

2015 年山东省日照市中考数学试卷

一、选择题 (1-8 小题每小题 3 分, 9-12 小题每小题 3 分)

1. 下面四个图形分别是节能、节水、低碳和绿色食品标志, 在这四个标志中, 是轴对称图形的是 ()



2. $\sqrt{4}$ 的算术平方根是 ()

A. 2 B. ± 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\pm\sqrt{2}$

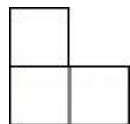
3. a^5 的结果是 ()

A. a^5 B. $-a^5$ C. a^6 D. $-a^6$

4. 某市测得一周 PM2.5 的日均值 (单位: 微克/立方米) 如下: 31, 30, 34, 35, 36, 34, 31, 对这组数据下列说法正确的是 ()

A. 众数是 35 B. 中位数是 34 C. 平均数是 35 D. 方差是 6

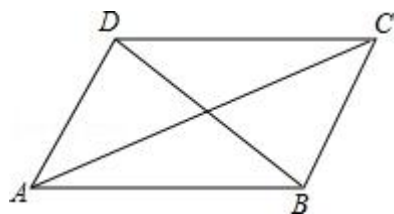
5. 小红在观察由一些相同小立方块搭成的几何体时, 发现它的主视图、俯视图、左视图均为如图, 则构成该几何体的小立方块的个数有 ()



A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

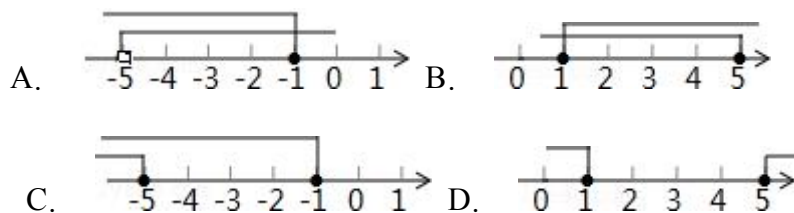
6. 小明在学习了正方形之后, 给同桌小文出了道题, 从下列四个条件:

① $AB=BC$, ② $\angle ABC=90^\circ$, ③ $AC=BD$, ④ $AC \perp BD$ 中选两个作为补充条件, 使 $\square ABCD$ 为正方形 (如图), 现有下列四种选法, 你认为其中错误的是 ()

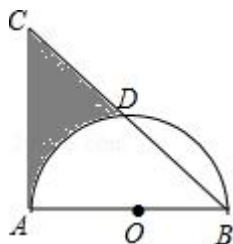


A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ②④

7. 不等式组 $\begin{cases} 2-x \geq 3 \\ \frac{3}{2}x+1 > x-\frac{3}{2} \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()

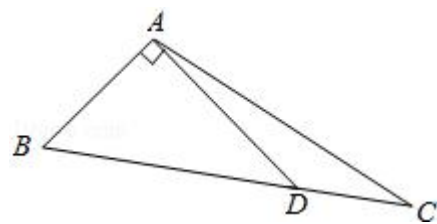


8. 如图，等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=8$ ，以 AB 为直径的半圆 O 交斜边 BC 于 D ，则阴影部分面积为（结果保留 π ）（ ）



- A. $24 - 4\pi$ B. $32 - 4\pi$ C. $32 - 8\pi$ D. 16
9. 某县大力推进义务教育均衡发展，加强学校标准化建设，计划用三年时间对全县学校的设施和设备进行全面改造，2014年县政府已投资5亿元人民币，若每年投资的增长率相同，预计2016年投资7.2亿元人民币，那么每年投资的增长率为（ ）

- A. 20% B. 40% C. -220% D. 30%
10. 如图，在直角 $\triangle BAD$ 中，延长斜边 BD 到点 C ，使 $DC = \frac{1}{2}BD$ ，连接 AC ，若 $\tan B = \frac{5}{3}$ ，则 $\tan \angle CAD$ 的值（ ）



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{5}$
11. 观察下列各式及其展开式：

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

...

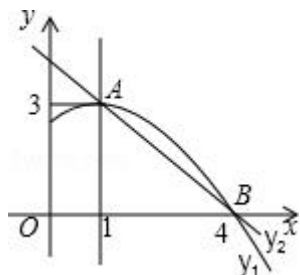
请你猜想 $(a+b)^{10}$ 的展开式第三项的系数是 ()

- A. 36 B. 45 C. 55 D. 66

12. 如图是抛物线 $y_1=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分, 抛物线的顶点坐标 A (1, 3), 与 x 轴的一个交点 B (4, 0), 直线 $y_2=mx+n$ ($m \neq 0$) 与抛物线交于 A, B 两点, 下列结论:

① $2a+b=0$; ② $abc > 0$; ③ 方程 $ax^2+bx+c=3$ 有两个相等的实数根; ④ 抛物线与 x 轴的另一个交点是 (-1, 0); ⑤ 当 $1 < x < 4$ 时, 有 $y_2 < y_1$,

其中正确的是 ()

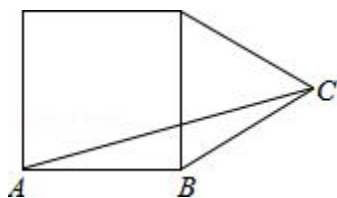


- A. ①②③ B. ①③④ C. ①③⑤ D. ②④⑤

二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

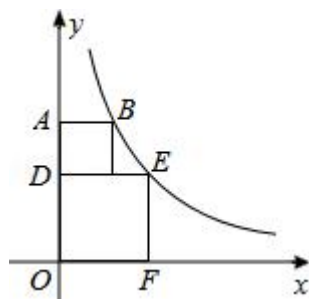
13. 若 $\sqrt{(x-3)^2}=3-x$, 则 x 的取值范围是_____.

14. 边长为 1 的一个正方形和一个等边三角形如图摆放, 则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.



15. 如果 m, n 是两个不相等的实数, 且满足 $m^2 - m = 3$, $n^2 - n = 3$, 那么代数式 $2n^2 - mn + 2m + 2015 =$ _____.

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，四边形 $ODEF$ 和四边形 $ABCD$ 都是正方形，点 F 在 x 轴的正半轴上，点 C 在边 DE 上，反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0, x > 0$) 的图象过点 B, E 。若 $AB = 2$ ，则 k 的值为_____。



三、解答题

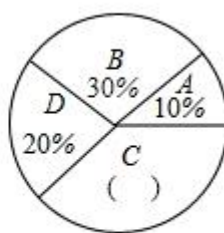
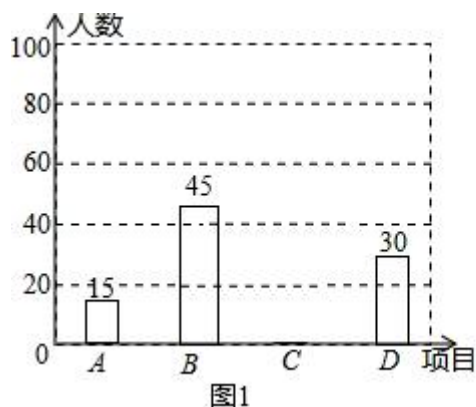
17. 先化简，再求值： $(\frac{1-a}{a+1} + 1) \div \frac{2}{a^2-1}$ ，其中 $a = \sqrt{3}$ ；

- (2) 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+5y=m+2 \end{cases}$ 的解满足 $x+y=0$ ，求实数 m 的值。

18. 为进一步推广“阳光体育”大课间活动，某中学对已开设的 A 实心球，B 立定跳远，C 跑步，D 跳绳四种活动项目的学生喜欢情况进行调查，随机抽取了部分学生，并将调查结果绘制成图 1，图 2 的统计图，请结合图中的信息解答下列问题：

(1) 请计算本次调查中喜欢“跑步”的学生人数和所占百分比，并将两个统计图补充完整；

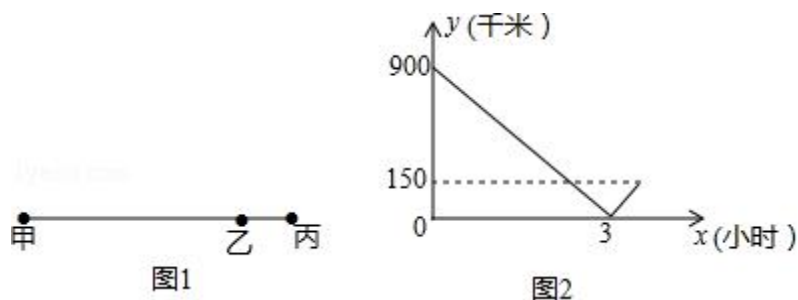
(2) 随机抽取了 5 名喜欢“跑步”的学生，其中有 3 名女生，2 名男生，现从这 5 名学生中任意抽取 2 名学生，请用画树状图或列表的方法，求出刚好抽到同性别学生的概率。



19. 如图 1 所示，某乘客乘高速列车从甲地经过乙地到丙地，列车匀速行驶，图 2 为列车离乙地路程 y (千米) 与行驶时间 x (小时) 时间的函数关系图象.

