

2015 年济南市中考数学试题

一、选择题 (共 15 小题, 每小题 3 分, 满分 45 分, 每小题只有一个选项符合题意)

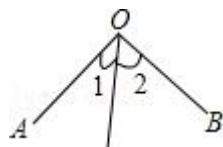
1. (3 分) (2015•济南) -6 的绝对值是 ()

- A. 6 B. -6 C. ± 6 D. $\frac{1}{6}$

2. (3 分) (2015•济南) 新亚欧大陆桥东起太平洋西岸中国连云港, 西达大西洋东岸荷兰鹿特丹等港口, 横贯亚欧两大洲中部地带, 总长约为 10900 公里, 10900 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.109×10^5 B. 1.09×10^4 C. 1.09×10^3 D. 109×10^2

3. (3 分) (2015•济南) 如图, $OA \perp OB$, $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



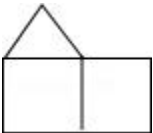
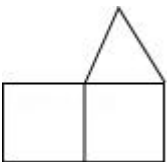
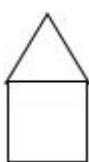
- A. 35° B. 45° C. 55° D. 70°

4. (3 分) (2015•济南) 下列运算不正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a = a^3$ B. $(a^3)^2 = a^6$ C. $(2a^2)^2 = 4a^4$ D. $a^2 \div a^2 = a$

5. (3 分) (2015•济南) 如图, 一个几何体是由两个小正方体和一个圆锥构成, 其主视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

6. (3 分) (2015•济南) 若代数式 $4x - 5$ 与 $\frac{2x-1}{2}$ 的值相等, 则 x 的值是 ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 2

7. (3 分) (2015•济南) 下列图标既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

8. (3分) (2015•济南) 济南某中学足球队的 18 名队员的年龄如表所示:

年龄(单位: 岁)	12	13	14	15
人数	3	5	6	4

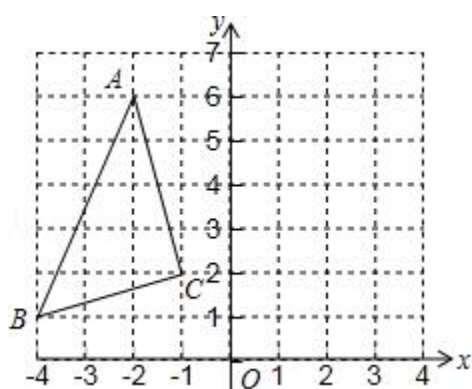
这 18 名队员年龄的众数和中位数分别是 ()

- A. 13 岁, 14 岁 B. 14 岁, 14 岁 C. 14 岁, 13 岁 D. 14 岁, 15 岁

9. (3分) (2015•济南) 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点都在方格纸

的格点上, 如果将 $\triangle ABC$ 先向右平移 4 个单位长度, 在向下平移 1 个单位长度,

得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 那么点 A 的对应点 A_1 的坐标为 ()

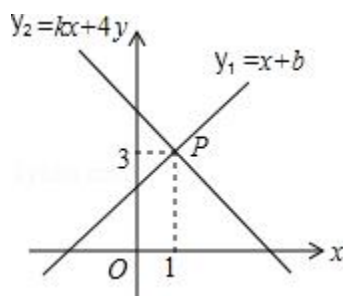


- A. (4, 3) B. (2, 4) C. (3, 1) D. (2, 5)

10. (3分) (2015•济南) 化简 $\frac{m^2}{m-3} - \frac{9}{m-3}$ 的结果是 ()

- A. $m+3$ B. $m-3$ C. $\frac{m-3}{m+3}$ D. $\frac{m+3}{m-3}$

11. (3分) (2015•济南) 如图, 一次函数 $y_1=x+b$ 与一次函数 $y_2=kx+4$ 的图象交于点 P (1, 3), 则关于 x 的不等式 $x+b > kx+4$ 的解集是 ()

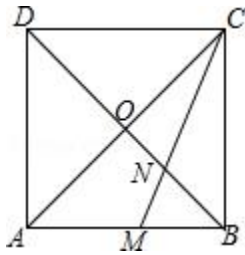


- A. $x > -2$ B. $x > 0$ C. $x > 1$ D. $x < 1$

12. (3分) (2015•济南) 将一块正方形铁皮的四角各剪去一个边长为 3cm 的小正方形, 做成一个无盖的盒子, 已知盒子的容积为 300cm^3 , 则原铁皮的边长为 ()

- A. 10cm B. 13cm C. 14cm D. 16cm

13. (3分) (2015•济南) 如图, 正方形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O, $\angle ACB$ 的角平分线分别交 AB、CD 于 M、N 两点. 若 $AM=2$, 则线段 ON 的长为 ()

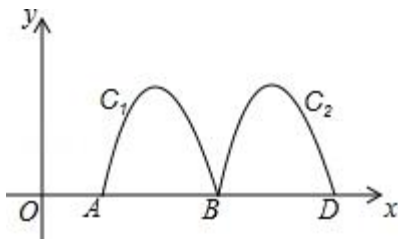


- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. 1 D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

14. (3分) (2015•济南) 在平面直角坐标系中有三个点 A (1, -1)、B (-1, -1)、C (0, 1), 点 P (0, 2) 关于 A 的对称点为 P_1 , P_1 关于 B 的对称点 P_2 , P_2 关于 C 的对称点为 P_3 , 按此规律继续以 A、B、C 为对称中心重复前面的操作, 依次得到 $P_4, P_5, P_6, \dots$, 则点 P_{2015} 的坐标是 ()

- A. (0, 0) B. (0, 2) C. (2, -4) D. (-4, 2)

15. (3分) (2015•济南) 如图, 抛物线 $y = -2x^2 + 8x - 6$ 与 x 轴交于点 A、B, 把抛物线在 x 轴及其上方的部分记作 C_1 , 将 C_1 向右平移得 C_2 , C_2 与 x 轴交于点 B、D. 若直线 $y = x + m$ 与 C_1, C_2 共有 3 个不同的交点, 则 m 的取值范围是 ()



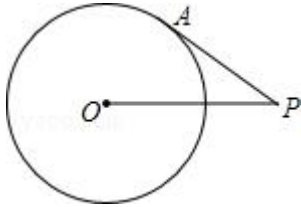
- A. $-2 < m < \frac{1}{8}$ B. $-3 < m < -\frac{7}{4}$ C. $-3 < m < -2$ D. $-3 < m < -\frac{15}{8}$

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

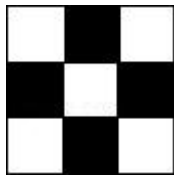
16. (3分) (2015•济南) 分解因式: $xy+x=$ _____.

17. (3分) (2015•济南) 计算: $\sqrt{4}+(-3)^0=$ _____.

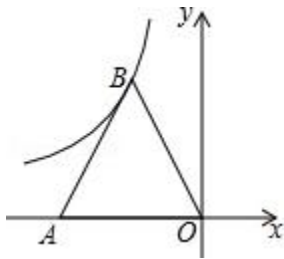
18. (3分) (2015•济南) 如图, PA 是 $\odot O$ 的切线, A 是切点, PA=4, OP=5, 则 $\odot O$ 的周长为_____ (结果保留 π).



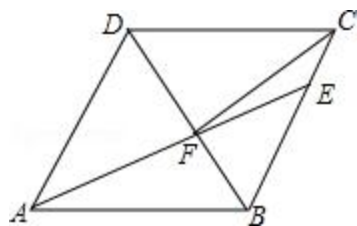
19. (3分) (2015•济南) 小球在如图所示的地板上自由滚动, 并随机地停留在某块方砖上, 每一块方砖的除颜色外完全相同, 它最终停留在黑色方砖上的概率是_____.



20. (3分) (2015•济南) 如图, 等边三角形 AOB 的顶点 A 的坐标为 $(-4, 0)$, 顶点 B 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图象上, 则 $k=$ _____.



21. (3分) (2015•济南) 如图, 在菱形 ABCD 中, AB=6, $\angle DAB=60^\circ$, AE 分别交 BC、BD 于点 E、F, CE=2, 连接 CF, 以下结论: ① $\triangle ABF \cong \triangle CBF$; ② 点 E 到 AB 的距离是 $2\sqrt{3}$; ③ $\tan \angle DCF = \frac{3\sqrt{3}}{7}$; ④ $\triangle ABF$ 的面积为 $\frac{12\sqrt{3}}{5}$. 其中一定成立的是_____ (把所有正确结论的序号都填在横线上).



