

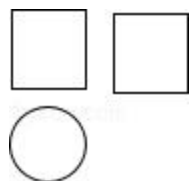
2015 年山东省德州市中考数学试卷

一、选择题

1. (3 分) (2015•德州) $|- \frac{1}{2}|$ 的值是 ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -2 D. 2

2. (3 分) (2015•德州) 某几何体的三视图如图所示, 则此几何体是 ()



- A. 圆锥 B. 圆柱 C. 长方体 D. 四棱柱

3. (3 分) (2015•德州) 2014 年德州市农村中小学校舍标准化工程开工学校项目 356 个, 开工面积 56.2 万平方米, 开工面积创历年最高, 56.2 万平方米用科学记数法表示正确的是 ()

- A. $5.62 \times 10^4 \text{m}^2$ B. $56.2 \times 10^4 \text{m}^2$ C. $5.62 \times 10^5 \text{m}^2$ D. $0.562 \times 10^4 \text{m}^2$

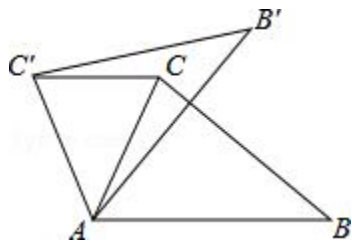
4. (3 分) (2015•德州) 下列运算正确的是 ()

- A. $\sqrt{8} - \sqrt{3} = \sqrt{5}$ B. $b^2 \cdot b^3 = b^6$ C. $4a - 9a = -5$ D. $(ab^2)^2 = a^2b^4$

5. (3 分) (2015•德州) 一组数 1, 1, 2, x, 5, y... 满足“从第三个数起, 每个数都等于它前面的两个数之和”, 那么这组数中 y 表示的数为 ()

- A. 8 B. 9 C. 13 D. 15

6. (3 分) (2015•德州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 65^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 在平面内绕点 A 旋转到 $\triangle AB'C'$ 的位置, 使 $CC' \parallel AB$, 则旋转角的度数为 ()



- A. 35° B. 40° C. 50° D. 65°

7. (3 分) (2015•德州) 若一元二次方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 的有实数解, 则 a 的取值范围是 ()

- A. $a < 1$ B. $a \leq 4$ C. $a \leq 1$ D. $a \geq 1$

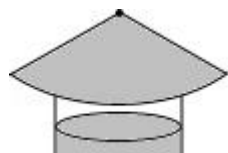
8. (3 分) (2015•德州) 下列命题中, 真命题的个数是 ()

①若 $-1 < x < -\frac{1}{2}$, 则 $-2 < \frac{1}{x} < -1$; ②若 $-1 \leq x \leq 2$, 则 $1 \leq x^2 \leq 4$

③凸多边形的外角和为 360° ; ④三角形中, 若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 则 $\sin A = \cos B$.

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

9. (3分) (2015•德州) 如图, 要制作一个圆锥形的烟囱帽, 使底面圆的半径与母线长的比是 4:5, 那么所需扇形铁皮的圆心角应为 ()

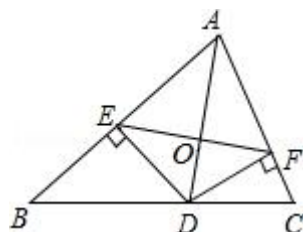


A. 288° B. 144° C. 216° D. 120°

10. (3分) (2015•德州) 经过某十字路口的汽车, 可能直行, 也可能左转或者右转, 如果这三种可能性大小相同, 则经过这个十字路口的两辆汽车一辆左转, 一辆右转的概率是 ()

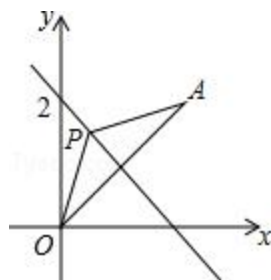
A. $\frac{4}{7}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

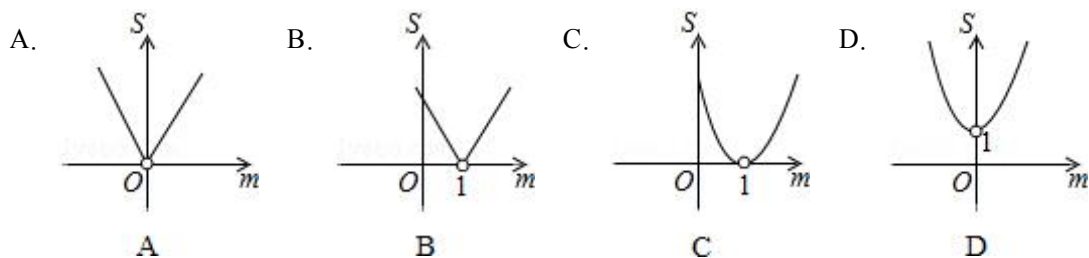
11. (3分) (2015•德州) 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, DE, DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高, 得到下列四个结论: ① $OA = OD$; ② $AD \perp EF$; ③当 $\angle A = 90^\circ$ 时, 四边形 AEDF 是正方形; ④ $AE + DF = AF + DE$. 其中正确的是 ()



A. ②③ B. ②④ C. ①③④ D. ②③④

12. (3分) (2015•德州) 如图, 平面直角坐标系中, A 点坐标为 (2, 2), 点 P (m, n) 在直线 $y = -x + 2$ 上运动, 设 $\triangle APO$ 的面积为 S, 则下面能够反映 S 与 m 的函数关系的图象是 ()





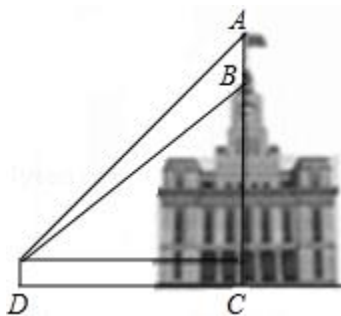
二、填空题 (每小题 4 分)

13. (4 分) (2015•德州) 计算 $2^{-2} + (\sqrt{3})^0 =$ _____.

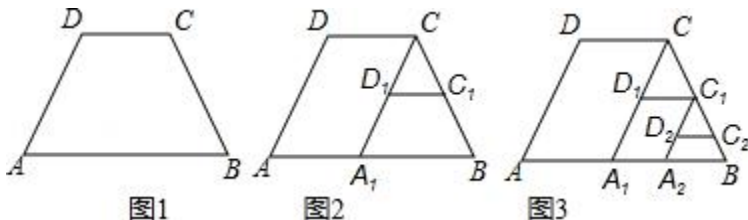
14. (4 分) (2015•德州) 方程 $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x} = 1$ 的解是_____.

15. (4 分) (2015•德州) 在射击比赛中, 某运动员的 6 次射击成绩 (单位: 环) 为: 7, 8, 10, 8, 9, 6, 计算这组数据的方差为_____.