(1) 填空：甲、丙两地距离_____千米.

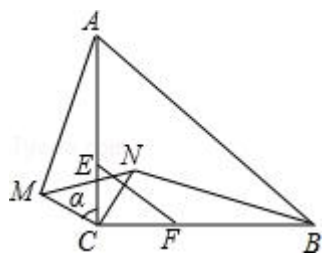
(2) 求高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围.



20. 如图，已知，在 $\triangle ABC$ 中， $CA=CB$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ， E ， F 分别是 CA ， CB 边的三等分点，将 $\triangle ECF$ 绕点 C 逆时针旋转 α 角 ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，得到 $\triangle MCN$ ，连接 AM ， BN 。

(1) 求证： $AM=BN$ ；

(2) 当 $MA \parallel CN$ 时，试求旋转角 α 的余弦值.



21. 阅读资料:

如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 两点的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由勾股定理得 $AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$, 所以 A, B 两点间的距离为

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

我们知道, 圆可以看成到圆心距离等于半径的点的集合, 如图 2, 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(x, y)$ 为圆上任意一点, 则 A 到原点的距离的平方为 $OA^2 = |x - 0|^2 + |y - 0|^2$, 当 $\odot O$ 的半径为 r 时, $\odot O$ 的方程可写为: $x^2 + y^2 = r^2$.

问题拓展: 如果圆心坐标为 $P(a, b)$, 半径为 r , 那么 $\odot P$ 的方程可以写为_____.

综合应用:

如图 3, $\odot P$ 与 x 轴相切于原点 O , P 点坐标为 $(0, 6)$, A 是 $\odot P$ 上一点, 连接 OA , 使 $\tan \angle POA = \frac{3}{4}$, 作 $PD \perp OA$, 垂足为 D , 延长 PD 交 x 轴于点 B , 连接 AB .

①证明 AB 是 $\odot P$ 的切点;

②是否存在到四点 O, P, A, B 距离都相等的点 Q ? 若存在, 求 Q 点坐标, 并写出以 Q 为圆心, 以 OQ 为半径的 $\odot Q$ 的方程; 若不存在, 说明理由.

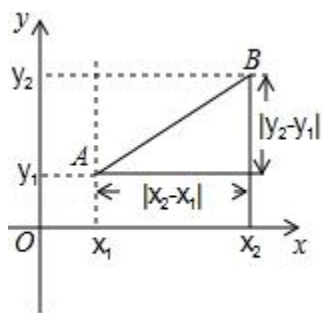


图1

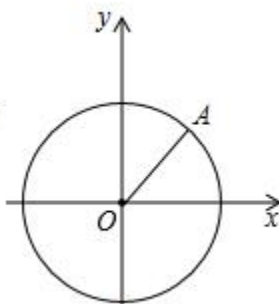


图2

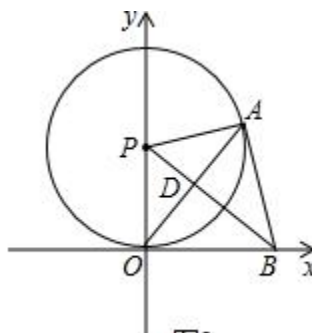


图3

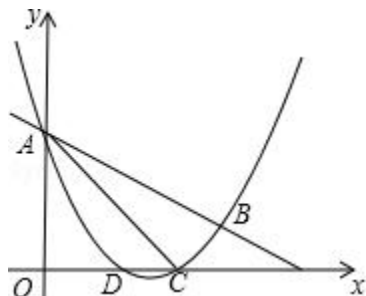
22. 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + mx + n$ 与直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 交于 A, B 两点, 交 x 轴与 D, C 两点, 连接 AC, BC, 已知 A (0, 3), C (3, 0).

(I) 求抛物线的解析式和 $\tan \angle BAC$ 的值;

(II) 在 (I) 条件下:

(1) P 为 y 轴右侧抛物线上一动点, 连接 PA, 过点 P 作 $PQ \perp PA$ 交 y 轴于点 Q, 问: 是否存在点 P 使得以 A, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ACB$ 相似? 若存在, 请求出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(2) 设 E 为线段 AC 上一点 (不含端点), 连接 DE, 一动点 M 从点 D 出发, 沿线段 DE 以每秒一个单位速度运动到 E 点, 再沿线段 EA 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位的速度运动到 A 后停止, 当点 E 的坐标是多少时, 点 M 在整个运动中用时最少?



2015 年山东省日照市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (1-8 小题每小题 3 分, 9-12 小题每小题 3 分)

1. 下面四个图形分别是节能、节水、低碳和绿色食品标志, 在这四个标志中, 是轴对称图形的是 ()



考点: 轴对称图形.

分析: 根据轴对称图形的概念求解.

解答: 解: A、不是轴对称图形, 故本选项错误;

B、不是轴对称图形, 故本选项错误;

C、不是轴对称图形, 故本选项错误;

D、是轴对称图形, 故本选项正确.

故选 D.

点评: 本题考查了轴对称图形的知识, 轴对称图形的关键是寻找对称轴, 图形两部分沿对称轴折叠后可重合.

2. $\sqrt{4}$ 的算术平方根是 ()

A. 2 B. ± 2 C. $\sqrt{2}$ D. $\pm\sqrt{2}$

考点: 算术平方根.

专题: 计算题.

分析: 先求得 $\sqrt{4}$ 的值, 再继续求所求数的算术平方根即可.

解答: 解: $\because \sqrt{4}=2$,

而 2 的算术平方根是 $\sqrt{2}$,

$\therefore \sqrt{4}$ 的算术平方根是 $\sqrt{2}$.

故选：C.

点评： 此题主要考查了算术平方根的定义，解题时应先明确是求哪个数的算术平方根，否则容易出现选 A 的错误.

3. $(-a^3)^2$ 的结果是 ()

A. a^5 B. $-a^5$ C. a^6 D. $-a^6$

考点： 幂的乘方与积的乘方.

分析： 根据幂的乘方和积的乘方的运算法则求解.

解答： 解： $(-a^3)^2 = a^6$.

故选 C.

点评： 本题考查了幂的乘方和积的乘方，掌握运算法则是解答本题关键.

4. 某市测得一周 PM2.5 的日均值 (单位：微克/立方米) 如下：31, 30, 34, 35, 36, 34, 31, 对这组数据下列说法正确的是 ()

A. 众数是 35 B. 中位数是 34 C. 平均数是 35 D. 方差是 6

考点： 方差；加权平均数；中位数；众数.

分析： 根据众数、平均数、中位数和方差的计算公式分别进行计算即可得出答案.

解答： 解： A、31 和 34 出现了 2 次，出现的次数最多，则众数是 31 和 34，故本选项错误；

B、把这组数据从小到大排列，最中间的数是 34，则中位数是 34，故本选项正确；

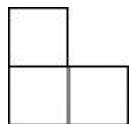
C、这组数据的平均数是： $(31+30+34+35+36+34+31) \div 7 = 33$ ，故本选项错误；

D、这组数据的方差是： $\frac{1}{7}[2(31-33)^2 + (30-33)^2 + 2(34-33)^2 + (35-33)^2 + (36-33)^2] = \frac{32}{7}$ ，故本选项错误；

故选 B.

