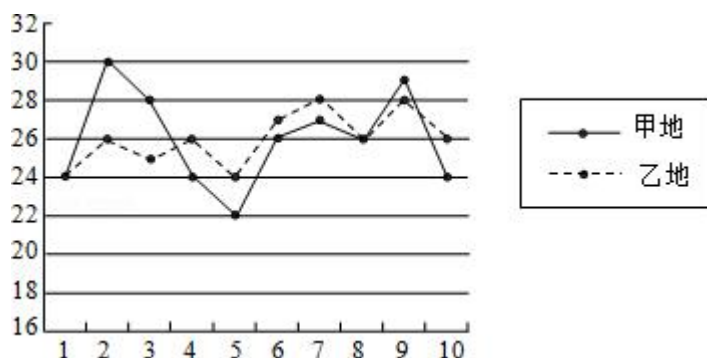
考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

分析: 考查了对一个多项式因式分解的能力, 本题属于基础题. 当一个多项式有公因式, 将其分解因式时应先提取公因式, 再对余下的多项式继续分解. 此题应提公因式, 再用公式.

解答: 解: $12x^2 - 3y^2 = 3(2x - y)(2x + y)$.

点评: 本题考查因式分解. 因式分解的步骤为: 一提公因式; 二看公式. 公式包括平方差公式与完全平方公式, 要能用公式法分解必须有平方项, 如果是平方差就用平方差公式来分解, 如果是平方和需要看还有没有两数乘积的 2 倍, 如果没有两数乘积的 2 倍还不能分解. 解答这类题时一些学生往往因分解因式的步骤、方法掌握不熟练, 对一些乘法公式的特点记不准确而误选其它选项. 要求灵活使用各种方法对多项式进行因式分解, 一般来说, 如果可以提取公因式的要先提取公因式

13. (3 分) (2015•济宁) 甲乙两地 9 月上旬的日平均气温如图所示, 则甲乙两地这 10 天日平均气温方差大小关系为 $S_{\text{甲}}^2 \underline{>} S_{\text{乙}}^2$ (填 $>$ 或 $<$).



考点: 方差; 折线统计图.

分析: 根据气温统计图可知: 贵阳的平均气温比较稳定, 波动小, 由方差的意义知, 波动小者方差小.

解答: 解: 观察平均气温统计图可知: 乙地的平均气温比较稳定, 波动小; 则乙地的日平均气温的方差小,

故 $S^2_{\text{甲}} > S^2_{\text{乙}}$.

故答案为: $>$.

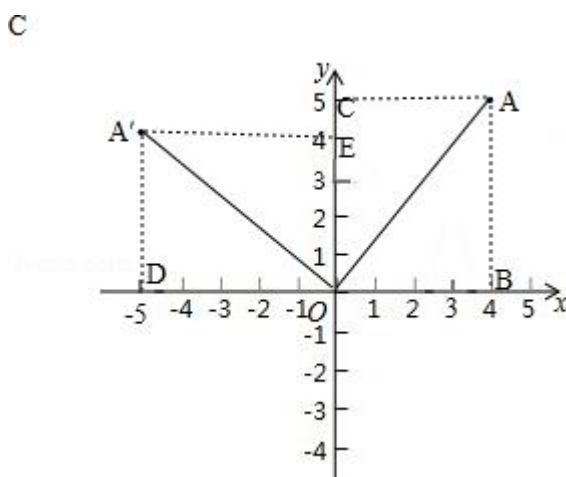
点评: 本题考查方差的意义: 方差反映了一组数据的波动大小, 方差越大, 波动性越大, 反之也成立.

14. (3 分) (2015•济宁) 在平面直角坐标系中, 以原点为中心, 把点 A (4, 5) 逆时针旋转 90° , 得到的点 A' 的坐标为 (-5, 4).

考点: 坐标与图形变化-旋转.

分析: 首先根据点 A 的坐标求出 OA 的长度, 然后根据旋转变换只改变图形的位置, 不改变图形的形状与大小, 可得 $OA' = OA$, 据此求出点 A' 的坐标即可.