16. (4 分) (2015•德州) 如图, 某建筑物 BC 上有一旗杆 AB, 从与 BC 相距 38m 的 D 处观测旗杆顶部 A 的仰角为 50° , 观测旗杆底部 B 的仰角为 45° , 则旗杆的高度均为_____m. (结果精确到 0.1m, 参考数据: $\sin 50^\circ \approx 0.77$, $\cos 50^\circ \approx 0.64$, $\tan 50^\circ \approx 1.19$)



17. (4 分) (2015•德州) 如图 1, 四边形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, $AD=DC=CB=a$, $\angle A=60^\circ$. 取 AB 的中点 A_1 , 连接 A_1C , 再分别取 A_1C , BC 的中点 D_1 , C_1 , 连接 D_1C_1 , 得到四边形 $A_1BC_1D_1$. 如图 2, 同样方法操作得到四边形 $A_2BC_2D_2$, 如图 3, ..., 如此进行下去, 则四边形 $A_nBC_nD_n$ 的面积为_____.



三、解答题:

18. (6分) (2015•德州) 先化简, 再求值: $\frac{a^2 - b^2}{a} \div (a - \frac{2ab - b^2}{a})$, 其中 $a = 2 + \sqrt{3}$, $b = 2 - \sqrt{3}$.

19. (8分) (2015•德州) 2014年1月, 国家发改委出台指导意见, 要求2015年底前, 所有城市原则上全面实行居民阶梯水价制度, 小明为了解市政府调整水价方案的社会反响, 随机访问了自己居住小区的部分居民, 就“每月每户的用水量”和“调价对用水行为改变”两个问题进行调查, 并把调查结果整理成下面的图1, 图2.

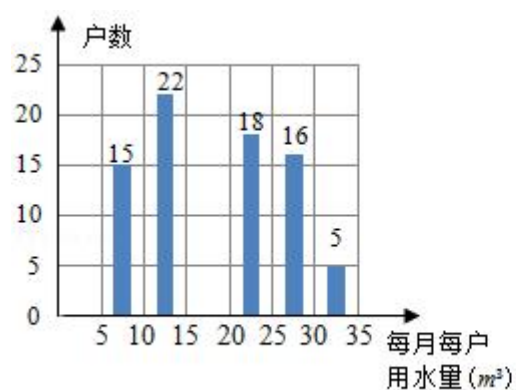


图1

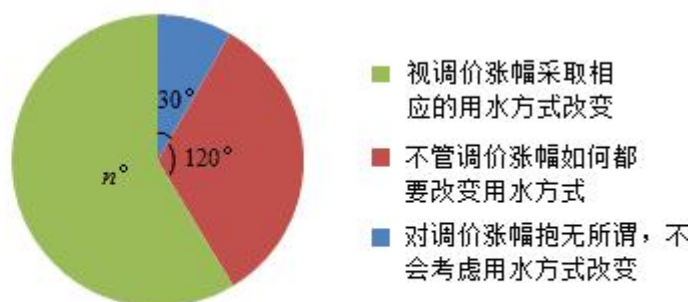


图2

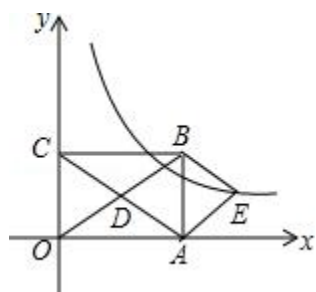
小明发现每月每户的用水量在 $5m^3 - 35m^3$ 之间, 有8户居民对用水价格调价涨幅抱无所谓, 不会考虑用水方式的改变, 根据小明控制的图表和发现的信息, 完成下列问题:

- (1) $n =$ _____, 小明调查了 _____ 户居民, 并补全图1;
- (2) 每月每户用水量的中位数和众数分别落在什么范围?
- (3) 如果小明所在小区有1800户居民, 请你估计“视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数有多少.

20. (8分) (2015•德州) 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $OABC$ 的对角线 OB , AC 相交于点 D , 且 $BE \parallel AC$, $AE \parallel OB$,

(1) 求证: 四边形 $AEBD$ 是菱形;

(2) 如果 $OA=3$, $OC=2$, 求出经过点 E 的反比例函数解析式.

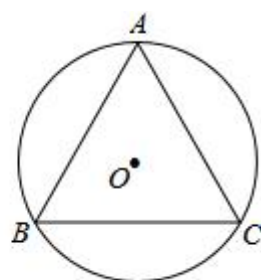
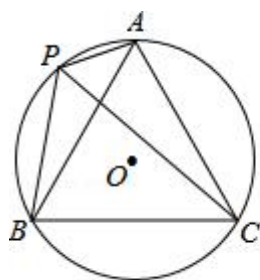


21. (10分) (2015•德州) 如图, $\odot O$ 的半径为 1, A , P , B , C 是 $\odot O$ 上的四个点, $\angle APC = \angle CPB = 60^\circ$.

(1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状: _____;

(2) 试探究线段 PA , PB , PC 之间的数量关系, 并证明你的结论;

(3) 当点 P 位于 $\widehat{AB}$ 的什么位置时, 四边形 $APBC$ 的面积最大? 求出最大面积.

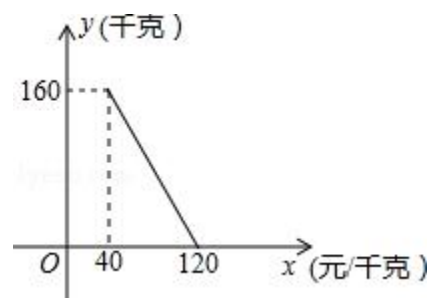


备用图

22. (10 分) (2015•德州) 某商店以 40 元/千克的单价新进一批茶叶, 经调查发现, 在一段时间内, 销售量 y (千克) 与销售单价 x (元/千克) 之间的函数关系如图所示.

(1) 根据图象求 y 与 x 的函数关系式;

(2) 商店想在销售成本不超过 3000 元的情况下, 使销售利润达到 2400 元, 销售单价应定为多少?



23. (10 分) (2015•德州) (1) 问题

如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 为 AB 上一点, $\angle DPC = \angle A = \angle B = 90^\circ$, 求证: $AD \cdot BC = AP \cdot BP$.

(2) 探究

如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 为 AB 上一点, 当 $\angle DPC = \angle A = \angle B = \theta$ 时, 上述结论是否依然成立? 说明理由.

(3) 应用

请利用 (1) (2) 获得的经验解决问题:

如图 3, 在 $\triangle ABD$ 中, $AB=6$, $AD=BD=5$, 点 P 以每秒 1 个单位长度的速度, 由点 A 出了, 沿边 AB 向点 B 运动, 且满足 $\angle DPC = \angle A$, 设点 P 的运动时间为 t (秒), 当以 D 为圆心, 以 DC 为半径的圆与 AB 相切时, 求 t 的值.