点评： 本题考查了众数、平均数和中位数的定义. 用到的知识点：一组数据中出现次数最多的数据叫做这组数据的众数. 将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数. 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数. 一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，则方差 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$.

5. 小红在观察由一些相同小立方块搭成的几何体时，发现它的主视图、俯视图、左视图均为如图，则构成该几何体的小立方块的个数有（ ）



A. 3 个 B. 4 个 C. 5 个 D. 6 个

考点： 由三视图判断几何体.

分析： 根据主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形.

解答： 解：从俯视图发现有 3 个立方体，从左视图发现第二层最多有 1 个立方块，

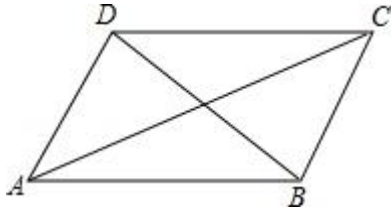
则构成该几何体的小立方块的个数有 4 个；

故选 B.

点评： 此题考查了学生对三视图掌握程度和灵活运用能力，同时也体现了对空间想象能力方面的考查. 如果掌握口诀“俯视图打地基，正视图疯狂盖，左视图拆违章”就更容易得到答案.

6. 小明在学习了正方形之后，给同桌小文出了道题，从下列四个条件：

① $AB=BC$ ，② $\angle ABC=90^\circ$ ，③ $AC=BD$ ，④ $AC \perp BD$ 中选两个作为补充条件，使 $\square ABCD$ 为正方形（如图），现有下列四种选法，你认为其中错误的是（ ）



A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ②④

考点： 正方形的判定.

分析： 利用矩形、菱形、正方形之间的关系与区别，结合正方形的判定方法分别判断得出即可.

解答： 解：A、 $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

当① $AB=BC$ 时，平行四边形 ABCD 是菱形，

当② $\angle ABC=90^\circ$ 时，菱形 ABCD 是正方形，故此选项错误；

B、 $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

$\therefore$ 当② $\angle ABC=90^\circ$ 时，平行四边形 ABCD 是矩形，

当 $AC=BD$ 时，这是矩形的性质，无法得出四边形 ABCD 是正方形，故此选项正确；

C、 $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

当① $AB=BC$ 时，平行四边形 ABCD 是菱形，

当③ $AC=BD$ 时，菱形 ABCD 是正方形，故此选项错误；

D、 $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形，

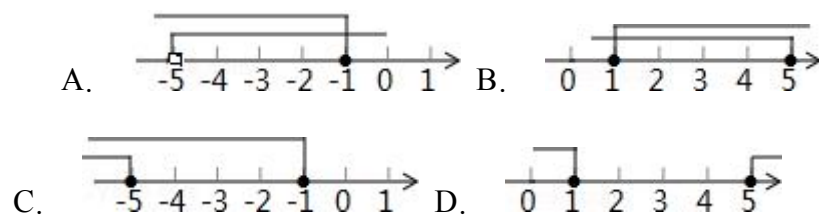
$\therefore$ 当② $\angle ABC=90^\circ$ 时，平行四边形 ABCD 是矩形，

当④ $AC \perp BD$ 时，矩形 ABCD 是正方形，故此选项错误.

故选：B.

点评： 此题主要考查了正方形的判定以及矩形、菱形的判定方法，正确掌握正方形的判定方法是解题关键.

7. 不等式组 $\begin{cases} 2-x \geq 3 \\ \frac{3}{2}x+1 > x-\frac{3}{2} \end{cases}$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



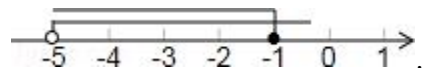
考点： 在数轴上表示不等式的解集；解一元一次不等式组.

分析： 分别求出各不等式的解集，并在数轴上表示出来即可.

解答： 解： $\begin{cases} 2-x \geq 3 \text{ ①} \\ \frac{3}{2}x+1 > x-\frac{3}{2} \text{ ②} \end{cases}$ ，由①得， $x \leq -1$ ，由②得， $x > -5$ ，

故 $-5 < x \leq -1$.

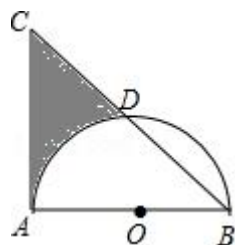
在数轴上表示为：



故选 A.

点评： 本题考查的是在数轴上表示不等式组的解集，熟知“小于向左，大于向右”是解答此题的关键.

8. 如图，等腰直角 $\triangle ABC$ 中， $AB=AC=8$ ，以 AB 为直径的半圆 O 交斜边 BC 于 D ，则阴影部分面积为（结果保留 π ）()



- A. $24 - 4\pi$ B. $32 - 4\pi$ C. $32 - 8\pi$ D. 16

考点： 扇形面积的计算.

分析： 连接 AD，因为 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，故 $\angle ABD=45^\circ$ ，再由 AB 是圆的直径得出 $\angle ADB=90^\circ$ ，故 $\triangle ABD$ 也是等腰直角三角形，所以 $\widehat{AD}=\widehat{BD}$ ， $S_{\text{阴影}}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABD}-S_{\text{弓形 AD}}$ 由此可得出结论.

解答： 解：连接 AD，OD，

$\because$ 等腰直角 $\triangle ABC$ 中，

$\therefore \angle ABD=45^\circ$.

$\because$ AB 是圆的直径，

$\therefore \angle ADB=90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 也是等腰直角三角形，

$\therefore \widehat{AD}=\widehat{BD}$.

$\because AB=8$ ，

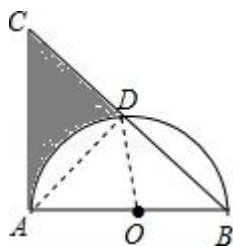
$\therefore AD=BD=4\sqrt{2}$ ，

$\therefore S_{\text{阴影}}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABD}-S_{\text{弓形 AD}}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ABD}- (S_{\text{扇形 AOD}}$

$-\frac{1}{2}S_{\triangle ABD}) =\frac{1}{2}\times 8\times 8-\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}-\frac{90\pi\times 4^2}{360}+\frac{1}{2}\times \frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 4\sqrt{2}=16-4\pi+8=24-$

4π .

故选 A.



点评： 本题考查的是扇形面积的计算，熟记扇形的面积公式是解答此题的关键.

9. 某县大力推进义务教育均衡发展，加强学校标准化建设，计划用三年时间对全县学校的设施和设备进行全面改造，2014 年县政府已投资 5 亿元人民币，若每年投资的增长率相同，预计 2016 年投资 7.2 亿元人民币，那么每年投资的增长率为 ()

A. 20% B. 40% C. -220% D. 30%

考点：一元二次方程的应用.

专题：增长率问题.

分析：首先设每年投资的增长率为 x . 根据 2014 年县政府已投资 5 亿元人民币, 若每年投资的增长率相同, 预计 2016 年投资 7.2 亿元人民币, 列方程求解.

解答：解：设每年投资的增长率为 x ,

根据题意, 得: $5(1+x)^2=7.2$,

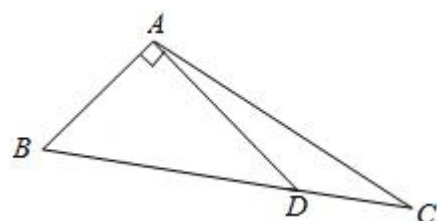
解得: $x_1=0.2=20\%$, $x_2=-2.2$ (舍去),

故每年投资的增长率为为 20%.

故选: A.

点评：此题主要考查了一元二次方程的实际应用, 解题的关键是掌握增长率问题中的一般公式为 $a(1+x)^n$, 其中 n 为共增长了几年, a 为第一年的原始数据, x 是增长率.

10. 如图, 在直角 $\triangle BAD$ 中, 延长斜边 BD 到点 C , 使 $DC=\frac{1}{2}BD$, 连接 AC , 若 $\tan B=\frac{5}{3}$, 则 $\tan \angle CAD$ 的值 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{5}$

考点：解直角三角形.