解答: 解: 如图, 过点 A 作 $AC \perp y$ 轴于点 C, 作 $AB \perp x$ 轴于点 B, 过 A' 作 $A'E \perp y$



轴于点 E, 作 $A'D \perp x$ 轴于点 D,

$\because$ 点 A (4, 5),

$\therefore AC=4$, $AB=5$,

$\because$ 点 A (4, 5) 绕原点逆时针旋转 90° 得到点 A',

$\therefore A'E=AB=5$, $A'D=AC=4$,

$\therefore$ 点 A' 的坐标是 (-5, 4).

故答案为: (-5, 4).

点评： 此题主要考查了坐标与图形变换－旋转，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：旋转变换只改变图形的位置，不改变图形的形状与大小.

15. (3 分) (2015•济宁) 若 $1 \times 2^2 - 2 \times 3^2 = -1 \times 2 \times 7$;

$$(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) = -2 \times 3 \times 11;$$

$$(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) + (5 \times 6^2 - 6 \times 7^2) = -3 \times 4 \times 15;$$

则 $(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) + \dots + [(2n-1)(2n)^2 - 2n(2n+1)^2] = \underline{-n(n+1)(4n+3)}$.

考点： 规律型：数字的变化类.

分析： 仔细观察题目提供的三个算式，发现结果和式子序列号之间的关系，然后将这个规律表示出来即可.

解答： 解： $\because 1 \times 2^2 - 2 \times 3^2 = -1 \times 2 \times 7 = -1 \times 2 \times (4 \times 1 + 3)$;

$$(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) = -2 \times 3 \times 11 = -2 \times 3 \times (4 \times 2 + 3);$$

$$(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) + (5 \times 6^2 - 6 \times 7^2) = -3 \times 4 \times 15 = -3 \times 4 \times (4 \times 3 + 3);$$

...

$$(1 \times 2^2 - 2 \times 3^2) + (3 \times 4^2 - 4 \times 5^2) + \dots + [(2n-1)(2n)^2 - 2n(2n+1)^2] = -n(n+1)(4n+3),$$

故答案为： $-n(n+1)(4n+3)$.

点评： 本题考查了数字的变化类问题，仔细观察提供的算式，用含有 n 的代数式表示出来即可.

三、解答题：本大题共 7 小题，共 55 分

16. (5 分) (2015•济宁) 计算： $\pi^0 + 2^{-1} - \sqrt{\frac{1}{4}} - |-\frac{1}{3}|$

考点： 实数的运算；零指数幂；负整数指数幂.

专题： 计算题.

分析： 原式第一项利用零指数幂法则计算，第二项利用负整数指数幂法则计算，第三项利用算术平方根的定义计算，最后一项利用绝对值的代数意义化简，计算即可得到结果.

解答： 解：原式 $=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$
 $=\frac{2}{3}$.

点评： 此题考查了实数的运算，熟练掌握运算是解本题的关键.

17. (7 分) (2015•济宁) 某学校初三年级男生共 200 名，随机抽取 10 名测量他们的身高 (单位: cm) 为: 181, 176, 169, 155, 163, 175, 173, 167, 165, 166.

- (1) 求这 10 名男生的平均身高和上面这组数据的中位数;
- (2) 估计该校初三年级男生身高高于 170cm 的人数;
- (3) 从身高为 181, 176, 175, 173 的男生中任选 2 名, 求身高为 181cm 的男生被抽中的概率.

考点： 列表法与树状图法; 用样本估计总体; 算术平均数; 中位数.

分析： (1) 利用平均数及中位数的定义分别计算后即可确定正确的结论;

(2) 用样本平均数估计总体平均数即可;

(3) 列表将所有等可能的结果列举出来, 利用概率公式求解即可.

解答： 解: (1) 平均身高为: $\frac{181+176+169+155+163+175+171+167+165+166}{10}=169\text{cm};$

$\therefore$ 排序后位于中间的两数 167 和 169,

$\therefore$ 中位数为 168cm;

(2) $\therefore$ 10 人中身高高于 170 的有 4 人,

$\therefore$ 200 名初三学生中共有 $200 \times \frac{4}{10} = 80$ 人;

(3) 身高分别为 181, 176, 175, 173 的四名男生分别用 1, 2, 3, 4 表示,

列表得:

1 2 3 4
1 12 13 14
2 21 23 24
3 31 32 34
4 41 42 43

∴共有 12 种等可能的结果, 有 1 的有 6 种,

∴身高为 181cm 的男生被抽中的概率 $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

点评: 本题考查了中位数、平均数及列表与树状图的知识, 解题的关键是能够利用列表将所有等可能的结果列举出来, 难度不大.