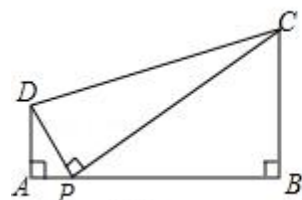


图1

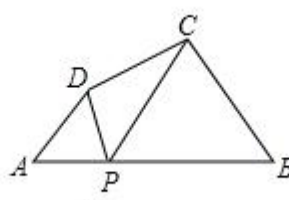


图2

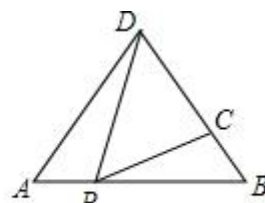


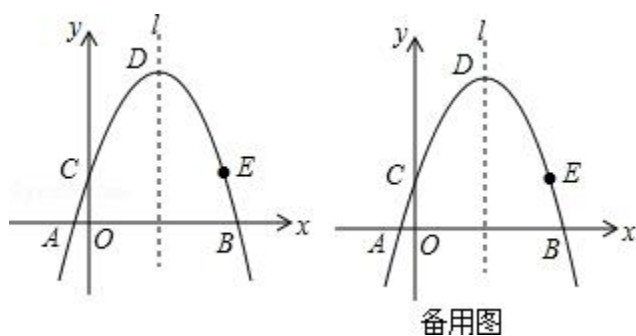
图3

24. (12 分) (2015•德州) 已知抛物线 $y = -mx^2 + 4x + 2m$ 与 x 轴交于点 $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, 且 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -2$,

(1) 求抛物线的解析式.

(2) 抛物线的对称轴为 l , 与 y 轴的交点为 C , 顶点为 D , 点 C 关于 l 的对称点为 E , 是否存在 x 轴上的点 M , y 轴上的点 N , 使四边形 $DNME$ 的周长最小? 若存在, 请画出图形 (保留作图痕迹), 并求出周长的最小值; 若不存在, 请说明理由.

(3) 若点 P 在抛物线上, 点 Q 在 x 轴上, 当以点 D 、 E 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形时, 求点 P 的坐标.



2015 年山东省德州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题

1. (3 分) (2015•德州) $|- \frac{1}{2}|$ 的值是 ()

A. $- \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}$

C. -2

D. 2

考点: 绝对值.

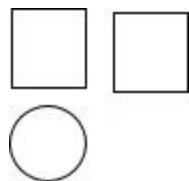
分析: 绝对值的性质: 一个正数的绝对值是它本身; 一个负数的绝对值是它的相反数; 0 的绝对值是 0.

解答: 解: 根据负数的绝对值是它的相反数, 得 $|- \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

故选 B.

点评: 本题考查了绝对值的性质.

2. (3 分) (2015•德州) 某几何体的三视图如图所示, 则此几何体是 ()



A. 圆锥

B. 圆柱

C. 长方体

D. 四棱柱

考点: 简单几何体的三视图.

分析: 根据三视图的主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看, 所得到的图形进行分析可知几何体的名称.

解答: 解: $\because$ 主视图和左视图都是长方形,

$\therefore$ 此几何体为柱体,

$\because$ 俯视图是一个圆,

$\therefore$ 此几何体为圆柱,

故选: B.

点评: 此题考查了由三视图判断几何体, 用到的知识点为: 由主视图和左视图可得几何体是柱体, 椎体还是球体, 由俯视图可确定几何体的具体形状.

3. (3 分) (2015•德州) 2014 年德州市农村中小学校舍标准化工程开工学校项目 356 个, 开工面积 56.2 万平方米, 开式面积量创历年最高, 56.2 万平方米用科学记数法表示正确的是 ()

A. $5.62 \times 10^4 \text{m}^2$

B. $56.2 \times 10^4 \text{m}^2$

C. $5.62 \times 10^5 \text{m}^2$

D. $0.562 \times 10^4 \text{m}^2$

考点：科学记数法—表示较大的数.

分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答：解：56.2 万 $= 562000 = 5.62 \times 10^5$ ，
故选 C，

点评：此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (3 分) (2015•德州) 下列运算正确的是 ()

A. $\sqrt{8} - \sqrt{3} = \sqrt{5}$ B. $b^2 \cdot b^3 = b^6$ C. $4a - 9a = -5$ D. $(ab^2)^2 = a^2b^4$

考点：幂的乘方与积的乘方；合并同类项；同底数幂的乘法；二次根式的加减法.

分析：A：根据二次根式的加减法的运算方法判断即可；

B：根据同底数幂的乘法法则判断即可；

C：根据合并同类项的方法判断即可；

D：积的乘方法则： $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数)，据此判断即可.

解答：解： $\because \sqrt{8} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3} \neq \sqrt{5}$,

$\therefore$ 选项 A 错误；

$\because b^2 \cdot b^3 = b^5$,

$\therefore$ 选项 B 错误；

$\because 4a - 9a = -5a$,

$\therefore$ 选项 C 错误；

$\because (ab^2)^2 = a^2 b^4$,

$\therefore$ 选项 D 正确.

故选：D.

点评：(1) 此题主要考查了同底数幂的乘法法则：同底数幂相乘，底数不变，指数相加，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：①底数必须相同；②按照运算性质，只有相乘时才是底数不变，指数相加.

(2) 此题还考查了幂的乘方和积的乘方，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：

① $(a^m)^n = a^{mn}$ (m, n 是正整数)；② $(ab)^n = a^n b^n$ (n 是正整数).

(3) 此题还考查了合并同类项问题，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确合并同类项的法则：把同类项的系数相加，所得结果作为系数，字母和字母的指数不变.

(4) 此题还考查了二次根式的加减法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确二次根式的加减法的步骤：①如果有括号，根据去括号法则去掉括号. ②把不是最简二次根式的二次根式进行化简. ③合并被开方数相同的二次根式.

5. (3 分) (2015•德州) 一组数 1, 1, 2, x , 5, y ... 满足“从第三个数起，每个数都等于它前面的两个数之和”，那么这组数中 y 表示的数为 ()

A. 8 B. 9 C. 13 D. 15

考点：规律型：数字的变化类.

分析：根据每个数都等于它前面的两个数之和，可得 $x = 1 + 2 = 3$ ， $y = x + 5 = 3 + 5 = 8$ ，据此解答即

可.

解答: 解: $\because$ 每个数都等于它前面的两个数之和,

$$\therefore x=1+2=3,$$

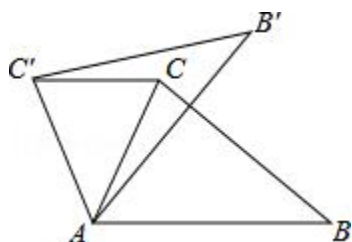
$$\therefore y=x+5=3+5=8,$$

即这组数中 y 表示的数为 8.

故选: A.

点评: 此题主要考查了探寻数列规律问题, 注意观察总结规律, 并能正确的应用规律, 解答此题的关键是求出 x 的值是多少.

6. (3 分) (2015•德州) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB=65^\circ$, 将 $\triangle ABC$ 在平面内绕点 A 旋转到 $\triangle AB'C'$ 的位置, 使 $CC' \parallel AB$, 则旋转角的度数为 ()



A. 35°

B. 40°

C. 50°

D. 65°

考点: 旋转的性质.