分析：延长 AD , 过点 C 作 $CE \perp AD$, 垂足为 E , 由 $\tan B=\frac{5}{3}$, 即 $\frac{AD}{AB}=\frac{5}{3}$, 设 $AD=5x$, 则 $AB=3x$, 然后可证明 $\triangle CDE \sim \triangle BDA$, 然后相似三角形的对应边成比例可得:

$\frac{CE}{AB}=\frac{DE}{AD}=\frac{CD}{BD}=\frac{1}{2}$, 进而可得 $CE=\frac{3}{2}x$, $DE=\frac{5}{2}x$, 从而可求 $\tan \angle CAD=\frac{EC}{AE}=\frac{1}{5}$.

解答：解：如图, 延长 AD , 过点 C 作 $CE \perp AD$, 垂足为 E ,

$$\therefore \tan B = \frac{5}{3}, \text{ 即 } \frac{AD}{AB} = \frac{5}{3},$$

$$\therefore \text{设 } AD = 5x, \text{ 则 } AB = 3x,$$

$$\therefore \angle CDE = \angle BDA, \angle CED = \angle BAD,$$

$$\therefore \triangle CDE \sim \triangle BDA,$$

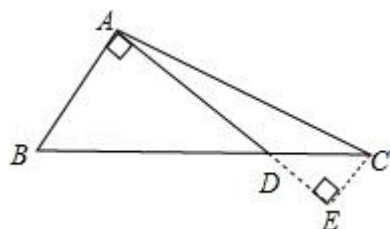
$$\therefore \frac{CE}{AB} = \frac{DE}{AD} = \frac{CD}{BD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore CE = \frac{3}{2}x, DE = \frac{5}{2}x,$$

$$\therefore AE = \frac{15}{2}x,$$

$$\therefore \tan \angle CAD = \frac{EC}{AE} = \frac{1}{5}.$$

故选 D.



点评： 本题考查了锐角三角函数的定义，相似三角形的判定和性质以及直角三角形的性质，是基础知识要熟练掌握，解题的关键是：正确添加辅助线，将 $\angle CAD$ 放在直角三角形中.

11. 观察下列各式及其展开式:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

...

请你猜想 $(a+b)^{10}$ 的展开式第三项的系数是 ()

A. 36 B. 45 C. 55 D. 66

考点： 完全平方公式.

专题： 规律型.

分析： 归纳总结得到展开式中第三项系数即可.

解答： 解： 解： $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5;$$

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6;$$

$$(a+b)^7=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7;$$

第 8 个式子系数分别为： 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1;

第 9 个式子系数分别为： 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1;

第 10 个式子系数分别为： 1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1,

则 $(a+b)^{10}$ 的展开式第三项的系数为 45.

故选 B.

点评： 此题考查了完全平方公式，熟练掌握公式是解本题的关键.

12. 如图是抛物线 $y_1=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分，抛物线的顶点坐标 A (1,

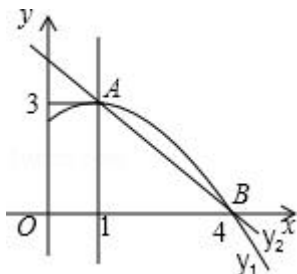
3)，与 x 轴的一个交点 B (4, 0)，直线 $y_2=mx+n$ ($m \neq 0$) 与抛物线交于 A, B

两点，下列结论：

① $2a+b=0$ ； ② $abc > 0$ ； ③ 方程 $ax^2+bx+c=3$ 有两个相等的实数根； ④ 抛物线与 x

轴的另一个交点是 (-1, 0)； ⑤ 当 $1 < x < 4$ 时，有 $y_2 < y_1$,

其中正确的是 ()



A. ①②③ B. ①③④ C. ①③⑤ D. ②④⑤

考点： 二次函数图象与系数的关系；抛物线与 x 轴的交点.

专题： 数形结合.

分析： 根据抛物线对称轴方程对①进行判断；由抛物线开口方向得到 $a < 0$ ，由对称轴位置可得 $b > 0$ ，由抛物线与 y 轴的交点位置可得 $c > 0$ ，于是可对②进行判断；根据顶点坐标对③进行判断；根据抛物线的对称性对④进行判断；根据函数图象得当 $1 < x < 4$ 时，一次函数图象在抛物线下方，则可对⑤进行判断.

解答： 解： $\because$ 抛物线的顶点坐标 $A (1, 3)$,

$$\therefore \text{抛物线的对称轴为直线 } x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$\therefore 2a + b = 0$ ，所以①正确；

$\because$ 抛物线开口向下，

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore b = -2a > 0,$$

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方，

$$\therefore c > 0,$$

$\therefore abc < 0$ ，所以②错误；

$\because$ 抛物线的顶点坐标 $A (1, 3)$,

$\therefore x = 1$ 时，二次函数有最大值，

$\therefore$ 方程 $ax^2 + bx + c = 3$ 有两个相等的实数根，所以③正确；

$\because$ 抛物线与 x 轴的一个交点为 $(4, 0)$

而抛物线的对称轴为直线 $x = 1$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点为 $(-2, 0)$ ，所以④错误；

$\because$ 抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ 与直线 $y_2 = mx + n$ ($m \neq 0$) 交于 $A (1, 3)$ ， B 点 $(4, 0)$

$\therefore$ 当 $1 < x < 4$ 时， $y_2 < y_1$ ，所以⑤正确.

故选 C.

点评： 本题考查了二次项系数与系数的关系：对于二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，二次项系数 a 决定抛物线的开口方向和大小：当 $a > 0$ 时，抛物线向上开口；当

$a < 0$ 时，抛物线向下开口；一次项系数 b 和二次项系数 a 共同决定对称轴的位置：当 a 与 b 同号时（即 $ab > 0$ ），对称轴在 y 轴左；当 a 与 b 异号时（即 $ab < 0$ ），对称轴在 y 轴右。（简称：左同右异）；常数项 c 决定抛物线与 y 轴交点：抛物线与 y 轴交于 $(0, c)$ ；抛物线与 x 轴交点个数由 Δ 决定： $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ 时，抛物线与 x 轴有 2 个交点； $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ 时，抛物线与 x 轴有 1 个交点； $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ 时，抛物线与 x 轴没有交点。

二、填空题（每小题 4 分，共 16 分）

13. 若 $\sqrt{(x-3)^2} = 3-x$ ，则 x 的取值范围是 $x \leq 3$ 。

考点： 二次根式的性质与化简。

分析： 根据二次根式的性质得出 $3-x \geq 0$ ，求出即可。

解答： 解： $\because \sqrt{(x-3)^2} = 3-x$,

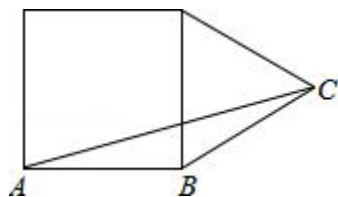
$\therefore 3-x \geq 0$,

解得： $x \leq 3$,

故答案为： $x \leq 3$ 。

点评： 本题考查了二次根式的性质的应用，注意：当 $a \geq 0$ 时， $\sqrt{a^2} = a$ ，当 $a < 0$ 时， $\sqrt{a^2} = -a$ 。

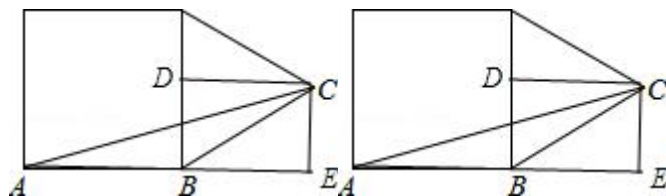
14. 边长为 1 的一个正方形和一个等边三角形如图摆放，则 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{1}{4}$ 。



考点： 正方形的性质；等边三角形的性质；含 30 度角的直角三角形。

分析： 过点 C 作 CD 和 CE 垂直正方形的两个边长，再利用正方形和等边三角形的性质得出 CE 的长，进而得出 $\triangle ABC$ 的面积即可.

解答： 解：过点 C 作 CD 和 CE 垂直正方形的两个边长，如图，



$\because$ 一个正方形和一个等边三角形的摆放，

$\therefore$ 四边形 DBEC 是矩形，

$$\therefore CE = DB = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} AB \cdot CE = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4},$$

故答案为： $\frac{1}{4}$.