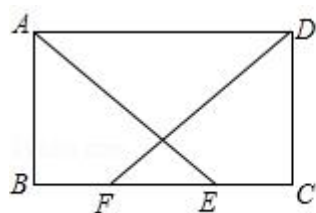
三、解答题（共 7 小题，满分 57 分）

22. (7 分) (2015•济南) (1) 化简: $(x+2)^2 + x(x+3)$

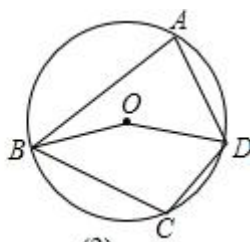
(2) 解不等式组: $\begin{cases} 2x - 1 \geq 3 \\ 2 + 2x \geq 1 + x \end{cases}$.

23. (7 分) (2015•济南) (1) 如图，在矩形 ABCD 中，BF=CE，求证: AE=DF;

(2) 如图，在圆内接四边形 ABCD 中，O 为圆心， $\angle BOD = 160^\circ$ ，求 $\angle BCD$ 的度数.



(1)



(2)

24. (8 分) (2015•济南) 济南与北京两地相距 480km，乘坐高铁列车比乘坐普通快车能提前 4h 到达，已知高铁列车的平均行驶速度是普通快车的 3 倍，求高铁列车的平均行驶速度.

25. (8 分) (2015•济南) 八年级一班开展了“读一本好书”的活动，班委会对学生阅读书籍的情况进行了问卷调查，问卷设置了“小说”、“戏剧”、“散文”、“其他”四个类别，每位同学仅选一项，根据调查结果绘制了不完整的频数分布表和扇形统计图. 根据图表提供的信息，回答下列问题：

类别	频数 (人数)	频率
小说		0.5
戏剧	4	
散文	10	0.25
其他	6	
合计	m	1

- (1) 计算 $m=$ _____；
- (2) 在扇形统计图中，“其他”类所占的百分比为_____；
- (3) 在调查问卷中，甲、乙、丙、丁四位同学选择了“戏剧”类，现从中任意选出 2 名同学参加学校的戏剧社团，请用画树状图或列表的方法，求选取的 2 人恰好是乙和丙的概率.



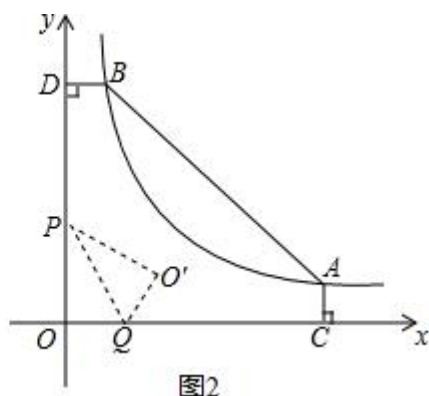
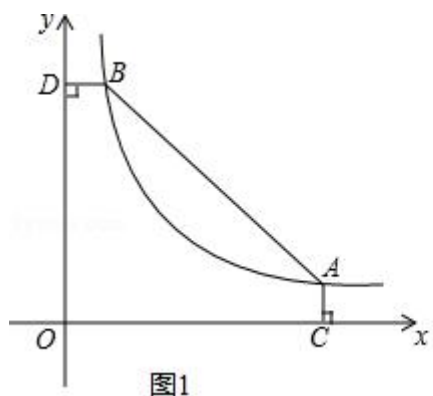
26. (9 分) (2015•济南) 如图 1, 点 A (8, 1)、B (n, 8) 都在反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($x > 0$) 的图象上, 过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C, 过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于 D.

(1) 求 m 的值和直线 AB 的函数关系式;

(2) 动点 P 从 O 点出发, 以每秒 2 个单位长度的速度沿折线 OD - DB 向 B 点运动, 同时动点 Q 从 O 点出发, 以每秒 1 个单位长度的速度沿折线 OC 向 C 点运动, 当动点 P 运动到 D 时, 点 Q 也停止运动, 设运动的时间为 t 秒.

①设 $\triangle OPQ$ 的面积为 S, 写出 S 与 t 的函数关系式;

②如图 2, 当 P 在线段 OD 上运动时, 如果作 $\triangle OPQ$ 关于直线 PQ 的对称图形 $\triangle O'PQ$, 是否存在某时刻 t, 使得点 Q' 恰好落在反比例函数的图象上? 若存在, 求 Q' 的坐标和 t 的值; 若不存在, 请说明理由.



27. (9 分) (2015•济南) 如图 1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, $AC=BC$, $\angle EAC=90^\circ$, 点 M 为射线 AE 上任意一点 (不与 A 重合), 连接 CM , 将线段 CM 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 CN , 直线 NB 分别交直线 CM 、射线 AE 于点 F 、 D .

(1) 直接写出 $\angle NDE$ 的度数;

(2) 如图 2、图 3, 当 $\angle EAC$ 为锐角或钝角时, 其他条件不变, (1) 中的结论是否发生变化? 如果不变, 选取其中一种情况加以证明; 如果变化, 请说明理由;

(3) 如图 4, 若 $\angle EAC=15^\circ$, $\angle ACM=60^\circ$, 直线 CM 与 AB 交于 G , $BD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, 其他条件不变, 求线段 AM 的长.

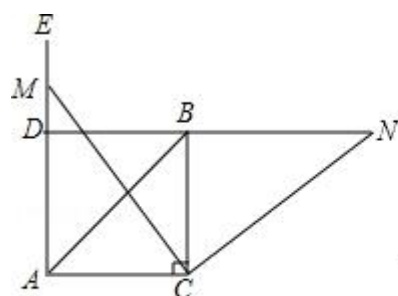


图1

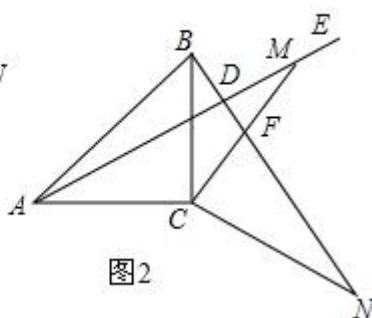


图2

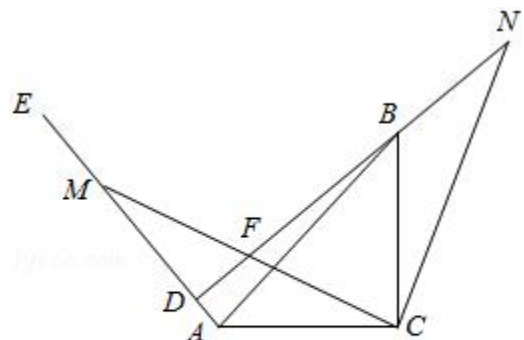


图3

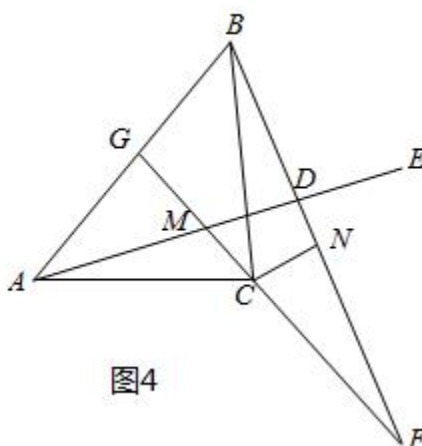


图4

28. (9分) (2015•济南) 抛物线 $y=ax^2+bx+4$ ($a \neq 0$) 过点 A (1, -1), B (5, -1), 与 y 轴交于点 C.

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 如图 1, 连接 CB, 以 CB 为边作 $\square CBPQ$, 若点 P 在直线 BC 上方的抛物线上, Q 为坐标平面内的一点, 且 $\square CBPQ$ 的面积为 30, 求点 P 的坐标;

(3) 如图 2, $\odot O_1$ 过点 A、B、C 三点, AE 为直径, 点 M 为 $\widehat{ACE}$ 上的一动点 (不与点 A, E 重合), $\angle MBN$ 为直角, 边 BN 与 ME 的延长线交于 N, 求线段 BN 长度的最大值.