分析: 根据两直线平行, 内错角相等可得 $\angle ACC' = \angle CAB$, 根据旋转的性质可得 $AC = AC'$, 然后利用等腰三角形两底角相等求 $\angle CAC'$, 再根据 $\angle CAC'$ 、 $\angle BAB'$ 都是旋转角解答.

解答: 解: $\because CC' \parallel AB$,

$$\therefore \angle ACC' = \angle CAB = 65^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 绕点 A 旋转得到 $\triangle AB'C'$,

$$\therefore AC = AC',$$

$$\therefore \angle CAC' = 180^\circ - 2\angle ACC' = 180^\circ - 2 \times 65^\circ = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle CAC' = \angle BAB' = 50^\circ.$$

故选 C.

点评: 本题考查了旋转的性质, 等腰三角形两底角相等的性质, 熟记性质并准确识图是解题的关键.

7. (3 分) (2015•德州) 若一元二次方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 的有实数解, 则 a 的取值范围是 ()

A. $a < 1$

B. $a \leq 4$

C. $a \leq 1$

D. $a \geq 1$

考点: 根的判别式.

分析: 若一元二次方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 的有实数解, 则根的判别式 $\Delta \geq 0$, 据此可以列出关于 a 的不等式, 通过解不等式即可求得 a 的值.

解答: 解: 因为关于 x 的一元二次方程有实根,

$$\text{所以 } \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4a \geq 0,$$

解之得 $a \leq 1$.

故选 C.

点评: 本题考查了一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 根的判别式. 当 $\Delta > 0$, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$, 方程有两个相等的实数根; 当 $\Delta < 0$, 方程没

有实数根.

8. (3分) (2015•德州) 下列命题中, 真命题的个数是 ()

- ①若 $-1 < x < -\frac{1}{2}$, 则 $-2 < \frac{1}{x} < -1$;
②若 $-1 \leq x \leq 2$, 则 $1 \leq x^2 \leq 4$
③凸多边形的外角和为 360° ;
④三角形中, 若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 则 $\sin A = \cos B$.

A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

考点: 命题与定理.

分析: 根据分式成立的条件对①进行判断; 根据乘方的意义对②进行判断; 根据多边形外角和定理对③进行判断; 根据互余公式对④进行判断.

解答: 解: 若 $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $-2 < \frac{1}{x} < -1$, 所以①正确;

若 $-1 \leq x \leq 2$, 则 $0 \leq x^2 \leq 4$, 所以②错误;

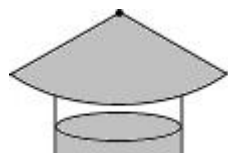
凸多边形的外角和为 360° , 所以③正确;

三角形中, 若 $\angle A + \angle B = 90^\circ$, 则 $\sin A = \cos B$, 所以④正确.

故选 B.

点评: 本题考查了命题与定理: 判断一件事情的语句, 叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成, 题设是已知事项, 结论是由已知事项推出的事项, 一个命题可以写成“如果...那么...”形式. 有些命题的正确性是用推理证实的, 这样的真命题叫做定理.

9. (3分) (2015•德州) 如图, 要制作一个圆锥形的烟囱帽, 使底面圆的半径与母线长的比是 4: 5, 那么所需扇形铁皮的圆心角应为 ()



A. 288° B. 144° C. 216° D. 120°

考点: 圆锥的计算.

分析: 根据底面圆的半径与母线长的比设出二者, 然后利用底面圆的周长等于弧长列式计算即可.

解答: 解: $\because$ 底面圆的半径与母线长的比是 4: 5,

$\therefore$ 设底面圆的半径为 $4x$,

则母线长是 $5x$,

设圆心角为 n° ,

$$\text{则 } 2\pi \times 4x = \frac{n\pi \times 5x}{180},$$

解得: $n=288$,

故选 A.

点评: 本题考查了圆锥的计算: 圆锥的侧面展开图为扇形, 扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长.

10. (3分) (2015•德州) 经过某十字路口的汽车, 可能直行, 也可能左转或者右转, 如果这三种可能性大小相同, 则经过这个十字路口的两辆汽车一辆左转, 一辆右转的概率是 ()

- A. $\frac{4}{7}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{2}{9}$ D. $\frac{1}{9}$

考点: 列表法与树状图法.

分析: 此题可以采用列表法或树状图求解. 可以得到一共有 9 种情况, 两辆汽车一辆左转, 一辆右转的有 2 种情况, 根据概率公式求解即可.

解答: 解: (1) 画“树形图”列举这两辆汽车行驶方向所有可能的结果如图所示:



∴ 这两辆汽车行驶方向共有 9 种可能的结果;

(2) 由 (1) 中“树形图”知, 两辆汽车一辆左转, 一辆右转的结果有 2 种, 且所有结果的可能性相等,

$$\therefore P(\text{两辆汽车一辆左转, 一辆右转}) = \frac{2}{9}.$$

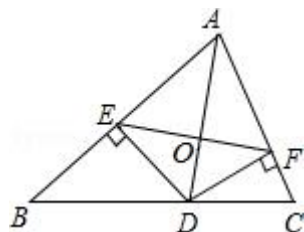
故选 C.

点评: 此题考查了树状图法求概率. 解题的关键是根据题意画出树状图, 再由概率=所求情况数与总情况数之比求解.

11. (3分) (2015•德州) 如图, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线, DE, DF 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的高, 得到下列四个结论:

- ① $OA=OD$;
- ② $AD \perp EF$;
- ③ 当 $\angle A=90^\circ$ 时, 四边形 AEDF 是正方形;
- ④ $AE+DF=AF+DE$.

其中正确的是 ()



- A. ②③ B. ②④ C. ①③④ D. ②③④

考点: 角平分线的性质; 全等三角形的判定与性质; 正方形的判定.

分析: ①如果 $OA=OD$, 则四边形 AEDF 是矩形, $\angle A=90^\circ$, 不符合题意, 所以①不正确.

②首先根据全等三角形的判定方法, 判断出 $\triangle AED \cong \triangle AFD$, $AE=AF$, $DE=DF$; 然后根据全等三角形的判定方法, 判断出 $\triangle AEO \cong \triangle AFO$, 即可判断出 $AD \perp EF$.

③首先判断出当 $\angle A=90^\circ$ 时, 四边形 AEDF 的四个角都是直角, 四边形 AEDF 是矩形, 然后根据 $DE=DF$, 判断出四边形 AEDF 是正方形即可.

④根据 $\triangle AED \cong \triangle AFD$, 判断出 $AE=AF$, $DE=DF$, 即可判断出 $AE+DF=AF+DE$ 成立, 据此解答即可.