18. (7 分) (2015•济宁) 小明到服装店进行社会实践活动, 服装店经理让小明帮助解决以下问题: 服装店准备购进甲乙两种服装, 甲种每件进价 80 元, 售价 120 元, 乙种每件进价 60 元, 售价 90 元. 计划购进两种服装共 100 件, 其中甲种服装不少于 65 件.

(1) 若购进这 100 件服装的费用不得超过 7500 元, 则甲种服装最多购进多少件? ?

(2) 在 (1) 的条件下, 该服装店对甲种服装以每件优惠 a ($0 < a < 20$) 元的价格进行促销活动, 乙种服装价格不变, 那么该服装店应如何调整进货方案才能获得最大利润?

考点: 一次函数的应用; 一元一次不等式组的应用.

分析: (1) 设甲种服装购进 x 件, 则乙种服装购进 $(100 - x)$ 件, 然后根据购进这 100 件服装的费用不得超过 7500 元, 列出不等式解答即可;

(2) 首先求出总利润 W 的表达式, 然后针对 a 的不同取值范围进行讨论, 分别确定其进货方案.

解答: 解: (1) 设甲种服装购进 x 件, 则乙种服装购进 $(100 - x)$ 件,

根据题意得:

$$\begin{cases} x \geq 65 \\ 80x + 60(100 - x) \leq 7500 \end{cases}$$

解得: $65 \leq x \leq 75$,

∴甲种服装最多购进 75 件;

(2) 设总利润为 W 元,

$$W = (120 - 80 - a)x + (90 - 60)(100 - x)$$

$$\text{即 } w = (10 - a)x + 3000.$$

①当 $0 < a < 10$ 时, $10 - a > 0$, W 随 x 增大而增大,

$\therefore$ 当 $x=75$ 时, W 有最大值, 即此时购进甲种服装 75 件, 乙种服装 25 件;

②当 $a=10$ 时, 所以按哪种方案进货都可以;

③当 $10 < a < 20$ 时, $10 - a < 0$, W 随 x 增大而减小.

当 $x=65$ 时, W 有最大值, 即此时购进甲种服装 65 件, 乙种服装 35 件.

点评: 本题考查了一元一次方程的应用, 不等式组的应用, 以及一次函数的性质, 正确利用 x 表示出利润是关键.

19. (8 分) (2015•济宁) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, $\angle DAC$ 是 $\triangle ABC$ 的一个外角.

实验与操作:

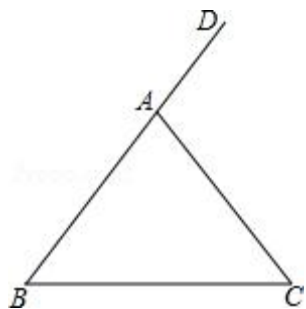
根据要求进行尺规作图, 并在图中标明相应字母 (保留作图痕迹, 不写作法)

(1) 作 $\angle DAC$ 的平分线 AM ;

(2) 作线段 AC 的垂直平分线, 与 AM 交于点 F , 与 BC 边交于点 E , 连接 AE , CF .

猜想并证明:

判断四边形 $AECF$ 的形状并加以证明.



考点: 作图—复杂作图; 角平分线的性质; 线段垂直平分线的性质.

专题: 作图题.

分析： 先作以个角的交平分线，再作线段的垂直平分线得到几何图形，由 $AB=AC$ 得 $\angle ABC=\angle ACB$ ，由 AM 平分 $\angle DAC$ 得 $\angle DAM=\angle CAM$ ，则利用三角形外角性质可得 $\angle CAM=\angle ACB$ ，再根据线段垂直平分线的性质得 $OA=OC$ ， $\angle AOF=\angle COE$ ，于是可证明 $\triangle AOF \cong \triangle COE$ ，所以 $OF=OE$ ，然后根据菱形的判定方法易得四边形 $AECF$ 的形状为菱形.