2015 年山东省济南市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 15 小题，每小题 3 分，满分 45 分，每小题只有一个选项符合题意）

1. (3 分) (2015•济南) -6 的绝对值是 ()

- A. 6 B. -6 C. ± 6 D. $\frac{1}{6}$

考点: 绝对值.

分析: 根据绝对值的概念可得 -6 的绝对值是数轴表示 -6 的点与原点的距离.

解答: 解: -6 的绝对值是 6,

故选: A.

点评: 此题主要考查了绝对值, 关键是掌握绝对值的概念: 数轴上某个数与原点的距离叫做这个数的绝对值.

2. (3 分) (2015•济南) 新亚欧大陆桥东起太平洋西岸中国连云港, 西达大西洋东岸荷兰鹿特丹等港口, 横贯亚欧两大洲中部地带, 总长约为 10900 公里, 10900 用科学记数法表示为 ()

- A. 0.109×10^5 B. 1.09×10^4 C. 1.09×10^3 D. 109×10^2

考点: 科学记数法—表示较大的数.

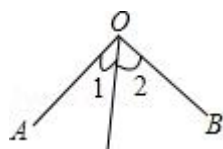
分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 10900 用科学记数法表示为: 1.09×10^4 .

故选: B.

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2015•济南) 如图, $OA \perp OB$, $\angle 1 = 35^\circ$, 则 $\angle 2$ 的度数是 ()



- A. 35° B. 45° C. 55° D. 70°

考点: 余角和补角；垂线.

分析: 根据两个角的和为 90° ，可得两角互余，可得答案.

解答: 解： $\because OA \perp OB$,

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ,$$

$$\text{即 } \angle 2 + \angle 1 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 = 55^\circ,$$

故选： C.

点评: 此题考查了余角的知识，掌握互余两角之和等于 90° 是解答本题的关键.

4. (3 分) (2015•济南) 下列运算不正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a = a^3$ B. $(a^3)^2 = a^6$ C. $(2a^2)^2 = 4a^4$ D. $a^2 \div a^2 = a$

考点: 同底数幂的除法；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方.

分析: 根据同底数幂相乘，底数不变指数相加；幂的乘方，底数不变指数相乘；积的乘方，先把积的每一个因式分别乘方，再把所得的幂相乘；同底数幂相除，底数不变指数相减；对各选项分析判断即可得解.

解答: 解： A、 $a^2 \cdot a = a^{2+1} = a^3$ ，故本选项错误；

B、 $(a^3)^2 = a^{3 \times 2} = a^6$ ，故本选项错误；

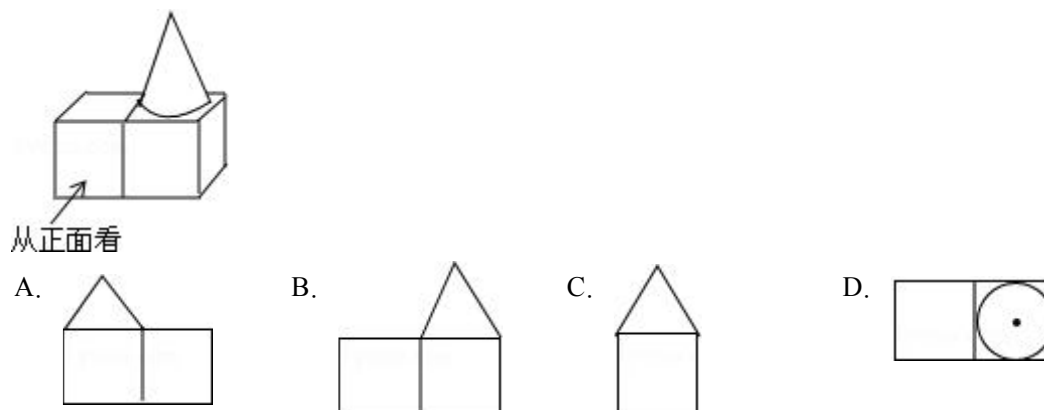
C、 $(2a^2)^2 = 2^2 \cdot (a^2)^2 = 4a^4$ ，故本选项错误；

D、 应为 $a^2 \div a^2 = a^{2-2} = a^0 = 1$ ，故本选项正确.

故选 D.

点评: 本题考查了同底数幂的乘法，积的乘方的性质，幂的乘方的性质，同底数幂的除法，熟练掌握运算性质和法则是解题的关键.

5. (3分) (2015•济南) 如图, 一个几何体是由两个小正方体和一个圆锥构成, 其主视图是 ()



考点: 简单组合体的三视图.

分析: 根据从正面看得到的图形是主视图, 可得答案.

解答: 解: 从正面看第一层两个小正方形, 第二层右边一个三角形,
故选: B.

点评: 本题考查了简单组合体的三视图, 从正面看得到的图形是主视图, 注意圆锥的主视图是三角形.

6. (3分) (2015•济南) 若代数式 $4x - 5$ 与 $\frac{2x-1}{2}$ 的值相等, 则 x 的值是 ()

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 2

考点: 解一元一次方程.

专题: 计算题.

分析: 根据题意列出方程, 求出方程的解即可得到 x 的值.

解答: 解: 根据题意得: $4x - 5 = \frac{2x-1}{2}$,

去分母得: $8x - 10 = 2x - 1$,

解得: $x = \frac{3}{2}$,

故选 B.

点评: 此题考查了解一元一次方程, 其步骤为: 去分母, 去括号, 移项合并, 把未知数系数

化为 1，求出解.

7. (3 分) (2015•济南) 下列图标既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ()



考点: 中心对称图形；轴对称图形.

分析: 根据轴对称图形与中心对称的概念对各选项分析判断即可得解.

解答: 解: A、是轴对称图形, 不是中心对称图形, 故本选项错误;

B、不是轴对称图形, 是中心对称图形, 故本选项错误;

C、既是轴对称图形又是中心对称图形, 故本选项正确;

D、既不是轴对称图形, 也不是中心对称图形, 故本选项错误.

故选 C.

点评: 本题考查了中心对称图形与轴对称图形的概念. 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分折叠后可重合, 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180 度后两部分重合.

8. (3 分) (2015•济南) 济南某中学足球队的 18 名队员的年龄如表所示:

年龄 (单位: 岁)	12	13	14	15
人数	3	5	6	4

这 18 名队员年龄的众数和中位数分别是 ()

A. 13 岁, 14 岁 B. 14 岁, 14 岁 C. 14 岁, 13 岁 D. 14 岁, 15 岁

考点: 众数；中位数.

分析: 首先找出这组数据中出现次数最多的数, 则它就是这 18 名队员年龄的众数; 然后根据这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数, 判断出这 18 名队员年龄的中位数是多少即可.

解答: 解: $\because$ 济南某中学足球队的 18 名队员中, 14 岁的最多, 有 6 人,

$\therefore$ 这 18 名队员年龄的众数是 14 岁;

$\therefore 18 \div 2 = 9$, 第 9 名和第 10 名的成绩是中间两个数,

$\therefore$ 这组数据的中间两个数分别是 14 岁、14 岁,

$\therefore$ 这 18 名队员年龄的中位数是:

$$\begin{aligned} & (14+14) \div 2 \\ &= 28 \div 2 \\ &= 14 \text{ (岁)} \end{aligned}$$

综上, 可得

这 18 名队员年龄的众数是 14 岁, 中位数是 14 岁.

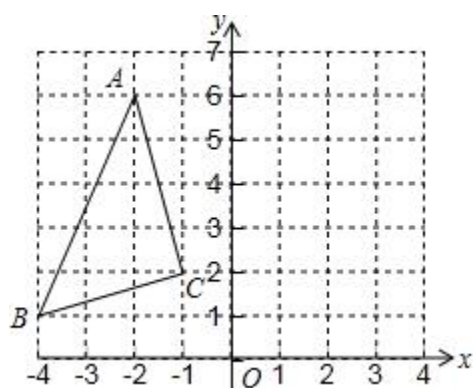
故选: B.

点评: (1) 此题主要考查了众数的含义和求法, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确:

①一组数据中出现次数最多的数据叫做众数. ②求一组数据的众数的方法: 找出频数最多的那个数据, 若几个数据频数都是最多且相同, 此时众数就是这多个数据.