解答: 解: 如果 $OA=OD$, 则四边形 AEDF 是矩形, $\angle A=90^\circ$, 不符合题意,

$\therefore$ ①不正确;

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$\therefore \angle EAD = \angle FAD$,

在 $\triangle AED$ 和 $\triangle AFD$ 中,

$$\begin{cases} \angle EAD = \angle FAD \\ \angle AED = \angle AFD = 90^\circ \\ AD = AD \end{cases}$$

$\therefore \triangle AED \cong \triangle AFD$ (AAS),

$\therefore AE=AF$, $DE=DF$,

$\therefore AE+DF=AF+DE$,

$\therefore$ ④正确;

在 $\triangle AEO$ 和 $\triangle AFO$ 中,

$$\begin{cases} AE=AF \\ \angle EAO = \angle FAO \\ AO=AO \end{cases}$$

$\therefore \triangle AEO \cong \triangle AFO$ (SAS),

$\therefore EO=FO$,

又 $\because AE=AF$,

$\therefore AO$ 是 EF 的中垂线,

$\therefore AD \perp EF$,

$\therefore$ ②正确;

$\because$ 当 $\angle A=90^\circ$ 时, 四边形 AEDF 的四个角都是直角,

$\therefore$ 四边形 AEDF 是矩形,

又 $\because DE=DF$,

$\therefore$ 四边形 AEDF 是正方形,

$\therefore$ ③正确.

综上, 可得

正确的是: ②③④.

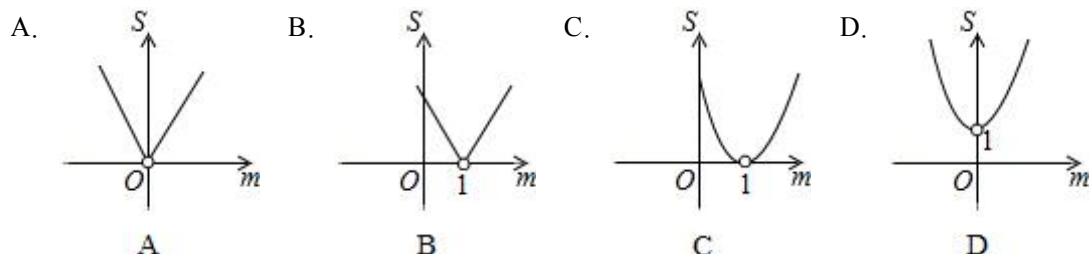
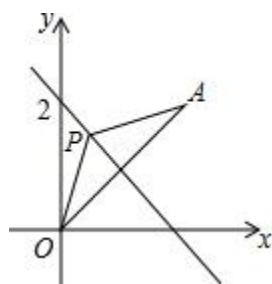
故选: D.

点评: (1) 此题主要考查了三角形的角平分线的性质和应用, 以及直角三角形的性质和应用, 要熟练掌握.

(2) 此题还考查了全等三角形的判定和应用, 要熟练掌握.

(3) 此题还考查了矩形、正方形的性质和应用, 要熟练掌握.

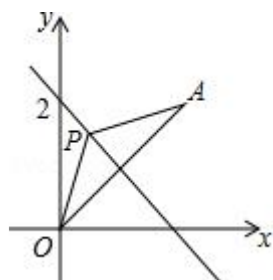
12. (3 分) (2015•德州) 如图, 平面直角坐标系中, A 点坐标为 (2, 2), 点 P (m, n) 在直线 $y=-x+2$ 上运动, 设 $\triangle APO$ 的面积为 S, 则下面能够反映 S 与 m 的函数关系的图象是 ()



考点: 动点问题的函数图象.

分析: 根据题意得出临界点 P 点横坐标为 1 时, $\triangle APO$ 的面积为 0, 进而结合底边长不变得出即可.

解答: 解: $\because$ 点 P (m , n) 在直线 $y = -x + 2$ 上运动,
 $\therefore$ 当 $m=1$ 时, $n=1$, 即 P 点在直线 AO 上, 此时 $S=0$,
 当 $0 < m \leq 1$ 时, $S_{\triangle APO}$ 不断减小, 当 $m > 1$ 时, $S_{\triangle APO}$ 不断增大, 且底边 AO 不变,
 故 S 与 m 是一次函数关系.
 故选: B.



点评: 此题主要考查了动点问题的函数图象, 根据题意得出临界点是解题关键.

二、填空题 (每小题 4 分)

13. (4 分) (2015•德州) 计算 $2^{-2} + (\sqrt{3})^0 = \frac{5}{4}$.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂.

分析: 首先根据负整数指数幂的运算方法, 求出 2^{-2} 的值是多少; 然后根据 $a^0=1$ ($a \neq 0$), 求出 $(\sqrt{3})^0$ 的值是多少; 最后再求和, 求出算式 $2^{-2} + (\sqrt{3})^0$ 的值是多少即可.

解答: 解: $2^{-2} + (\sqrt{3})^0$
 $= \frac{1}{4} + 1$
 $= \frac{5}{4}$

故答案为: $\frac{5}{4}$.

点评: (1) 此题主要考查了负整数指数幂的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确:

(1) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ ($a \neq 0$, p 为正整数); (2) 计算负整数指数幂时, 一定要根据负整数指数幂的意义计算; (3) 当底数是分数时, 只要把分子、分母颠倒, 负指数就可变为正指数.

(2) 此题还考查了零指数幂的运算, 要熟练掌握, 解答此题的关键是要明确: (1) $a^0 = 1$ ($a \neq 0$); (2) $0^0 \neq 1$.

14. (4 分) (2015•德州) 方程 $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x} = 1$ 的解是 $x=2$.

考点: 解分式方程.

专题: 计算题.

分析: 分式方程去分母转化为整式方程, 求出整式方程的解得到 x 的值, 经检验即可得到分式方程的解.

解答: 解: 去分母得: $x^2 - 2x + 2 = x^2 - x$,
解得: $x=2$,
经检验 $x=2$ 是分式方程的解,
故答案为: $x=2$

点评: 此题考查了解分式方程, 解分式方程的基本思想是“转化思想”, 把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定要注意要验根.

15. (4 分) (2015•德州) 在射击比赛中, 某运动员的 6 次射击成绩 (单位: 环) 为: 7, 8, 10, 8, 9, 6, 计算这组数据的方差为 $\frac{5}{3}$.

考点: 方差.

专题: 计算题.

分析: 先计算出这组数据的平均数, 然后根据方差公式求解.

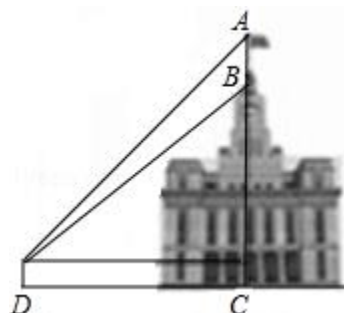
解答: 解: 平均数 $= \frac{1}{6} (7+8+10+8+9+6) = 8$,

所以方差 $S^2 = \frac{1}{6} [(7-8)^2 + (8-8)^2 + (10-8)^2 + (8-8)^2 + (9-8)^2 + (6-8)^2] = \frac{5}{3}$.

故答案为 $\frac{5}{3}$.

点评: 本题考查方差: 一般地设 n 个数据, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 则方差 $S^2 = \frac{1}{n} [(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$, 它反映了一组数据的波动大小, 方差越大, 波动性越大, 反之也成立.