解答： 解：如图所示，
四边形 $AECF$ 的形状为菱形. 理由如下：

$$\because AB=AC,$$

$$\therefore \angle ABC=\angle ACB,$$

$$\because AM \text{ 平分 } \angle DAC,$$

$$\therefore \angle DAM=\angle CAM,$$

$$\text{而 } \angle DAC=\angle ABC+\angle ACB,$$

$$\therefore \angle CAM=\angle ACB,$$

$$\therefore EF \text{ 垂直平分 } \angle AC,$$

$$\therefore OA=OC, \angle AOF=\angle COE,$$

在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 中

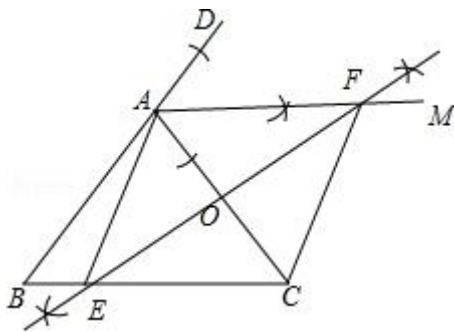
$$\begin{cases} \angle FAO=\angle ECO \\ OA=OC \\ \angle AOF=\angle COE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOF \cong \triangle COE,$$

$$\therefore OF=OE,$$

即 AC 和 EF 互相垂直平分,

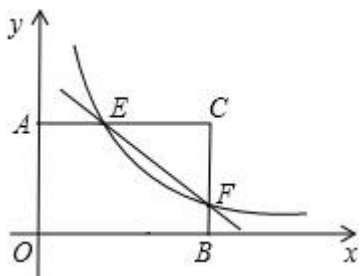
$\therefore$ 四边形 $AECF$ 的形状为菱形.



点评： 本题考查了复杂作图：复杂作图是在五种基本作图的基础上进行作图，一般是结合了几何图形的性质和基本作图方法．解决此类题目的关键是熟悉基本几何图形的性质，结合几何图形的基本性质把复杂作图拆解成基本作图，逐步操作．也考查了垂直平分线的性质和菱形的判定方法．

20. (8 分) (2015•济宁) 在矩形 AOBC 中，OB=6，OA=4，分别以 OB，OA 所在直线为 x 轴和 y 轴，建立如图所示的平面直角坐标系．F 是边 BC 上一点（不与 B、C 两点重合），过点 F 的反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 图象与 AC 边交于点 E．

- (1) 请用 k 的表示点 E，F 的坐标；
- (2) 若 $\triangle OEF$ 的面积为 9，求反比例函数的解析式．



考点： 反比例函数与一次函数的交点问题．

分析： (1) 易得 E 点的纵坐标为 4，F 点的横坐标为 6，把它们分别代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k>0$) 即可得到 E 点和 F 点的坐标；

(2) 分别用矩形面积和能用图中的点表示出的三角形的面积表示出所求的面积，解方程即可求得 k 的值．

解答： 解：(1) $E\left(\frac{k}{4}, 4\right)$ ， $F\left(6, \frac{k}{6}\right)$ ；

(2) $\because E, F$ 两点坐标分别为 $E\left(\frac{k}{4}, 4\right)$ ， $F\left(6, \frac{k}{6}\right)$ ，

$$\therefore S_{\triangle ECF} = \frac{1}{2} EC \cdot CF = \frac{1}{2} \left(6 - \frac{1}{4}k\right) \left(4 - \frac{1}{6}k\right),$$

$$\therefore S_{\triangle EOF} = S_{\text{矩形} AOBC} - S_{\triangle AOE} - S_{\triangle BOF} - S_{\triangle ECF}$$

$$= 24 - \frac{1}{2}k - \frac{1}{2}k - S_{\triangle ECF}$$

$$= 24 - k - \frac{1}{2} \left(6 - \frac{1}{4}k\right) \left(4 - \frac{1}{6}k\right),$$

$\therefore \triangle OEF$ 的面积为 9,

$$\therefore 24 - k - \frac{1}{2} \left(6 - \frac{1}{4}k\right) \left(4 - \frac{1}{6}k\right) = 9,$$

$$\text{整理得, } \frac{k^2}{24} = 6,$$

解得 $k=12$.

$$\therefore \text{反比例函数的解析式为 } y = \frac{12}{x}.$$

点评: 本题考查了反比例函数的性质和图形的面积计算; 点在反比例函数图象上, 则点的横纵坐标满足其解析式; 在求坐标系内一般三角形的面积, 通常整理为矩形面积减去若干直角三角形的面积的形式.