(2) 此题还考查了中位数的含义和求法, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, ①如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数. ②如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

9. (3 分) (2015•济南) 如图, 在平面直角坐标系中, $\triangle ABC$ 的顶点都在方格纸的格点上, 如果将 $\triangle ABC$ 先向右平移 4 个单位长度, 在向下平移 1 个单位长度, 得到 $\triangle A_1B_1C_1$, 那么点 A 的对应点 A_1 的坐标为 ()



- A. (4, 3) B. (2, 4) C. (3, 1) D. (2, 5)

考点: 坐标与图形变化-平移.

分析: 根据平移规律横坐标, 右移加, 左移减; 纵坐标, 上移加, 下移减进行计算即可.

解答: 解: 由坐标系可得 A (-2, 6), 将△ABC 先向右平移 4 个单位长度, 在向下平移 1 个单位长度, 点 A 的对应点 A₁ 的坐标为 (-2+4, 6-1),

即 (2, 5),

故选: D.

点评: 此题主要考查了坐标与图形的变化——平移, 关键是掌握点的坐标的变化规律.

10. (3 分) (2015•济南) 化简 $\frac{m^2}{m-3} - \frac{9}{m-3}$ 的结果是 ()

A. $m+3$

B. $m-3$

C. $\frac{m-3}{m+3}$

D. $\frac{m+3}{m-3}$

考点: 分式的加减法.

专题: 计算题.

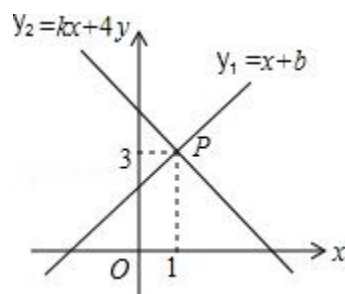
分析: 原式利用同分母分式的减法法则计算, 约分即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= \frac{m^2 - 9}{m-3} = \frac{(m+3)(m-3)}{m-3} = m+3$.

故选 A.

点评: 此题考查了分式的加减法, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

11. (3 分) (2015•济南) 如图, 一次函数 $y_1=x+b$ 与一次函数 $y_2=kx+4$ 的图象交于点 P (1, 3), 则关于 x 的不等式 $x+b > kx+4$ 的解集是 ()



A. $x > -2$

B. $x > 0$

C. $x > 1$

D. $x < 1$

考点: 一次函数与一元一次不等式.

分析: 观察函数图象得到当 $x > 1$ 时, 函数 $y=x+b$ 的图象都在 $y=kx+4$ 的图象上方, 所以关于 x 的不等式 $x+b > kx+4$ 的解集为 $x > 1$.

解答: 解: 当 $x > 1$ 时, $x+b > kx+4$,
即不等式 $x+b > kx+4$ 的解集为 $x > 1$.

故选: C.

点评: 本题考查了一次函数与一元一次不等式: 从函数的角度看, 就是寻求使一次函数 $y=ax+b$ 的值大于 (或小于) 0 的自变量 x 的取值范围; 从函数图象的角度看, 就是确定直线 $y=kx+b$ 在 x 轴上 (或下) 方部分所有的点的横坐标所构成的集合.

12. (3 分) (2015•济南) 将一块正方形铁皮的四角各剪去一个边长为 3cm 的小正方形, 做成一个无盖的盒子, 已知盒子的容积为 300cm^3 , 则原铁皮的边长为 ()

A. 10cm B. 13cm C. 14cm D. 16cm

考点: 一元二次方程的应用.

专题: 几何图形问题.

分析: 设正方形铁皮的边长应是 x 厘米, 则做成没有盖的长方体盒子的长、宽为 $(x-3\times 2)$ 厘米, 高为 3 厘米, 根据长方体的体积计算公式列方程解答即可.

解答: 解: 正方形铁皮的边长应是 x 厘米, 则没有盖的长方体盒子的长、宽为 $(x-3\times 2)$ 厘米, 高为 3 厘米, 根据题意列方程得,

$$(x-3\times 2)(x-3\times 2)\times 3=300,$$

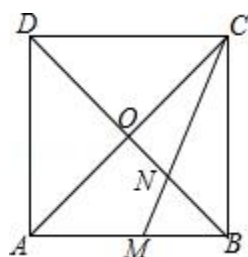
解得 $x_1=16$, $x_2=-4$ (不合题意, 舍去);

答: 正方形铁皮的边长应是 16 厘米.

故选: D.

点评: 此题主要考查长方体的体积计算公式: 长方体的体积=长 $\times$ 宽 $\times$ 高, 以及平面图形折成立体图形后各部分之间的关系.

13. (3 分) (2015•济南) 如图, 正方形 ABCD 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O, $\angle ACB$ 的角平分线分别交 AB、CD 于 M、N 两点. 若 $AM=2$, 则线段 ON 的长为 ()



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

C. 1

D. $\frac{\sqrt{6}}{2}$

考点: 相似三角形的判定与性质; 角平分线的性质; 正方形的性质.

专题: 计算题.

分析: 作 $MH \perp AC$ 于 H , 如图, 根据正方形的性质得 $\angle MAH = 45^\circ$, 则 $\triangle AMH$ 为等腰直角

三角形, 所以 $AH = MH = \frac{\sqrt{2}}{2}AM = \sqrt{2}$, 再根据角平分线性质得 $BM = MH = \sqrt{2}$, 则

$AB = 2 + \sqrt{2}$, 于是利用正方形的性质得到 $AC = \sqrt{2}AB = 2\sqrt{2} + 2$

$OC = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2} + 1$, 所以 $CH = AC - AH = 2 + \sqrt{2}$, 然后证明 $\triangle CON \sim \triangle CHM$, 再利用相

似比可计算出 ON 的长.

解答: 解: 作 $MH \perp AC$ 于 H , 如图,

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为正方形,

$\therefore \angle MAH = 45^\circ$,

$\therefore \triangle AMH$ 为等腰直角三角形,

$\therefore AH = MH = \frac{\sqrt{2}}{2}AM = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$,

$\because CM$ 平分 $\angle ACB$,

$\therefore BM = MH = \sqrt{2}$,

$\therefore AB = 2 + \sqrt{2}$,

$\therefore AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}(2 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2$,

$\therefore OC = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2} + 1$, $CH = AC - AH = 2\sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$,

$\because BD \perp AC$,

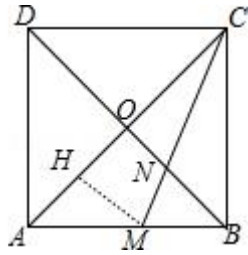
$\therefore ON \parallel MH$,

$\therefore \triangle CON \sim \triangle CHM$,

$\therefore \frac{ON}{MH} = \frac{OC}{CH}$, 即 $\frac{ON}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 + \sqrt{2}}$,

∴ ON=1.

故选 C.



点评: 本题考查了相似三角形的判定与性质: 在判定两个三角形相似时, 应注意利用图形中已有的公共角、公共边等隐含条件, 以充分发挥基本图形的作用, 寻找相似三角形的一般方法是通过作平行线构造相似三角形. 也考查了角平分线的性质和正方形的性质.

14. (3 分) (2015•济南) 在平面直角坐标系中有三个点 A (1, -1)、B (-1, -1)、C (0, 1), 点 P (0, 2) 关于 A 的对称点为 P₁, P₁ 关于 B 的对称点 P₂, P₂ 关于 C 的对称点为 P₃, 按此规律继续以 A、B、C 为对称中心重复前面的操作, 依次得到 P₄, P₅, P₆, ..., 则点 P₂₀₁₅ 的坐标是 ()

A. (0, 0) B. (0, 2) C. (2, -4) D. (-4, 2)

考点: 规律型: 点的坐标.

分析: 设 P₁ (x, y), 再根据中点的坐标特点求出 x、y 的值, 找出规律即可得出结论.

解答: 解: 设 P₁ (x, y),

∵ 点 A (1, -1)、B (-1, -1)、C (0, 1), 点 P (0, 2) 关于 A 的对称点为 P₁,

P₁ 关于 B 的对称点 P₂,

$$\therefore \frac{x}{2}=1, \frac{y+2}{2}=-1, \text{ 解得 } x=2, y=-4,$$

$$\therefore P_1 (2, -4).$$

同理可得, P₁ (2, -4), P₂ (-4, 2), P₃ (4, 0), P₄ (-2, -2), P₅ (0, 0), P₆ (0, 2), P₇ (2, -4), ..., ...,

∴ 每 6 个数循环一次.