点评： 此题考查正方形的性质，关键是根据正方形和等边三角形的性质得出 BE 和 CE 的长.

15. 如果 m, n 是两个不相等的实数，且满足 $m^2 - m = 3$, $n^2 - n = 3$ ，那么代数式 $2n^2 - mn + 2m + 2015 = \underline{2026}$.

考点： 根与系数的关系.

分析： 由于 m, n 是两个不相等的实数，且满足 $m^2 - m = 3$, $n^2 - n = 3$ ，可知 m, n 是 $x^2 - x - 3 = 0$ 的两个不相等的实数根. 则根据根与系数的关系可知： $m+n=2$, $mn=-3$ ，又 $n^2=n+3$ ，利用它们可以化简 $2n^2 - mn + 2m + 2015 = 2(n+3) - mn + 2m + 2015 = 2n + 6 - mn + 2m + 2015 = 2(m+n) - mn + 2021$ ，然后就可以求出所求的代数式的值.

解答： 解：由题意可知： m, n 是两个不相等的实数，且满足 $m^2 - m = 3$, $n^2 - n = 3$ ，所以 m, n 是 $x^2 - x - 3 = 0$ 的两个不相等的实数根，则根据根与系数的关系可知： $m+n=2$, $mn=-3$ ，又 $n^2=n+3$ ，则 $2n^2 - mn + 2m + 2015$

$$=2(n+3) - mn+2m+2015$$

$$=2n+6 - mn+2m+2015$$

$$=2(m+n) - mn+2021$$

$$=2 \times 1 - (-3) + 2021$$

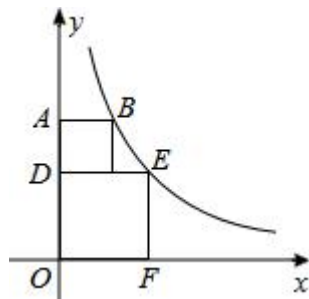
$$=2+3+2021$$

$$=2026.$$

故答案为：2026.

点评： 本题考查一元二次方程根与系数的关系，解题关键是把所求代数式化成两根之和、两根之积的系数，然后利用根与系数的关系式求值.

16. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，四边形 $ODEF$ 和四边形 $ABCD$ 都是正方形，点 F 在 x 轴的正半轴上，点 C 在边 DE 上，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, $x > 0$) 的图象过点 B , E . 若 $AB=2$, 则 k 的值为 $6+2\sqrt{5}$.



考点： 反比例函数图象上点的坐标特征.

分析： 设 $E(x, x)$, 则 $B(2, x+2)$, 根据反比例函数系数的几何意义得出 $x^2=x(x+2)$, 求得 E 的坐标, 从而求得 k 的值.

解答： 解: 设 $E(x, x)$,

$$\therefore B(2, x+2),$$

$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$, $x > 0$) 的图象过点 B 、 E .

$$\therefore x^2=2(x+2),$$

解得 $x_1=1+\sqrt{5}$, $x_2=1-\sqrt{5}$ (舍去),

$$\therefore k=x^2=6+2\sqrt{5},$$

故答案为 $6+2\sqrt{5}$.

点评： 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，关键是掌握反比例函数图象上点与反比例函数中系数 k 的关系.

三、解答题

17. 先化简，再求值： $(\frac{1-a}{a+1}+1) \div \frac{2}{a^2-1}$ ，其中 $a=\sqrt{3}$;

(2) 已知关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+5y=m+2 \end{cases}$ 的解满足 $x+y=0$ ，求实数 m 的值.

考点： 分式的化简求值；二元一次方程组的解.

分析： (1) 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简，再把 a 的值代入进行计算即可；

(2) 先把 m 当作已知条件求出 x, y 的值，再根据 $x+y=0$ 求出 m 的值即可.

解答： 解：(1) 原式 $= \frac{1-a+a+1}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{2}$
 $= \frac{2}{a+1} \cdot \frac{(a+1)(a-1)}{2}$
 $= a-1,$

当 $a=\sqrt{3}$ 时，原式 $=\sqrt{3}-1$;

(2) 解关于 x, y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+2y=3 \\ 3x+5y=m+2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2m-11 \\ y=7-m \end{cases}$,

$\because x+y=0,$

$\therefore 2m-11+7-m=0$ ，解得 $m=4$.

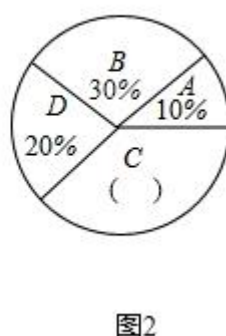
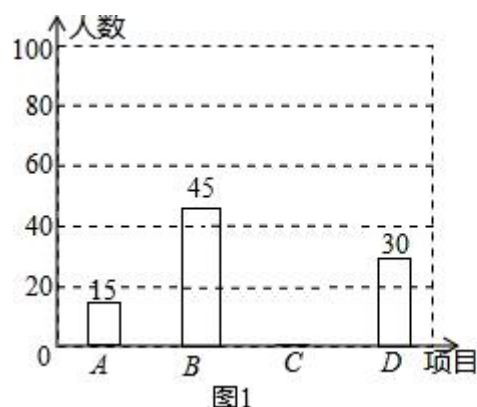
点评： 本题考查的是分式的化简求值，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

18. 为进一步推广“阳光体育”大课间活动，某中学对已开设的 A 实心球，B 立定跳远，C 跑步，D 跳绳四种活动项目的学生喜欢情况进行调查，随机抽取了部

分学生，并将调查结果绘制成图 1，图 2 的统计图，请结合图中的信息解答下列问题：

(1) 请计算本次调查中喜欢“跑步”的学生人数和所占百分比，并将两个统计图补充完整；

(2) 随机抽取了 5 名喜欢“跑步”的学生，其中有 3 名女生，2 名男生，现从这 5 名学生中任意抽取 2 名学生，请用画树状图或列表的方法，求出刚好抽到同性别学生的概率.



考点： 列表法与树状图法；扇形统计图；条形统计图.

分析： (1) 用 A 的人数除以所占的百分比，即可求出调查的学生数；用抽查的总人数减去 A、B、D 的人数，求出喜欢“跑步”的学生人数，再除以被调查的学生数，求出所占的百分比，再画图即可；

(2) 用 A 表示男生，B 表示女生，画出树形图，再根据概率公式进行计算即可.

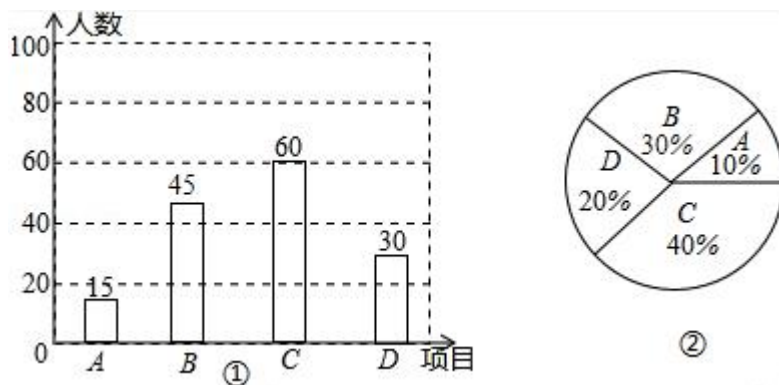
解答： 解：(1) 根据题意得：

$$15 \div 10\% = 150 \text{ (名)}.$$

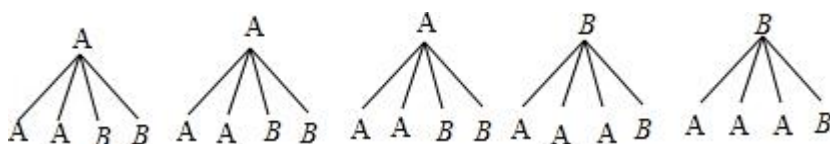
本项调查中喜欢“跑步”的学生人数是： $150 - 15 - 45 - 30 = 60$ (人)，

$$\text{所占百分比是：} \frac{60}{150} \times 100\% = 40\%,$$

画图如下：



(2) 用 A 表示男生，B 表示女生，画图如下：



共有 20 种情况，同性别学生的情况是 8 种，

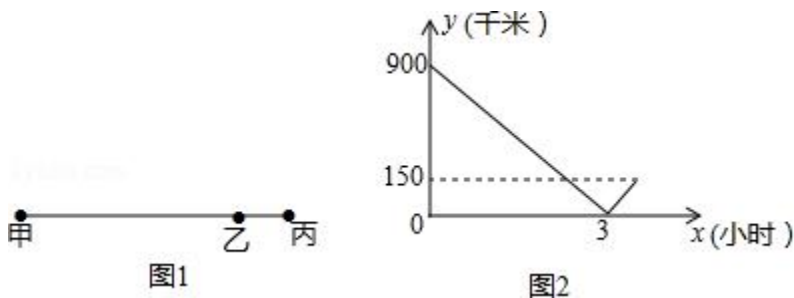
则刚好抽到同性别学生的概率是 $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$.