21. (9 分) (2015•济宁) 阅读材料:

在一个三角形中, 各边和它所对角的正弦的比相等, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 利用上述结论可以求解如下题目:

在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A$ 、 $\angle B$ 、 $\angle C$ 的对边分别为 a , b , c . 若 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=30^\circ$, $a=6$, 求 b .

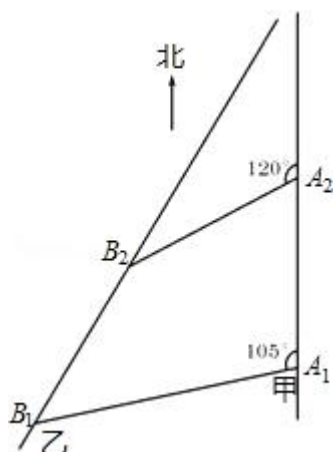
$$\text{解: 在 } \triangle ABC \text{ 中, } \therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \therefore b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}.$$

理解应用:

如图, 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 当甲船位于 A_1 处时, 乙船位于甲船的北偏西 105° 方向的 B_1 处, 且乙船从 B_1 处按北偏东 15° 方向匀速直线航行, 当甲船航行 20 分钟到达 A_2 时, 乙船航行到甲船的北偏西 120° 方向的 B_2 处, 此时两船相距 $10\sqrt{2}$ 海里.

(1) 判断 $\triangle A_1A_2B_2$ 的形状, 并给出证明;

(2) 求乙船每小时航行多少海里？



考点：解直角三角形的应用-方向角问题.

分析： (1) 先根据路程=速度 $\times$ 时间求出 $A_1A_2=30\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=10\sqrt{2}$, 又 $A_2B_2=10\sqrt{2}$, $\angle$

$A_1A_2B_2=60^\circ$, 根据有一个角是 60° 的等腰三角形是等边三角形即可得出 $\triangle A_1A_2B_2$ 是等边三角形;

(2) 先由平行线的性质及方向角的定义求出 $\angle A_1B_1B_2=75^\circ-15^\circ=60^\circ$, 由等边三角形的性质得出 $\angle A_2A_1B_2=60^\circ$, $A_1B_2=A_1A_2=10\sqrt{2}$, 那么 $\angle B_1A_1B_2=105^\circ-60^\circ=45^\circ$. 然后在 $\triangle B_1A_1B_2$ 中, 根据阅读材料可知, $\frac{B_1B_2}{\sin 45^\circ}=\frac{A_1B_2}{\sin 60^\circ}$, 求出 B_1B_2 的距离, 再由时间求出乙船航行的速度.

解答： 解: (1) $\triangle A_1A_2B_2$ 是等边三角形, 理由如下:

连结 A_1B_2 .

$\because$ 甲船以每小时 $30\sqrt{2}$ 海里的速度向正北方向航行, 航行 20 分钟到达 A_2 ,

$$\therefore A_1A_2=30\sqrt{2}\times\frac{1}{3}=10\sqrt{2},$$

又 $\because A_2B_2=10\sqrt{2}$, $\angle A_1A_2B_2=60^\circ$,

$\therefore \triangle A_1A_2B_2$ 是等边三角形;

(2) 如图, $\because B_1N \parallel A_1A_2$,

$$\therefore \angle A_1B_1N=180^\circ-\angle B_1A_1A_2=180^\circ-105^\circ=75^\circ,$$

$$\therefore \angle A_1 B_1 B_2 = 75^\circ - 15^\circ = 60^\circ.$$

$\therefore \triangle A_1 A_2 B_2$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle A_2 A_1 B_2 = 60^\circ, \quad A_1 B_2 = A_1 A_2 = 10\sqrt{2},$$

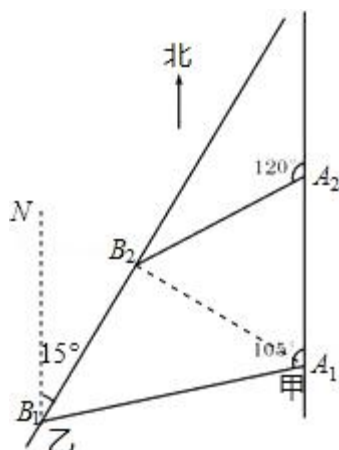
$$\therefore \angle B_1 A_1 B_2 = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ.$$