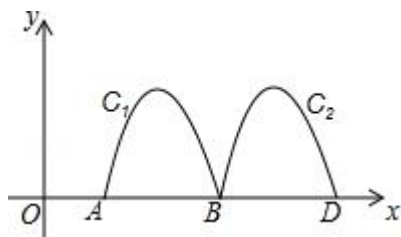
$$\therefore \frac{2015}{6}=335 \dots 5,$$

∴ 点 P₂₀₁₅ 的坐标是 (0, 0).

故选 A.

点评: 本题考查的是点的坐标, 根据题意找出规律是解答此题的关键.

15. (3 分) (2015•济南) 如图, 抛物线 $y = -2x^2 + 8x - 6$ 与 x 轴交于点 A、B, 把抛物线在 x 轴及其上方的部分记作 C_1 , 将 C_1 向右平移得 C_2 , C_2 与 x 轴交于点 B、D. 若直线 $y = x + m$ 与 C_1 、 C_2 共有 3 个不同的交点, 则 m 的取值范围是 ()



- A. $-2 < m < \frac{1}{8}$ B. $-3 < m < -\frac{7}{4}$ C. $-3 < m < -2$ D. $-3 < m < -\frac{15}{8}$

考点: 抛物线与 x 轴的交点; 二次函数图象与几何变换.

分析: 首先求出点 A 和点 B 的坐标, 然后求出 C_2 解析式, 分别求出直线 $y = x + m$ 与抛物线 C_2 相切时 m 的值以及直线 $y = x + m$ 过点 B 时 m 的值, 结合图形即可得到答案.

解答: 解: 令 $y = -2x^2 + 8x - 6 = 0$,

$$\text{即 } x^2 - 4x + 3 = 0,$$

解得 $x = 1$ 或 3 ,

则点 A $(1, 0)$, B $(3, 0)$,

由于将 C_1 向右平移 2 个长度单位得 C_2 ,

则 C_2 解析式为 $y = -2(x - 4)^2 + 2$ ($3 \leq x \leq 5$),

当 $y = x + m_1$ 与 C_2 相切时,

$$\text{令 } y = x + m_1 = y = -2(x - 4)^2 + 2,$$

$$\text{即 } 2x^2 - 15x + 30 + m_1 = 0,$$

$$\Delta = -8m_1 - 15 = 0,$$

$$\text{解得 } m_1 = -\frac{15}{8},$$

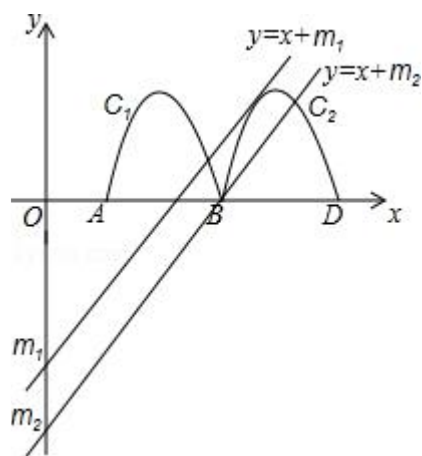
当 $y = x + m_2$ 过点 B 时,

$$\text{即 } 0 = 3 + m_2,$$

$$m_2 = -3,$$

当 $-3 < m < -\frac{15}{8}$ 时直线 $y=x+m$ 与 C_1 、 C_2 共有 3 个不同的交点,

故选 D.



点评: 本题主要考查抛物线与 x 轴交点以及二次函数图象与几何变换的知识, 解答本题的关键是正确地画出图形, 利用数形结合进行解题, 此题有一定的难度.

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

16. (3 分) (2015•济南) 分解因式: $xy+x=\underline{x(y+1)}$.

考点: 因式分解-提公因式法.

分析: 直接提取公因式 x , 进而分解因式得出即可.

解答: 解: $xy+x=x(y+1)$.

故答案为: $x(y+1)$.

点评: 此题主要考查了提取公因式法分解因式, 正确找出公因式是解题关键.

17. (3 分) (2015•济南) 计算: $\sqrt{4}+(-3)^0=\underline{3}$.

考点: 实数的运算; 零指数幂.

专题: 计算题.

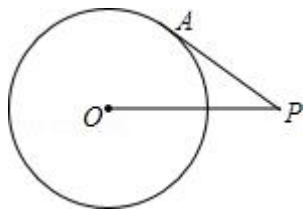
分析: 原式第一项利用算术平方根定义计算, 第二项利用零指数幂法则计算即可得到结果.

解答: 解: 原式 $=2+1=3$.

故答案为: 3.

点评: 此题考查了实数的运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

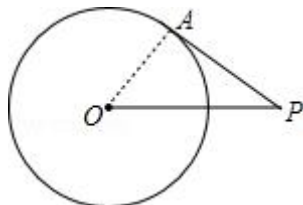
18. (3 分) (2015•济南) 如图, PA 是 $\odot O$ 的切线, A 是切点, PA=4, OP=5, 则 $\odot O$ 的周长为 6π (结果保留 π).



考点: 切线的性质; 勾股定理.

分析: 连接 OA, 根据切线的性质求出 $\angle OAP=90^\circ$, 根据勾股定理求出 OA 即可.

解答:



解:

连接 OA,

$\because$ PA 是 $\odot O$ 的切线, A 是切点,

$\therefore \angle OAP=90^\circ$,

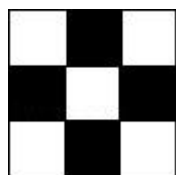
在 $Rt\triangle OAP$ 中, $\angle OAP=90^\circ$, PA=4, OP=5, 由勾股定理得: OA=3,

则 $\odot O$ 的周长为 $2\pi \times 3=6\pi$,

故答案为: 6π .

点评: 本题考查了切线的性质, 勾股定理的应用, 解此题的关键是能正确作出辅助线, 并求出 $\angle OAP=90^\circ$, 注意: 圆的切线垂直于过切点的半径.

19. (3 分) (2015•济南) 小球在如图所示的地板上自由滚动, 并随机地停留在某块方砖上, 每一块方砖的除颜色外完全相同, 它最终停留在黑色方砖上的概率是 $\frac{4}{9}$.



考点: 几何概率.

分析: 根据几何概率的求法: 最终停留在黑色的方砖上的概率就是黑色区域的面积与总面积的比值.

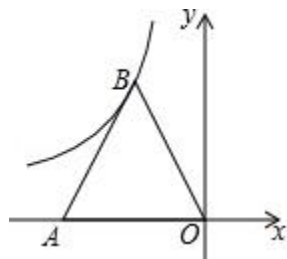
解答: 解: 观察这个图可知: 黑色区域 (4 块) 的面积占总面积 (9 块) 的 $\frac{4}{9}$,

则它最终停留在黑色方砖上的概率是 $\frac{4}{9}$;

故答案为: $\frac{4}{9}$.

点评: 本题考查几何概率的求法: 首先根据题意将代数关系用面积表示出来, 一般用阴影区域表示所求事件 (A); 然后计算阴影区域的面积在总面积中占的比例, 这个比例即事件 (A) 发生的概率.

20. (3 分) (2015•济南) 如图, 等边三角形 AOB 的顶点 A 的坐标为 $(-4, 0)$, 顶点 B 在反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图象上, 则 $k = \underline{-4\sqrt{3}}$.



考点: 反比例函数图象上点的坐标特征; 等边三角形的性质.

分析: 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D, 因为 $\triangle AOB$ 是等边三角形, 点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ 所以 $\angle AOB = 60^\circ$, 根据锐角三角函数的定义求出 BD 及 OD 的长, 可得出 B 点坐标, 进而得出反比例函数的解析式;

解答: 解: 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D,

$\because \triangle AOB$ 是等边三角形, 点 A 的坐标为 $(-4, 0)$,

$\therefore \angle AOB = 60^\circ$, $OB = OA = AB = 4$,

$\therefore OD = \frac{1}{2}OB = 2$, $BD = OB \cdot \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$,

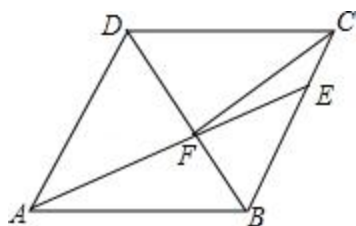
$\therefore B(-2, 2\sqrt{3})$,

$\therefore k = -2 \times 2\sqrt{3} = -4\sqrt{3}$;

故答案为 $-4\sqrt{3}$.