点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用以及概率的求法，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小．

19. 如图 1 所示，某乘客乘高速列车从甲地经过乙地到丙地，列车匀速行驶，图 2 为列车离乙地路程 y (千米) 与行驶时间 x (小时) 时间的函数关系图象．

(1) 填空：甲、丙两地距离 900 千米．

(2) 求高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数关系式，并写出 x 的取值范围．



考点： 一次函数的应用．

分析: (1) 根据函数图形可得, 甲、丙两地距离为: $900+150=1050$ (千米);

(2) 分两种情况: 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 设高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数关系式为: $y=kx+b$, 把 $(0, 900)$, $(3, 0)$ 代入得到方程组, 即可解答; 根据确定高速列出的速度为 300 (千米/小时), 从而确定点 A 的坐标为 $(3.5, 150)$, 当 $3 < x \leq 3.5$ 时, 设高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数关系式为: $y=k_1x+b_1$, 把 $(3, 0)$, $(3.5, 150)$ 代入得到方程组, 即可解答.

解答: 解: (1) 根据函数图形可得, 甲、丙两地距离为: $900+150=1050$ (千米), 故答案为: 900 .

(2) 当 $0 \leq x \leq 3$ 时, 设高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数关系式为: $y=kx+b$,

把 $(0, 900)$, $(3, 0)$ 代入得:
$$\begin{cases} b=900 \\ 3k+b=0 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} k=-300 \\ b=900 \end{cases},$$

$\therefore y=-300x+900$,

高速列出的速度为: $900 \div 3 = 300$ (千米/小时),

$150 \div 300 = 0.5$ (小时), $3 + 0.5 = 3.5$ (小时)

如图 2, 点 A 的坐标为 $(3.5, 150)$

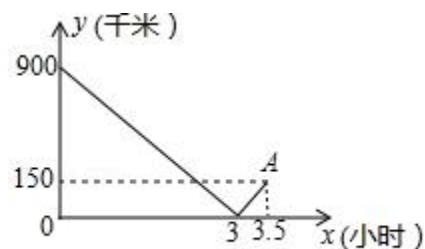


图2

当 $3 < x \leq 3.5$ 时, 设高速列车离乙地的路程 y 与行驶时间 x 之间的函数关系式为:

$y=k_1x+b_1$,

把 $(3, 0)$, $(3.5, 150)$ 代入得:
$$\begin{cases} 3k_1+b_1=0 \\ 3.5k_1+b_1=150 \end{cases},$$

解得:
$$\begin{cases} k_1=300 \\ b_1=-900 \end{cases},$$

$$\therefore y = 300x - 900,$$

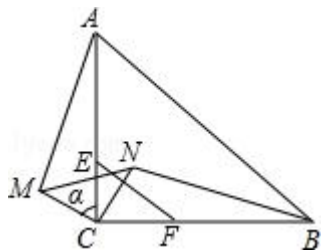
$$\therefore y = \begin{cases} -300x + 900 & (0 \leq x \leq 3) \\ 300x - 900 & (3 < x \leq 3.5) \end{cases}.$$

点评： 本题考查了一次函数的应用，解决本题的关键是读懂图象，获取相关信息，用待定系数法求函数解析式.

20. 如图，已知，在 $\triangle ABC$ 中， $CA=CB$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ， E ， F 分别是 CA ， CB 边的三等分点，将 $\triangle ECF$ 绕点 C 逆时针旋转 α 角 ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)，得到 $\triangle MCN$ ，连接 AM ， BN .

(1) 求证： $AM=BN$;

(2) 当 $MA \parallel CN$ 时，试求旋转角 α 的余弦值.



考点： 旋转的性质；全等三角形的判定与性质.

分析： (1) 由 $CA=CB$ ， E ， F 分别是 CA ， CB 边的三等分点，得 $CE=CF$ ，根据旋转的性质， $CM=CE=CN=CF$ ， $\angle ACM=\angle BCN=\alpha$ ，证明 $\triangle AMC \cong \triangle BNC$ 即可；

(2) 当 $MA \parallel CN$ 时， $\angle ACN = \angle CAM$ ，由 $\angle ACN + \angle ACM = 90^\circ$ ，得到 $\angle CAM + \angle ACM = 90^\circ$ ，所以 $\cot \alpha = \frac{CM}{AC} = \frac{1}{3}$.

解答： 解：(1) $\because CA=CB$ ， $\angle ACB=90^\circ$ ， E ， F 分别是 CA ， CB 边的三等分点，
 $\therefore CE=CF$,

根据旋转的性质， $CM=CE=CN=CF$ ， $\angle ACM=\angle BCN=\alpha$,

在 $\triangle AMC$ 和 $\triangle BNC$ 中，

$$\begin{cases} CA=CB \\ \angle ACM=\angle BCN, \\ CM=CN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMC \cong \triangle BNC,$$

$$\therefore AM=BN;$$

$$(2) \because MA \parallel CN,$$

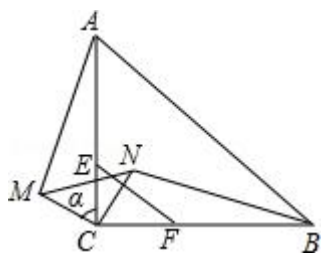
$$\therefore \angle ACN = \angle CAM,$$

$$\because \angle ACN + \angle ACM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAM + \angle ACM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMC = 90^\circ,$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{CM}{AC} = \frac{CE}{AC} = \frac{1}{3}.$$



点评： 本题主要考查了旋转的性质、三角形全等的判定与性质、平行线的性质以及锐角三角函数的综合运用，难度适中，掌握旋转的性质是关键.

21. 阅读资料:

如图 1, 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 两点的坐标分别为 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由勾股定理得 $AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$, 所以 A, B 两点间的距离为

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

我们知道, 圆可以看成到圆心距离等于半径的点的集合, 如图 2, 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(x, y)$ 为圆上任意一点, 则 A 到原点的距离的平方为 $OA^2 = |x - 0|^2 + |y - 0|^2$, 当 $\odot O$ 的半径为 r 时, $\odot O$ 的方程可写为: $x^2 + y^2 = r^2$.

问题拓展: 如果圆心坐标为 $P(a, b)$, 半径为 r , 那么 $\odot P$ 的方程可以写为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

综合应用:

如图 3, $\odot P$ 与 x 轴相切于原点 O , P 点坐标为 $(0, 6)$, A 是 $\odot P$ 上一点, 连接 OA , 使 $\tan \angle POA = \frac{3}{4}$, 作 $PD \perp OA$, 垂足为 D , 延长 PD 交 x 轴于点 B , 连接 AB .