在 $\triangle B_1 A_1 B_2$ 中, $\therefore A_1 B_2 = 10\sqrt{2}$, $\angle B_1 A_1 B_2 = 105^\circ - 60^\circ = 45^\circ$, $\angle A_2 A_1 B_2 = 60^\circ$,

由阅读材料可知, $\frac{B_1 B_2}{\sin 45^\circ} = \frac{A_1 B_2}{\sin 60^\circ}$,

$$\text{解得 } B_1 B_2 = \frac{10\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{20\sqrt{3}}{3},$$

所以乙船每小时航行: $\frac{20\sqrt{3}}{3} \div \frac{1}{3} = 20\sqrt{3}$ 海里.



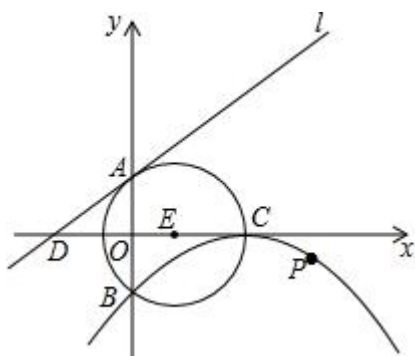
点评: 本题考查了解直角三角形的应用 – 方向角问题, 等边三角形的判定与性质, 方向角的定义, 锐角三角函数的定义, 学生的阅读理解能力以及知识的迁移能力. 正确理解阅读材料是解题的关键.

22. (11 分) (2015•济宁) 如图, $\odot E$ 的圆心 $E(3, 0)$, 半径为 5, $\odot E$ 与 y 轴相交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的上方), 与 x 轴的正半轴交于点 C , 直线 l 的解析式为 $y = \frac{3}{4}x + 4$, 与 x 轴相交于点 D , 以点 C 为顶点的抛物线过点 B .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 判断直线 l 与 $\odot E$ 的位置关系, 并说明理由;

(3) 动点 P 在抛物线上, 当点 P 到直线 l 的距离最小时. 求出点 P 的坐标及最小距离.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 连接 AE, 由已知得: $AE=CE=5$, $OE=3$, 利用勾股定理求出 OA 的长, 结合垂径定理求出 OC 的长, 从而得到 C 点坐标, 进而得到抛物线的解析式;

(2) 求出点 D 的坐标为 $(-\frac{16}{3}, 0)$, 根据 $\triangle AOE \sim \triangle DOA$, 求出 $\angle DAE=90^\circ$, 判断出直线 l 与 $\odot E$ 相切与 A.

(3) 过点 P 作直线 l 的垂线段 PQ, 垂足为 Q, 过点 P 作直线 PM 垂直于 x 轴, 交直线 l 于点 M. 设 $M(m, \frac{3}{4}m+4)$, $P(m, -\frac{1}{16}m^2+m-4)$, 得到 $PM = \frac{3}{4}m+4 - (-\frac{1}{16}m^2+m-4) = \frac{1}{16}m^2 - \frac{1}{4}m+8 = \frac{1}{16}(m-2)^2 + \frac{31}{4}$, 根据 $\triangle PQM$ 的三个内角固定不变, 得到 PQ 最小 $= PM_{\text{最小}} \cdot \sin \angle QMP = PM_{\text{最小}} \cdot \sin \angle AEO = \frac{31}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{31}{5}$, 从而得到最小距离.

解答: 解: (1) 如图 1, 连接 AE, 由已知得: $AE=CE=5$, $OE=3$,

在 $Rt\triangle AOE$ 中, 由勾股定理得, $OA = \sqrt{AE^2 - OE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$,

$\therefore OC \perp AB$,

$\therefore$ 由垂径定理得, $OB=OA=4$,

$OC=OE+CE=3+5=8$,

$\therefore A(0, 4)$, $B(0, -4)$, $C(8, 0)$,

$\therefore$ 抛物线的定点为 C,

$\therefore$ 设抛物线的解析式为 $y=a(x-8)^2$,

将点 B 的坐标代入上解析的式, 得 $64a=-4$, 故 $a=-\frac{1}{16}$,

$$\therefore y = -\frac{1}{16} (x-8)^2,$$

$$\therefore y = -\frac{1}{16}x^2 + x - 4 \text{ 为所求抛物线的解析式,}$$

$$(2) \text{ 在直线 } l \text{ 的解析式 } y = \frac{3}{4}x + 4 \text{ 中, 令 } y=0, \text{ 得 } \frac{3}{4}x + 4 = 0, \text{ 解得 } x = -\frac{16}{3},$$