点评: 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特点、等边三角形的性质、解直角三角函数等知识, 难度适中.

21. (3 分) (2015•济南) 如图, 在菱形 ABCD 中, $AB=6$, $\angle DAB=60^\circ$, AE 分别交 BC、BD 于点 E、F, $CE=2$, 连接 CF, 以下结论: ① $\triangle ABF \cong \triangle CBF$; ② 点 E 到 AB 的距离是 $2\sqrt{3}$; ③ $\tan \angle DCF = \frac{3\sqrt{3}}{7}$; ④ $\triangle ABF$ 的面积为 $\frac{12\sqrt{3}}{5}$. 其中一定成立的是 ①②③ (把所有正确结论的序号都填在横线上).



考点: 四边形综合题.

分析: 利用 SAS 证明 $\triangle ABF$ 与 $\triangle CBF$ 全等, 得出①正确, 根据含 30° 角的直角三角形的性质得出点 E 到 AB 的距离是 $2\sqrt{3}$, 得出②正确, 同时得出: $\triangle ABF$ 的面积为 $\frac{18\sqrt{3}}{5}$ 得出④错误, 得出 $\tan \angle DCF = \frac{3\sqrt{3}}{7}$, 得出③正确.

解答: 解: $\because$ 菱形 ABCD,

$$\therefore AB=BC=6,$$

$$\therefore \angle DAB=60^\circ,$$

$$\therefore AB=AD=DB, \quad \angle ABD=\angle DBC=60^\circ,$$

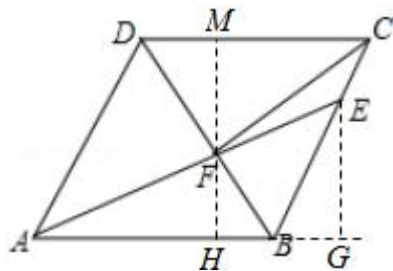
在 $\triangle ABF$ 与 $\triangle CBF$ 中,

$$\begin{cases} AB=BC \\ \angle ABF=\angle FBC, \\ BF=BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABF \cong \triangle CBF \quad (\text{SAS}),$$

$$\therefore \text{①正确};$$

过点 E 作 $EG \perp AB$, 过点 F 作 $MH \perp CD$, $MH \perp AB$, 如图:



$$\because CE=2, BC=6, \angle ABC=120^\circ,$$

$$\therefore BE=6-2=4,$$

$$\because EG \perp AB,$$

$$\therefore EG=2\sqrt{3},$$

$$\therefore \text{点 } E \text{ 到 } AB \text{ 的距离是 } 2\sqrt{3},$$

故②正确;

$$\because BE=4, EC=2,$$

$$\therefore S_{\triangle BFE} : S_{\triangle FEC} = 4 : 2 = 2 : 1,$$

$$\therefore S_{\triangle ABF} : S_{\triangle FBE} = 3 : 2,$$

$$\therefore \triangle ABF \text{ 的面积为 } = \frac{3}{5} S_{\triangle ABE} = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} = \frac{18\sqrt{3}}{5},$$

故④错误;

$$\because S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle DFC} = S_{\triangle ADB} - S_{\triangle ABF} = 9\sqrt{3} - \frac{18\sqrt{3}}{5} = \frac{27\sqrt{3}}{5},$$

$$\because S_{\triangle DFC} = \frac{1}{2} \times 6 \times FM = \frac{27\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore FM = \frac{9\sqrt{3}}{5},$$

$$\therefore DM = \frac{MF}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{5}}{\sqrt{3}} = \frac{9}{5},$$

$$\therefore CM = DC - DM = 6 - \frac{9}{5} = \frac{21}{5},$$

$$\therefore \tan \angle DCF = \frac{MF}{CM} = \frac{\frac{9\sqrt{3}}{5}}{\frac{21}{5}} = \frac{3\sqrt{3}}{7},$$

故③正确;

故答案为: ①②③

点评: 此题考查了四边形综合题, 关键是根据菱形的性质、等边三角形的判定与性质以及全等三角形的判定与性质分析. 此题难度较大, 注意掌握辅助线的作法, 注意数形结合思想的应用.

三、解答题 (共 7 小题, 满分 57 分)

22. (7 分) (2015•济南) (1) 化简: $(x+2)^2+x(x+3)$

(2) 解不等式组:
$$\begin{cases} 2x-1 \geq 3 \\ 2+2x \geq 1+x \end{cases}$$

考点: 整式的混合运算; 解一元一次不等式组.

分析: (1) 利用完全平方公式以及单项式乘以多项式运算法则化简求出即可;

(2) 分别解不等式, 进而得出其解集即可.

解答: 解: (1) $(x+2)^2+x(x+3)$

$$=x^2+4x+4+x^2+3x$$

$$=2x^2+7x+4;$$

$$(2) \begin{cases} 2x-1 \geq 3 \text{ ①} \\ 2+2x \geq 1+x \text{ ②} \end{cases},$$

解①得: $x \geq 2$,

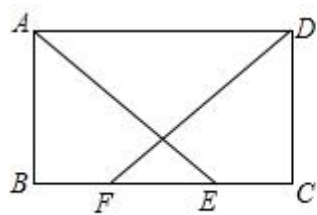
解②得: $x \geq -1$,

故不等式组的解为: $x \geq 2$.

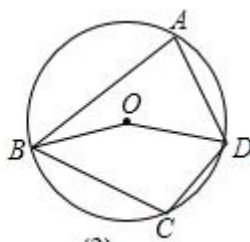
点评: 此题主要考查了整式的混合运算以及解一元一次不等式组, 正确掌握运算法则得出不等式组的解集是解题关键.

23. (7 分) (2015•济南) (1) 如图, 在矩形 ABCD 中, $BF=CE$, 求证: $AE=DF$;

(2) 如图, 在圆内接四边形 ABCD 中, O 为圆心, $\angle BOD=160^\circ$, 求 $\angle BCD$ 的度数.



(1)



(2)

考点: 矩形的性质；全等三角形的判定与性质；圆周角定理；圆内接四边形的性质.

分析: (1) 根据矩形的性质得出 $AB=CD$, $\angle B=\angle C=90^\circ$, 求出 $BE=CF$, 根据 SAS 推出

$\triangle ABE \cong \triangle DCF$ 即可;

(2) 根据圆周角定理求出 $\angle BAD$, 根据圆内接四边形性质得出 $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$, 即可求出答案.

解答: (1) 证明: $\because$ 四边形 ABCD 是矩形,

$\therefore AB=CD$, $\angle B=\angle C=90^\circ$,

$\therefore BF=CE$,

$\therefore BE=CF$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle DCF$ 中

$$\begin{cases} AB=CD \\ \angle B=\angle C \\ BE=CF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle DCF$,

$\therefore AE=DF$;

(2) 解: $\because \angle BOD=160^\circ$,

$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD = 80^\circ$,

$\therefore A、B、C、D$ 四点共圆,

$\therefore \angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$,

$\therefore \angle BCD = 100^\circ$.

点评: 本题考查了全等三角形的性质和判定, 矩形的性质, 圆周角定理, 圆内接四边形性质的应用, 解 (1) 小题的关键是求出 $\triangle ABE \cong \triangle DCF$, 解 (2) 小题的关键是求出 $\angle BAD$ 的度数和得出 $\angle BCD + \angle BAD = 180^\circ$.

24. (8 分) (2015•济南) 济南与北京两地相距 480km, 乘坐高铁列车比乘坐普通快车能提前 4h 到达, 已知高铁列车的平均行驶速度是普通快车的 3 倍, 求高铁列车的平均行驶速度.

考点: 分式方程的应用.

分析: 首先设普通快车的速度为 $x\text{km/时}$, 则高铁列车的平均行驶速度是 $3x\text{km/时}$, 根据题意可得等量关系: 乘坐普通快车所用时间 - 乘坐高铁列车所用时间 = 4h , 根据等量关系列出方程, 再解即可.

解答: 解: 设普通快车的速度为 $x\text{km/时}$, 由题意得:

$$\frac{480}{x} - \frac{480}{3x} = 4,$$

解得: $x = 80$,

经检验: $x = 80$ 是原分式方程的解,

$$3x = 3 \times 80 = 240,$$

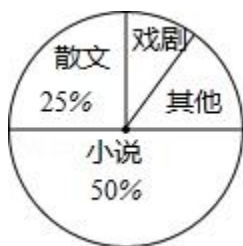
答: 高铁列车的平均行驶速度是 240km/时 .