16. (4分) (2015•德州) 如图, 某建筑物 BC 上有一旗杆 AB, 从与 BC 相距 38m 的 D 处观测旗杆顶部 A 的仰角为 50° , 观测旗杆底部 B 的仰角为 45° , 则旗杆的高度均为 7.2 m. (结果精确到 0.1m, 参考数据: $\sin 50^\circ \approx 0.77$, $\cos 50^\circ \approx 0.64$, $\tan 50^\circ \approx 1.19$)



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析: 根据题意分别在两个直角三角形中求得 AF 和 BF 的长后求差即可得到旗杆的高度.

解答: 解: 根据题意得: $EF \perp AC$, $CD \parallel FE$,

$\therefore$ 四边形 CDEF 是矩形,

已知底部 B 的仰角为 45° 即 $\angle BEF = 45^\circ$,

$\therefore \angle EBF = 45^\circ$,

$\therefore CD = EF = FB = 38$,

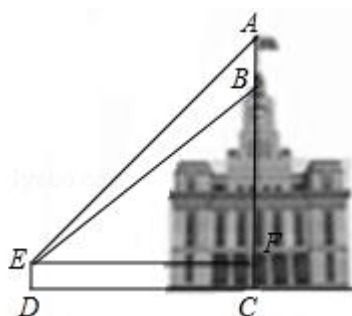
在 $Rt\triangle AEF$ 中,

$AF = EF \cdot \tan 50^\circ = 38 \times 1.19 \approx 45.22$

$\therefore AB = AF - BF = 45.22 - 38 \approx 7.2$,

$\therefore$ 旗杆的高约为 7 米.

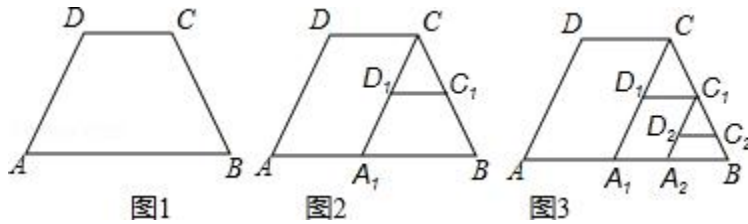
故答案为: 7.2.



点评: 此题考查的知识点是解直角三角形的应用, 解题的关键是把实际问题转化为解直角三角形问题, 先得到等腰直角三角形, 再根据三角函数求解.

17. (4分) (2015•德州) 如图 1, 四边形 ABCD 中, $AB \parallel CD$, $AD = DC = CB = a$, $\angle A = 60^\circ$. 取 AB 的中点 A_1 , 连接 A_1C , 再分别取 A_1C , BC 的中点 D_1 , C_1 , 连接 D_1C_1 , 得到四边形 $A_1BC_1D_1$. 如图 2, 同样方法操作得到四边形 $A_2BC_2D_2$, 如图 3, ..., 如此进行下去, 则四

边形 $A_nBC_nD_n$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4^{n+1}}a^2$.



考点: 等腰梯形的性质; 等边三角形的判定与性质; 三角形中位线定理.

专题: 规律型.

分析: 首先求得梯形 $ABCD$ 的面积, 然后证明梯形 $A_nBC_nD_n \sim$ 梯形 $A_{n-1}BC_{n-1}D_{n-1}$, 然后根据相似形面积的比等于相似比的平方即可求解.

解答: 解: 作 $DE \perp AB$ 于点 E .

在直角 $\triangle ADE$ 中, $DE = AD \cdot \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$,

则 $AB = 2AD = 2a$, $S_{\text{梯形 } ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DE = \frac{1}{2}(2a + a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$.

如图 2, $\because D_1, C_1$ 是 A_1C 和 BC 的中点,

$\therefore D_1C_1 \parallel A_1B$, 且 $C_1D_1 = \frac{1}{2}A_1B$,

$\because AA_1 = CD$, $AA_1 \parallel CD$,

$\therefore$ 四边形 AA_1CD 是平行四边形,

$\therefore AD \parallel A_1C$, $AD = A_1C = a$,

$\therefore \angle A = \angle CA_1B$,

又 $\because \angle B = \angle B$,

$\therefore \angle D = \angle A_1D_1C_1$, $\angle DCB = \angle D_1C_1B$,

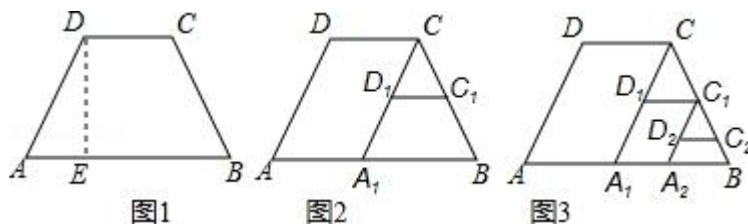
$\frac{D_1C_1}{DC} = \frac{A_1D_1}{AD} = \frac{BC_1}{BC} = \frac{A_1B}{AB} = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 梯形 $A_1BC_1D_1 \sim$ 梯形 $ABCD$, 且相似比是 $\frac{1}{2}$.

同理, 梯形 $A_nBC_nD_n \sim$ 梯形 $A_{n-1}BC_{n-1}D_{n-1}$, 相似比是 $\frac{1}{2}$.

则四边形 $A_nBC_nD_n$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4^{n+1}}a^2$.

故答案是: $\frac{3\sqrt{3}}{4^{n+1}}a^2$.



点评: 本题考查了相似多边形的判定与性质, 正确证明梯形 $A_nBC_nD_n \sim$ 梯形 $A_{n-1}BC_{n-1}D_{n-1}$

-1 是关键.

三、解答题:

18. (6 分) (2015•德州) 先化简, 再求值: $\frac{a^2 - b^2}{a} \div (a - \frac{2ab - b^2}{a})$, 其中 $a=2+\sqrt{3}$, $b=2-\sqrt{3}$.

考点: 分式的化简求值.

专题: 计算题.

分析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则计算, 约分得到最简结果, 把 a 与 b 的值代入计算即可求出值.

解答: 解: 原式

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{a} \div \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a} = \frac{(a+b)(a-b)}{a} \cdot \frac{a}{(a-b)^2} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\text{当 } a=2+\sqrt{3}, b=2-\sqrt{3} \text{ 时, 原式} = \frac{2+\sqrt{3}+2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}} = \frac{4}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

点评: 此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

19. (8 分) (2015•德州) 2014 年 1 月, 国家发改委出台指导意见, 要求 2015 年底前, 所有城市原则上全面实行居民阶梯水价制度, 小明为了解市政府调整水价方案的社会反响, 随机访问了自己居住小区的部分居民, 就“每月每户的用水量”和“调价对用水行为改变”两个问题进行调查, 并把调查结果整理成下面的图 1, 图 2.