①证明 AB 是 $\odot P$ 的切点;

②是否存在到四点 O, P, A, B 距离都相等的点 Q ? 若存在, 求 Q 点坐标, 并写出以 Q 为圆心, 以 OQ 为半径的 $\odot Q$ 的方程; 若不存在, 说明理

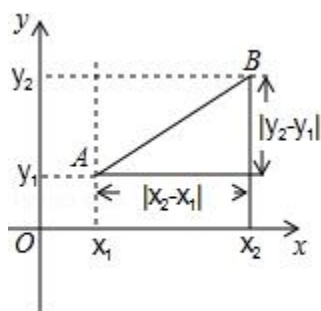


图1

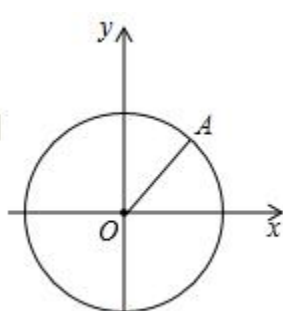


图2

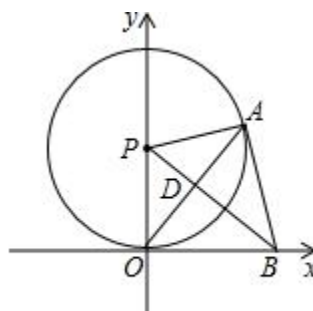


图3

由.

考点: 圆的综合题; 全等三角形的判定与性质; 等腰三角形的性质; 直角三角形斜边上的中线; 勾股定理; 切线的判定与性质; 相似三角形的判定与性质; 锐角三角函数的定义.

专题: 阅读型.

分析: 问题拓展: 设 $A(x, y)$ 为 $\odot P$ 上任意一点, 则有 $AP=r$, 根据阅读材料中的两点之间距离公式即可求出 $\odot P$ 的方程;

综合应用: ①由 $PO=PA$, $PD \perp OA$ 可得 $\angle OPD = \angle APD$, 从而可证到 $\triangle POB \cong \triangle PAB$, 则有 $\angle POB = \angle PAB$. 由 $\odot P$ 与 x 轴相切于原点 O 可得 $\angle POB = 90^\circ$, 即可得到 $\angle PAB = 90^\circ$, 由此可得 AB 是 $\odot P$ 的切线;

②当点 Q 在线段 BP 中点时, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得 $QO=QP=BQ=AQ$. 易证 $\angle OBP = \angle POA$, 则有 $\tan \angle OBP = \frac{OP}{OB} = \frac{3}{4}$. 由 P 点坐标可求出 OP, OB . 过点 Q 作 $QH \perp OB$ 于 H , 易证 $\triangle BHQ \sim \triangle BOP$, 根据相似三角形的性质可求出 QH, BH , 进而求出 OH , 就可得到点 Q 的坐标, 然后运用问题拓展中的结论就可解决问题.

解答： 解： 问题拓展： 设 A (x, y) 为⊙P 上任意一点，

∵ P (a, b)， 半径为 r，

$$\therefore AP^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

故答案为 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ；

综合应用：

① ∵ PO=PA, PD ⊥ OA,

$$\therefore \angle OPD = \angle APD.$$

在△POB 和△PAB 中，

$$\begin{cases} PO=PA \\ \angle OPB=\angle APB, \\ PB=PB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle POB \cong \triangle PAB,$$

$$\therefore \angle POB = \angle PAB.$$

∵ ⊙P 与 x 轴相切于原点 O,

$$\therefore \angle POB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PAB = 90^\circ,$$

∴ AB 是⊙P 的切线；

② 存在到四点 O, P, A, B 距离都相等的点 Q.

当点 Q 在线段 BP 中点时，

$$\therefore \angle POB = \angle PAB = 90^\circ,$$

$$\therefore QO = QP = BQ = AQ.$$

此时点 Q 到四点 O, P, A, B 距离都相等.

$$\therefore \angle POB = 90^\circ, OA \perp PB,$$

$$\therefore \angle OBP = 90^\circ - \angle DOB = \angle POA,$$

$$\therefore \tan \angle OBP = \frac{OP}{OB} = \tan \angle POA = \frac{3}{4}.$$

∴ P 点坐标为 (0, 6),

$$\therefore OP=6, OB=\frac{4}{3}OP=8.$$

过点 Q 作 $QH \perp OB$ 于 H, 如图 3,

则有 $\angle QHB = \angle POB = 90^\circ$,

$$\therefore QH \parallel PO,$$

$$\therefore \triangle BHQ \sim \triangle BOP,$$

$$\therefore \frac{QH}{OP} = \frac{BH}{OB} = \frac{BQ}{BP} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore QH = \frac{1}{2}OP = 3, BH = \frac{1}{2}OB = 4,$$

$$\therefore OH = 8 - 4 = 4,$$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的坐标为 } (4, 3),$$

$$\therefore OQ = \sqrt{OH^2 + QH^2} = 5,$$

$$\therefore \text{以 } Q \text{ 为圆心, 以 } OQ \text{ 为半径的 } \odot O \text{ 的方程为 } (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25.$$

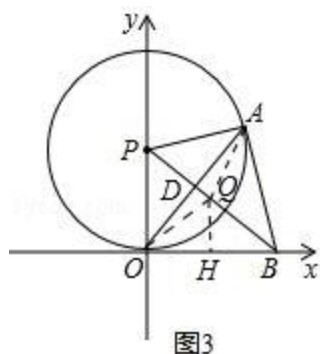


图3

点评: 本题是一道阅读题, 以考查阅读理解能力为主, 在解决问题的过程中, 用到了全等三角形的判定与性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的性质、勾股定理、切线的判定与性质、直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半、三角函数的定义等知识, 有一定的综合性.

22. 如图, 抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2 + mx + n$ 与直线 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 交于 A, B 两点, 交 x 轴与 D,

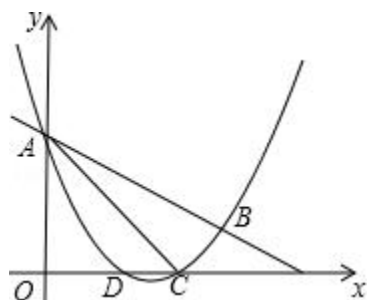
C 两点, 连接 AC, BC, 已知 A (0, 3), C (3, 0).

(I) 求抛物线的解析式和 $\tan \angle BAC$ 的值;

(II) 在 (I) 条件下:

(1) P 为 y 轴右侧抛物线上一动点, 连接 PA, 过点 P 作 $PQ \perp PA$ 交 y 轴于点 Q, 问: 是否存在点 P 使得以 A, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ACB$ 相似? 若存在, 请求出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

(2) 设 E 为线段 AC 上一点 (不含端点), 连接 DE, 一动点 M 从点 D 出发, 沿线段 DE 以每秒一个单位速度运动到 E 点, 再沿线段 EA 以每秒 $\sqrt{2}$ 个单位的速度运动到 A 后停止, 当点 E 的坐标是多少时, 点 M 在整个运动中用时最少?



考点: 二次函数综合题; 线段的性质: 两点之间线段最短; 矩形的判定与性质; 轴对称的性质; 相似三角形的判定与性质; 锐角三角函数的定义.

专题: 压轴题.

分析: (I) 只需把 A、C 两点的坐标代入 $y = \frac{1}{2}x^2 + mx + n$, 就可得到抛物线的解析式, 然后求出直线 AB 与抛物线的交点 B 的坐标, 过点 B 作 $BH \perp x$ 轴于 H, 如图 1. 易得 $\angle BCH = \angle ACO = 45^\circ$, $BC = \sqrt{2}$, $AC = 3\sqrt{2}$, 从而得到 $\angle ACB = 90^\circ$, 然后根据三角函数的定义就可求出 $\tan \angle BAC$ 的值;

(II) (1) 过点 P 作 $PG \perp y$ 轴于 G, 则 $\angle PGA = 90^\circ$. 设点 P 的横坐标为 x, 由 P 在 y 轴右侧可得 $x > 0$, 则 $PG = x$, 易得 $\angle APQ = \angle ACB = 90^\circ$. 若点 G 在点 A 的下方, ①当 $\angle PAQ = \angle CAB$ 时, $\triangle PAQ \sim \triangle CAB$. 此时可证得 $\triangle PGA \sim \triangle BCA$, 根据相似三角形的性质可得 $AG = 3PG = 3x$. 则有 $P(x, 3 - 3x)$, 然后把 $P(x, 3 - 3x)$ 代入抛物线的解析式, 就可求出点 P 的坐标②当 $\angle PAQ = \angle CBA$ 时, $\triangle PAQ \sim \triangle CBA$, 同理, 可求出点 P 的坐标; 若点 G 在点 A 的上方, 同理, 可求出点 P 的坐标; (2) 过点 E 作 $EN \perp y$ 轴于 N, 如图 3. 易得 $AE = \sqrt{2}EN$, 则点 M 在整个运动中所用的时间可表示为 $\frac{DE}{1} + \frac{EA}{\sqrt{2}} = DE + EN$. 作点 D 关于 AC 的对称点 D',

连接 D'E, 则有 D'E=DE, D'C=DC, $\angle D'CA=\angle DCA=45^\circ$, 从而可得 $\angle D'CD=90^\circ$,
 $DE+EN=D'E+EN$. 根据两点之间线段最短可得: 当 D'、E、N 三点共线时,
 $DE+EN=D'E+EN$ 最小. 此时可证到四边形 OCD'N 是矩形, 从而有 $ND'=OC=3$,
 $ON=D'C=DC$. 然后求出点 D 的坐标, 从而得到 OD、ON、NE 的值, 即可得到
 点 E 的坐标.