点评: 此题主要考查了分式方程的应用, 关键是正确理解题意, 找出题目中的等量关系, 列出方程, 注意分式方程不能忘记检验.

25. (8 分) (2015•济南) 八年级一班开展了“读一本好书”的活动, 班委会对学生阅读书籍的情况进行了问卷调查, 问卷设置了“小说”、“戏剧”、“散文”、“其他”四个类别, 每位同学仅选一项, 根据调查结果绘制了不完整的频数分布表和扇形统计图. 根据图表提供的信息, 回答下列问题:

类别	频数 (人数)	频率
小说		0.5
戏剧	4	
散文	10	0.25
其他	6	
合计	m	1

- (1) 计算 $m = \underline{40}$;
- (2) 在扇形统计图中, “其他”类所占的百分比为 $\underline{15\%}$;
- (3) 在调查问卷中, 甲、乙、丙、丁四位同学选择了“戏剧”类, 现从中任意选出 2 名同学参加学校的戏剧社团, 请用画树状图或列表的方法, 求选取的 2 人恰好是乙和丙的概率.



考点：列表法与树状图法；频数（率）分布表；扇形统计图.

分析：（1）用散文的频数除以其频率即可求得样本总数；

（2）根据其他类的频数和总人数求得其百分比即可；

（3）画树状图得出所有等可能的情况数，找出恰好是丙与乙的情况，即可确定出所求概率.

解答：解：（1） $\because$ 喜欢散文的有 10 人，频率为 0.25，

$$\therefore m=10 \div 0.25=40;$$

（2）在扇形统计图中，“其他”类所占的百分比为 $\frac{6}{40} \times 100\% = 15\%$,

故答案为：15%；

（3）画树状图，如图所示：



所有等可能的情况有 12 种，其中恰好是丙与乙的情况有 2 种，

$$\therefore P(\text{丙和乙}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

点评：此题考查了列表法与树状图法，用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比.

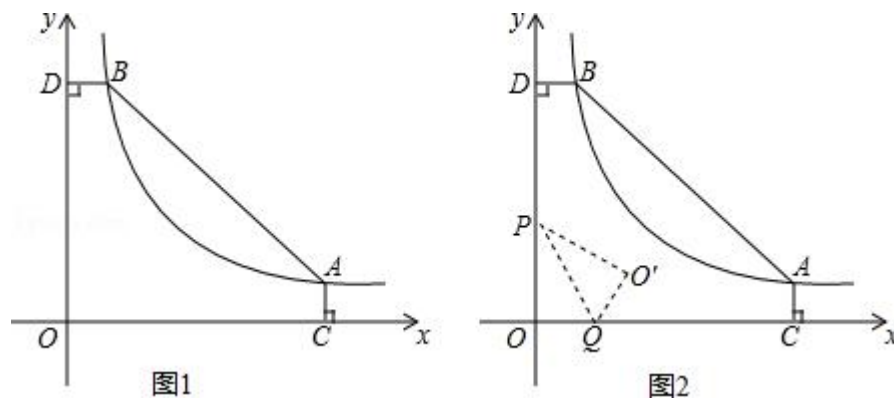
26. (9 分) (2015•济南) 如图 1，点 A (8, 1)、B (n, 8) 都在反比例函数 $y = \frac{\pi}{x}$ ($x > 0$) 的图象上，过点 A 作 $AC \perp x$ 轴于 C，过点 B 作 $BD \perp y$ 轴于 D.

(1) 求 m 的值和直线 AB 的函数关系式；

(2) 动点 P 从 O 点出发，以每秒 2 个单位长度的速度沿折线 OD - DB 向 B 点运动，同时动点 Q 从 O 点出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿折线 OC 向 C 点运动，当动点 P 运动到 D 时，点 Q 也停止运动，设运动的时间为 t 秒.

① 设 $\triangle OPQ$ 的面积为 S，写出 S 与 t 的函数关系式；

② 如图 2，当的 P 在线段 OD 上运动时，如果作 $\triangle OPQ$ 关于直线 PQ 的对称图形 $\triangle O'PQ$ ，是否存在某时刻 t，使得点 Q' 恰好落在反比例函数的图象上？若存在，求 Q' 的坐标和 t 的值；若不存在，请说明理由.



考点：反比例函数综合题.

分析： (1) 由于点 A (8, 1)、B (n, 8) 都在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象上，根据反比例函数的

意义求出 m，n，再由待定系数法求出直线 AB 的解析式；

(2) ① 由题意知：OP=2t，OQ=t，由三角形的面积公式可求出解析式；

② 通过三角形相似，用 t 的代数式表示出 O' 的坐标，根据反比例函数的意义可求出 t 值.

解答： 解：(1) $\because$ 点 A (8, 1)、B (n, 8) 都在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象上，

$$\therefore m=8 \times 1=8,$$

$$\therefore y=\frac{8}{x},$$

$$\therefore 8=\frac{8}{n}, \text{ 即 } n=1,$$

设 AB 的解析式为 $y=kx+b$,

把 (8, 1)、B (1, 8) 代入上式得：

$$\begin{cases} 8k+b=1 \\ k+b=8 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k=-1 \\ b=9 \end{cases}.$$

∴ 直线 AB 的解析式为 $y = -x + 9$;

(2) ①由题意知: $OP=2t$, $OQ=t$,

当 P 在 OD 上运动时,

$$S = \frac{1}{2}OP \cdot OQ = \frac{1}{2} \times t \times 2t = t^2 \quad (0 < t \leq 4),$$

当 P 在 DB 上运动时,

$$S = \frac{1}{2}OQ \cdot OD = \frac{1}{2}t \times 8 = 4t \quad (4 < t \leq 4.5);$$

②存在,

作 $PE \perp y$ 轴, $O'F \perp x$ 轴于 F, 交 PE 于 E,

则 $\angle E = 90^\circ$, $PO' = PO = 2t$, $QO' = QO = t$,

由题意知: $\angle PO'Q = \angle POQ = 90^\circ - \angle PO'E$,

$$\angle EPO' = 90^\circ - \angle PO'E$$

$$\therefore \triangle PEO' \sim \triangle O'FQ,$$

$$\therefore \frac{PE}{O'F} = \frac{EO'}{QF} = \frac{PO'}{QO'},$$

设 $QF=b$, $O'F=a$,

则 $PE=OF=t+b$, $OE=2t-a$,

$$\therefore \frac{t+b}{a} = \frac{2t-a}{b} = 2,$$

$$\text{解得: } a = \frac{4}{5}t, \quad b = \frac{3}{5}t,$$

$$\therefore O' \left(\frac{8}{5}t, \frac{4}{5}t \right),$$

当 Q' 在反比例函数的图象上时,

$$\frac{8t}{5} \cdot \frac{4t}{5} = 8,$$

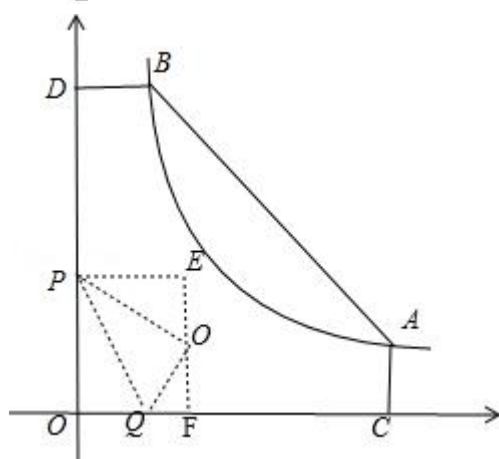
$$\text{解得: } t = \pm \frac{5}{2},$$

∵ 反比例函数的图形在第一象限,

$$\therefore t > 0,$$

$$\therefore t = \frac{5}{2}.$$

当 $t = \frac{5}{2}$ 个长度单位时，Q'恰好落在反比例函数的图象上.



点评: 本题主要考查了反比例函数的意义，利用图象和待定系数法求函数解析式，相似三角形的判定和性质，熟练掌握反比例函数的意义和能数形结合是解决问题的关键.