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的坐标为 } \left(-\frac{16}{3}, 0\right),$$

$$\text{当 } x=0 \text{ 时, } y=4,$$

$$\therefore \text{点 } A \text{ 在直线 } l \text{ 上,}$$

$$\text{在 } Rt\triangle AOE \text{ 和 } Rt\triangle DOA \text{ 中,}$$

$$\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{3}{4}, \quad \frac{OA}{OD} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore \frac{OE}{OA} = \frac{OA}{OD},$$

$$\therefore \angle AOE = \angle DOA = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AOE \sim \triangle DOA,$$

$$\therefore \angle AEO = \angle DAO,$$

$$\therefore \angle AEO + \angle EAO = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DAO + \angle EAO = 90^\circ, \text{ 即 } \angle DAE = 90^\circ, \text{ 因此, 直线 } l \text{ 与 } \odot E \text{ 相切于 } A.$$

(3) 如图 2, 过点 P 作直线 l 的垂线段 PQ, 垂足为 Q, 过点 P 作直线 PM 垂直于 x 轴, 交直线 l 于点 M.

$$\text{设 } M \left(m, \frac{3}{4}m + 4\right), P \left(m, -\frac{1}{16}m^2 + m - 4\right), \text{ 则}$$

$$PM = \frac{3}{4}m + 4 - \left(-\frac{1}{16}m^2 + m - 4\right) = \frac{1}{16}m^2 - \frac{1}{4}m + 8 = \frac{1}{16}(m-2)^2 + \frac{31}{4},$$

$$\text{当 } m=2 \text{ 时, } PM \text{ 取得最小值 } \frac{31}{4},$$

$$\text{此时, } P \left(2, -\frac{9}{4}\right),$$

$$\text{对于 } \triangle PQM,$$

$$\therefore PM \perp x \text{ 轴,}$$

$$\therefore \angle QMP = \angle DAO = \angle AEO,$$

$$\text{又 } \angle PQM = 90^\circ,$$

$\therefore \triangle PQM$ 的三个内角固定不变,

$\therefore$ 在动点 P 运动的过程中, $\triangle PQM$ 的三边的比例关系不变,

$\therefore$ 当 PM 取得最小值时, PQ 也取得最小值,

$$PQ_{\text{最小}} = PM_{\text{最小}} \cdot \sin \angle QMP = PM_{\text{最小}} \cdot \sin \angle AEO = \frac{31}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{31}{5},$$

$\therefore$ 当抛物线上的动点 P 的坐标为 $(2, -\frac{9}{4})$ 时, 点 P 到直线 l 的距离最小, 其最小距离为 $\frac{31}{5}$.

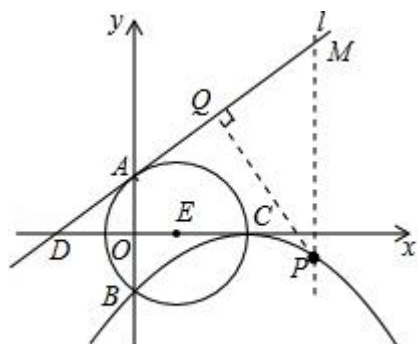


图2

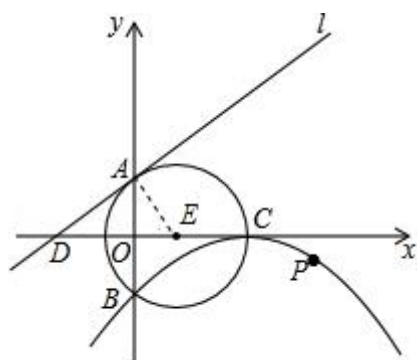


图1

点评: 本题考查了二次函数综合题, 涉及勾股定理、待定系数法求二次函数解析式、切线的判定和性质、二次函数的最值等知识, 在解答 (3) 时要注意点 P 、点 M 坐标的设法, 以便利用二次函数的最值求解.