解答: 解: (I) 把 A (0, 3), C (3, 0) 代入 $y=\frac{1}{2}x^2+mx+n$, 得

$$\begin{cases} n=3 \\ \frac{1}{2} \times 9+mx+n=0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} m=-\frac{5}{2} \\ n=3 \end{cases}$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3$.

$$\text{联立 } \begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+3 \\ y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases},$$

$\therefore$ 点 B 的坐标为 (4, 1).

过点 B 作 $BH \perp x$ 轴于 H, 如图 1.

$\because C (3, 0), B (4, 1),$

$\therefore BH=1, OC=3, OH=4, CH=4-3=1,$

$\therefore BH=CH=1.$

$\therefore \angle BHC=90^\circ,$

$\therefore \angle BCH=45^\circ, BC=\sqrt{2}.$

同理: $\angle ACO=45^\circ, AC=3\sqrt{2},$

$\therefore \angle ACB=180^\circ-45^\circ-45^\circ=90^\circ,$

$\therefore \tan \angle BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3};$

(Ⅱ) (1) 存在点 P, 使得以 A, P, Q 为顶点的三角形与 $\triangle ACB$ 相似.

过点 P 作 $PG \perp y$ 轴于 G, 则 $\angle PGA = 90^\circ$.

设点 P 的横坐标为 x, 由 P 在 y 轴右侧可得 $x > 0$, 则 $PG = x$.

$$\because PQ \perp PA, \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle APQ = \angle ACB = 90^\circ.$$

若点 G 在点 A 的下方,

①如图 2①, 当 $\angle PAQ = \angle CAB$ 时, 则 $\triangle PAQ \sim \triangle CAB$.

$$\because \angle PGA = \angle ACB = 90^\circ, \angle PAQ = \angle CAB,$$

$$\therefore \triangle PGA \sim \triangle BCA,$$

$$\therefore \frac{PG}{AG} = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}.$$

$$\therefore AG = 3PG = 3x.$$

则 P $(x, 3 - 3x)$.

把 P $(x, 3 - 3x)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$, 得

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 3 - 3x,$$

整理得: $x^2 + x = 0$

解得: $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = -1$ (舍去).

②如图 2②, 当 $\angle PAQ = \angle CBA$ 时, 则 $\triangle PAQ \sim \triangle CBA$.

同理可得: $AG = \frac{1}{3}PG = \frac{1}{3}x$, 则 P $(x, 3 - \frac{1}{3}x)$,

把 P $(x, 3 - \frac{1}{3}x)$ 代入 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$, 得

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 3 - \frac{1}{3}x,$$

$$\text{整理得: } x^2 - \frac{13}{3}x = 0$$

解得: $x_1 = 0$ (舍去), $x_2 = \frac{13}{3}$,

$$\therefore P \left(\frac{13}{3}, \frac{14}{9} \right);$$

若点 G 在点 A 的上方,

①当 $\angle PAQ = \angle CAB$ 时, 则 $\triangle PAQ \sim \triangle CAB$,

同理可得: 点 P 的坐标为 (11, 36).

②当 $\angle PAQ = \angle CBA$ 时, 则 $\triangle PAQ \sim \triangle CBA$.

同理可得: 点 P 的坐标为 $P\left(\frac{17}{3}, \frac{44}{9}\right)$.

综上所述: 满足条件的点 P 的坐标为 (11, 36)、 $\left(\frac{13}{3}, \frac{14}{9}\right)$ 、 $\left(\frac{17}{3}, \frac{44}{9}\right)$;

(2) 过点 E 作 $EN \perp y$ 轴于 N, 如图 3.

在 $Rt\triangle ANE$ 中, $EN = AE \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}AE$, 即 $AE = \sqrt{2}EN$,

$\therefore$ 点 M 在整个运动中所用的时间为 $\frac{DE}{1} + \frac{EA}{\sqrt{2}} = DE + EN$.

作点 D 关于 AC 的对称点 D' , 连接 $D'E$,

则有 $D'E = DE$, $D'C = DC$, $\angle D'CA = \angle DCA = 45^\circ$,

$\therefore \angle D'CD = 90^\circ$, $DE + EN = D'E + EN$.

根据两点之间线段最短可得:

当 D' 、E、N 三点共线时, $DE + EN = D'E + EN$ 最小.

此时, $\therefore \angle D'CD = \angle D'NO = \angle NOC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $OCD'N$ 是矩形,

$\therefore ND' = OC = 3$, $ON = D'C = DC$.

对于 $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3$,

当 $y = 0$ 时, 有 $\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 = 0$,

解得: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

$\therefore D(2, 0)$, $OD = 2$,

$\therefore ON = DC = OC - OD = 3 - 2 = 1$,

$\therefore NE = AN = AO - ON = 3 - 1 = 2$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 (2, 1).

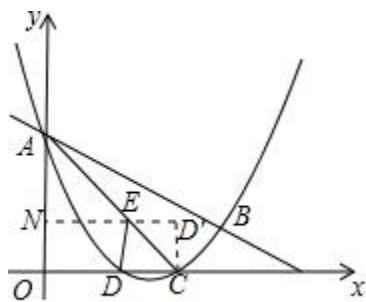


图3

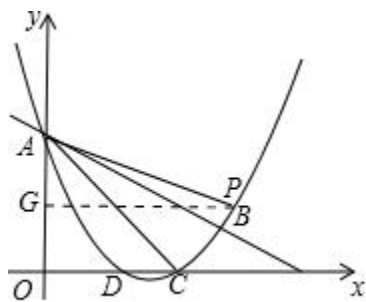


图2②

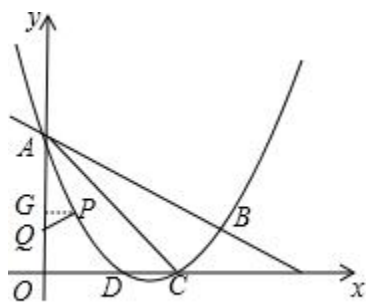


图2①

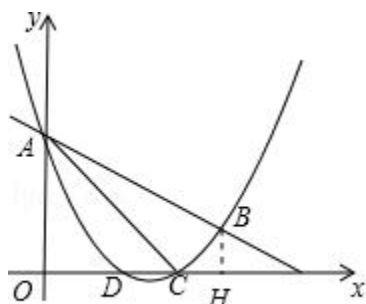


图1

点评： 本题主要考查了运用待定系数法求抛物线的解析式、求直线与抛物线的交点坐标、抛物线上点的坐标特征、三角函数的定义、相似三角形的判定与性质、解一元二次方程、两点之间线段最短、轴对称的性质、矩形的判定与性质、勾股定理等知识，综合性强，难度大，准确分类是解决第（Ⅱ）（1）小题的关键，把点 M 运动的总时间 $\frac{DE}{1} + \frac{EA}{\sqrt{2}}$ 转化为 $DE + EN$ 是解决第（Ⅱ）（2）小题的关键.