27. (9 分) (2015•济南) 如图 1，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ACB=90^\circ$ ， $AC=BC$ ， $\angle EAC=90^\circ$ ，点 M 为射线 AE 上任意一点 (不与 A 重合)，连接 CM，将线段 CM 绕点 C 按顺时针方向旋转 90° 得到线段 CN，直线 NB 分别交直线 CM、射线 AE 于点 F、D.

(1) 直接写出 $\angle NDE$ 的度数;

(2) 如图 2、图 3，当 $\angle EAC$ 为锐角或钝角时，其他条件不变，(1) 中的结论是否发生变化? 如果不变，选取其中一种情况加以证明; 如果变化，请说明理由;

(3) 如图 4，若 $\angle EAC=15^\circ$ ， $\angle ACM=60^\circ$ ，直线 CM 与 AB 交于 G， $BD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ ，其他条件不变，求线段 AM 的长.

(2) 不变,

在 $\triangle MAC \cong \triangle NBC$ 中,

$$\begin{cases} AC=BC \\ \angle ACM=\angle BCN, \\ MC=NC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle MAC \cong \triangle NBC,$$

$$\therefore \angle N = \angle AMC,$$

$$\text{又} \because \angle MFD = \angle NFC,$$

$$\angle MDF = \angle FCN = 90^\circ, \text{ 即 } \angle NDE = 90^\circ;$$

(3) 作 $GK \perp BC$ 于 K ,

$$\because \angle EAC = 15^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 30^\circ,$$

$$\because \angle ACM = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle GCB = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle AGC = \angle ABC + \angle GCB = 75^\circ,$$

$$\angle AMG = 75^\circ,$$

$$\therefore AM = AG,$$

$$\because \triangle MAC \cong \triangle NBC,$$

$$\therefore \angle MAC = \angle NBC,$$

$$\therefore \angle BDA = \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore BD = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore AB = \sqrt{6} + \sqrt{2},$$

$$AC = BC = \sqrt{3} + 1,$$

$$\text{设 } BK = a, \text{ 则 } GK = a, CK = \sqrt{3}a,$$

$$\therefore a + \sqrt{3}a = \sqrt{3} + 1,$$

$$\therefore a = 1,$$

$$\therefore KB = KG = 1, BG = \sqrt{2},$$

$$AG = \sqrt{6},$$

$$\therefore AM = \sqrt{6}.$$

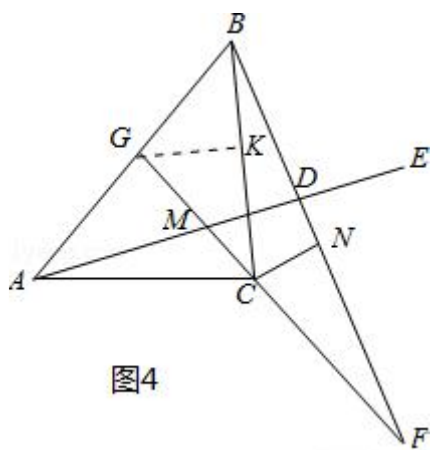


图4

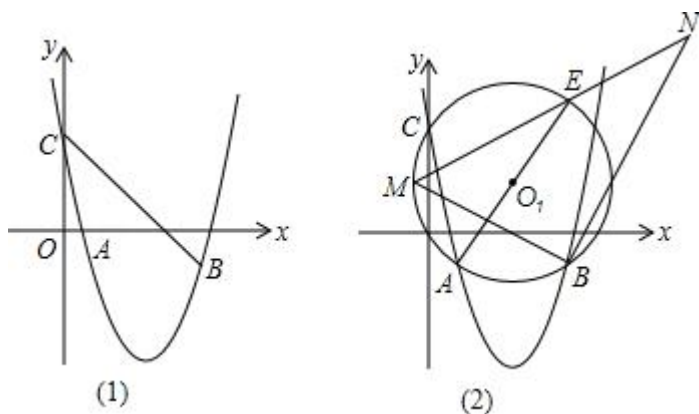
点评: 本题考查的是矩形的判定和性质以及三角形全等的判定和性质，正确作出辅助线、利用方程的思想是解题的关键，注意旋转的性质的灵活运用.

28. (9分) (2015•济南) 抛物线 $y=ax^2+bx+4$ ($a \neq 0$) 过点 A (1, -1), B (5, -1), 与 y 轴交于点 C.

(1) 求抛物线的函数表达式;

(2) 如图 1, 连接 CB, 以 CB 为边作 $\square CBPQ$, 若点 P 在直线 BC 上方的抛物线上, Q 为坐标平面内的一点, 且 $\square CBPQ$ 的面积为 30, 求点 P 的坐标;

(3) 如图 2, $\odot O_1$ 过点 A、B、C 三点, AE 为直径, 点 M 为 $\widehat{ACE}$ 上的一动点 (不与点 A, E 重合), $\angle MBN$ 为直角, 边 BN 与 ME 的延长线交于 N, 求线段 BN 长度的最大值.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 将点 A、B 的坐标代入抛物线的解析式, 得到关于 a、b 的方程, 从而可求得 a、b 的值;

(2) 设点 P 的坐标为 P (m, $m^2 - 6m + 4$), 由平行四边形的面积为 30 可知 $S_{\triangle CBP} = 15$,

由 $S_{\triangle CBP} = S_{\text{梯形 CEDP}} - S_{\triangle CEB} - S_{\triangle PBD}$, 得到关于 m 的方程求得 m 的值, 从而可求得点 P 的坐标;

(3) 首先证明 $\triangle EAB \sim \triangle NMB$, 从而可得到 $NB = \frac{3}{2}MB$, 当 MB 为圆的直径时, NB 有最大值.

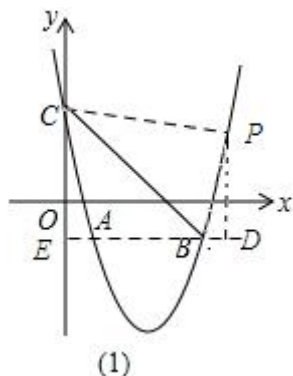
解答:

解: (1) 将点 A 、 B 的坐标代入抛物线的解析式得:
$$\begin{cases} a+b+4 = -1 \\ 25a+5b+4 = -1 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} a=1 \\ b=-6 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线得解析式为 $y = x^2 - 6x + 4$.

(2) 如图所示:



设点 P 的坐标为 $P(m, m^2 - 6m + 4)$

$\therefore$ 平行四边形的面积为 30,

$\therefore S_{\triangle CBP} = 15$, 即: $S_{\triangle CBP} = S_{\text{梯形 CEDP}} - S_{\triangle CEB} - S_{\triangle PBD}$.

$$\therefore \frac{1}{2}m(5 + m^2 - 6m + 4 + 1) - \frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{2}(m - 5)(m^2 - 6m + 5) = 15.$$

化简得: $m^2 - 5m - 6 = 0$,

解得: $m = 6$, 或 $m = -1$.

$\therefore m > 0$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(6, 4)$.

(3) 连接 AB 、 EB .


$$\therefore \angle ABE = 90^\circ.$$

又 $\because \angle EAB = \angle EMB$,

 $\therefore A (1, -1), B (5, -1),$

将 $x=0$ 代入抛物线的解析式得: $y=4$,

设点 O_1 的坐标为 $(3, m)$,

$$\therefore \sqrt{3^2 + (m-4)^2} = \sqrt{2^2 + (m+1)^2},$$

$\therefore$ 点 O_1 的坐标为 $(3, 2)$,

$$\therefore O_1A = \sqrt{3^2 + (2-4)^2} = \sqrt{13},$$

在 Rt△ABE 中，由勾股定理得：BE = $\sqrt{AE^2 - AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 4^2} = 6$ ，

$$\therefore AB=4, \quad BE=6.$$
$$\therefore \frac{AB}{EB} = \frac{MB}{NB}$$
$$\therefore \frac{4}{6} = \frac{MB}{NB}$$

$$\therefore NB = \frac{3}{2} MB.$$

$\therefore$ 当 MB 为直径时, MB 最大, 此时 NB 最大.

$$\therefore MB = AE = 2\sqrt{13},$$

$$\therefore NB = \frac{3}{2} \times 2\sqrt{13} = 3\sqrt{13}.$$

点评: 本题主要考查的是二次函数的综合应用, 利用两点间的距离公式求得圆的半径是解题的关键.