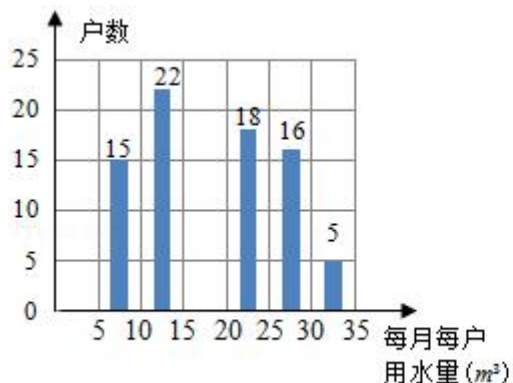


图1

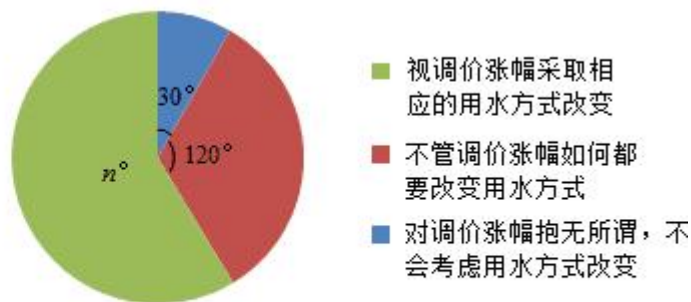


图2

小明发现每月每户的用水量在 $5\text{m}^3 - 35\text{m}^3$ 之间, 有 8 户居民对用水价格调价涨幅抱无所谓, 不会考虑用水方式的改变, 根据小明控制的图表和发现的信息, 完成下列问题:

- (1) $n = \underline{210}$, 小明调查了 96 户居民, 并补全图 1;
- (2) 每月每户用水量的中位数和众数分别落在什么范围?
- (3) 如果小明所在小区有 1800 户居民, 请你估计“视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数有多少.

考点: 条形统计图; 用样本估计总体.

分析: (1) 首先根据圆周角等于 360° , 求出的值是多少即可; 然后用“视水价格调价涨幅抱

无所谓态度”的居民的户数除以它占被调查的居民户数的分率，求出小明调查了多少户居民；最后求出每月每户的用水量在 $15\text{m}^3 - 20\text{m}^3$ 之间的居民的户数，补全图 1 即可.

(2) 根据中位数和众数的含义分别进行解答即可.

(3) 根据分数乘法的意义，用小明所在小区居民的户数乘以“视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数占被调查的居民户数的分率，求出“视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数有多少即可.

解答: 解: (1) $n=360-30-120=210$,

$$\therefore 8 \div \frac{30}{360}$$

$$= 8 \div \frac{1}{12}$$

$$= 96 \text{ (户)}$$

$\therefore$ 小明调查了 96 户居民.

每月每户的用水量在 $15\text{m}^3 - 20\text{m}^3$ 之间的居民的户数是:

$$96 - (15+22+18+16+5)$$

$$= 96 - 76$$

$$= 20 \text{ (户)}.$$

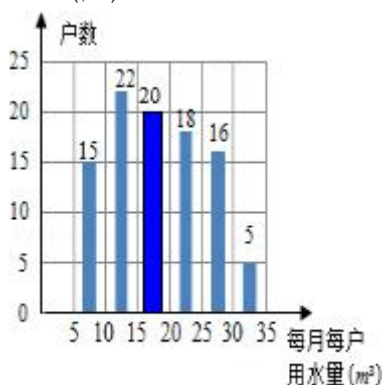


图1

(2) $96 \div 2 = 48$ (户), $15+12=37$ (户), $15+22+20=57$ (户),

$\therefore$ 每月每户的用水量在 $5\text{m}^3 - 15\text{m}^3$ 之间的有 37 户, 每月每户的用水量在 $5\text{m}^3 - 20\text{m}^3$ 之间的有 57 户,

$\therefore$ 把每月每户用水量这组数据从小到大排列后, 第 48 个、第 49 个数在 $15 - 20$ 之间,

$\therefore$ 第 48 个、第 49 个数的平均数也在 $15 - 20$ 之间,

$\therefore$ 每月每户用水量的中位数落在 $15 - 20$ 之间;

$\therefore$ 在这组数据中, $10 - 15$ 之间的数出现的次数最多, 出现了 22 次,

$\therefore$ 每月每户用水量的众数落在 $10 - 15$ 之间.

$$(3) \therefore 1800 \times \frac{210}{360} = 1050 \text{ (户)},$$

$\therefore$ “视调价涨幅采取相应的用水方式改变”的居民户数有 1050 户.

故答案为: 210、96.

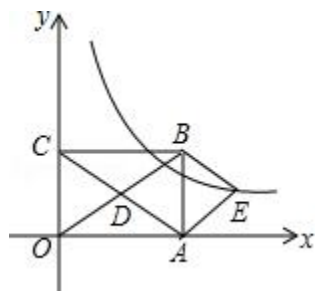
点评: (1) 此题主要考查了对条形统计图的认识和了解, 要善于从条形统计图中获取信息, 并能利用获取的信息解决实际问题.

(2) 此题还考查了用样本估计总体，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确众数、中位数、平均数、标准差与方差等的含义以及求法.

20. (8分) (2015•德州) 如图，在平面直角坐标系中，矩形 OABC 的对角线 OB，AC 相交于点 D，且 $BE \parallel AC$ ， $AE \parallel OB$ ，

(1) 求证：四边形 AEBD 是菱形；

(2) 如果 $OA=3$ ， $OC=2$ ，求出经过点 E 的反比例函数解析式.



考点：反比例函数综合题.

分析： (1) 先证明四边形 AEBD 是平行四边形，再由矩形的性质得出 $DA=DB$ ，即可证出四边形 AEBD 是菱形；

(2) 连接 DE，交 AB 于 F，由菱形的性质得出 AB 与 DE 互相垂直平分，求出 EF、AF，得出点 E 的坐标；设经过点 E 的反比例函数解析式为： $y=\frac{k}{x}$ ，把点 E 坐标代入求出 k 的值即可.

解答： (1) 证明：∵ $BE \parallel AC$ ， $AE \parallel OB$ ，

∴ 四边形 AEBD 是平行四边形，

∵ 四边形 OABC 是矩形，

∴ $DA=\frac{1}{2}AC$ ， $DB=\frac{1}{2}OB$ ， $AC=OB$ ， $AB=OC=2$ ，

∴ $DA=DB$ ，

∴ 四边形 AEBD 是菱形；

(2) 解：连接 DE，交 AB 于 F，如图所示：

∵ 四边形 AEBD 是菱形，

∴ AB 与 DE 互相垂直平分，

∵ $OA=3$ ， $OC=2$ ，

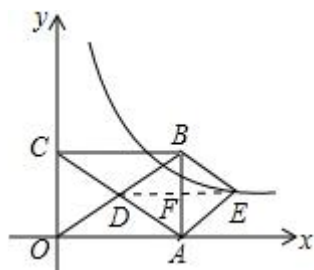
∴ $EF=DF=\frac{1}{2}OA=\frac{3}{2}$ ， $AF=\frac{1}{2}AB=1$ ， $3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$ ，

∴ 点 E 坐标为： $(\frac{9}{2}, 1)$ ，

设经过点 E 的反比例函数解析式为： $y=\frac{k}{x}$ ，

把点 E $(\frac{9}{2}, 1)$ 代入得： $k=\frac{9}{2}$ ，

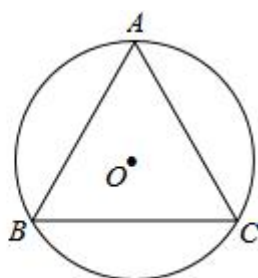
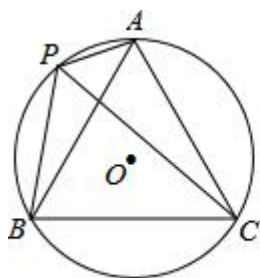
∴ 经过点 E 的反比例函数解析式为： $y=\frac{9}{2x}$.



点评: 本题是反比例函数综合题目, 考查了平行四边形的判定、菱形的判定、矩形的性质、坐标与图形特征以及反比例函数解析式的求法; 本题综合性强, 有一定难度, 特别是 (2) 中, 需要作辅助线求出点 E 的坐标才能得出结果.

21. (10 分) (2015•德州) 如图, $\odot O$ 的半径为 1, A, P, B, C 是 $\odot O$ 上的四个点, $\angle APC = \angle CPB = 60^\circ$.

- (1) 判断 $\triangle ABC$ 的形状: 等边三角形;
- (2) 试探究线段 PA, PB, PC 之间的数量关系, 并证明你的结论;
- (3) 当点 P 位于 $\widehat{AB}$ 的什么位置时, 四边形 APBC 的面积最大? 求出最大面积.



备用图

考点: 圆周角定理; 全等三角形的判定与性质; 等边三角形的判定与性质; 垂径定理.

分析: (1) 利用圆周角定理可得 $\angle BAC = \angle CPB$, $\angle ABC = \angle APC$, 而 $\angle APC = \angle CPB = 60^\circ$, 所以 $\angle BAC = \angle ABC = 60^\circ$, 从而可判断 $\triangle ABC$ 的形状;

(2) 在 PC 上截取 $PD = AP$, 则 $\triangle APD$ 是等边三角形, 然后证明 $\triangle APB \cong \triangle ADC$, 证明 $BP = CD$, 即可证得;

(3) 过点 P 作 $PE \perp AB$, 垂足为 E, 过点 C 作 $CF \perp AB$, 垂足为 F, 把四边形的面积转化为两个三角形的面积进行计算, 当点 P 为 $\widehat{AB}$ 的中点时, $PE + CF = PC$ 从而得出最大面积.

解答: 证明: (1) $\triangle ABC$ 是等边三角形.

证明如下: 在 $\odot O$ 中

$\because \angle BAC$ 与 $\angle CPB$ 是 $\widehat{BC}$ 所对的圆周角, $\angle ABC$ 与 $\angle APC$ 是 $\widehat{AC}$ 所对的圆周角,

$\therefore \angle BAC = \angle CPB$, $\angle ABC = \angle APC$,

又 $\because \angle APC = \angle CPB = 60^\circ$,

$\therefore \angle ABC = \angle BAC = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 为等边三角形;

(2) 在 PC 上截取 $PD = AP$, 如图 1,

又 $\because \angle APC = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle APD$ 是等边三角形,
 $\therefore AD = AP = PD$, $\angle ADP = 60^\circ$, 即 $\angle ADC = 120^\circ$.
 又 $\because \angle APB = \angle APC + \angle BPC = 120^\circ$,
 $\therefore \angle ADC = \angle APB$,
 在 $\triangle APB$ 和 $\triangle ADC$ 中,

$$\begin{cases} \angle APB = \angle ADC \\ \angle ABP = \angle ACP, \\ AP = AD \end{cases}$$
 $\therefore \triangle APB \cong \triangle ADC$ (AAS),
 $\therefore BP = CD$,
 又 $\because PD = AP$,
 $\therefore CP = BP + AP$;

(3) 当点 P 为 $\widehat{AB}$ 的中点时, 四边形 $APBC$ 的面积最大.

理由如下, 如图 2, 过点 P 作 $PE \perp AB$, 垂足为 E .
 过点 C 作 $CF \perp AB$, 垂足为 F .

$$\because S_{\triangle APE} = \frac{1}{2} AB \cdot PE, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CF,$$

$$\therefore S_{\text{四边形} APBC} = \frac{1}{2} AB \cdot (PE + CF),$$

当点 P 为 $\widehat{AB}$ 的中点时, $PE + CF = PC$, PC 为 $\odot O$ 的直径,

$\therefore$ 此时四边形 $APBC$ 的面积最大.

又 $\because \odot O$ 的半径为 1,

$\therefore$ 其内接正三角形的边长 $AB = \sqrt{3}$,

$$\therefore S_{\text{四边形} APBC} = \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3} = \sqrt{3}.$$

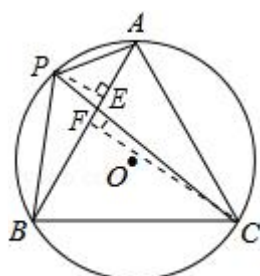


图2

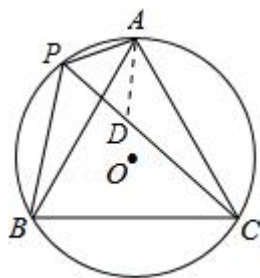


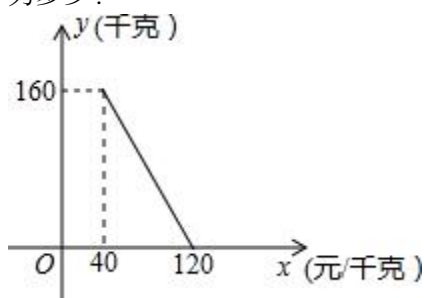
图1

点评: 本题考查了圆周角定理、等边三角形的判定、三角形的面积公式以及三角形的全等的判定与性质, 正确作出辅助线, 证明 $\triangle APB \cong \triangle ADC$ 是关键.

22. (10 分) (2015•德州) 某商店以 40 元/千克的单价新进一批茶叶, 经调查发现, 在一段时间内, 销售量 y (千克) 与销售单价 x (元/千克) 之间的函数关系如图所示.

(1) 根据图象求 y 与 x 的函数关系式;

(2) 商店想在销售成本不超过 3000 元的情况下, 使销售利润达到 2400 元, 销售单价应定为多少?



考点: 一次函数的应用; 一元二次方程的应用.

分析: (1) 根据图象可设 $y=kx+b$, 将 $(40, 160)$, $(120, 0)$ 代入, 得到关于 k 、 b 的二元一次方程组, 解方程组即可;

(2) 根据每千克的利润 $\times$ 销售量=2400 元列出方程, 解方程求出销售单价, 从而计算销售量, 进而求出销售成本, 与 3000 元比较即可得出结论.

解答: 解: (1) 设 y 与 x 的函数关系式为 $y=kx+b$,

将 $(40, 160)$, $(120, 0)$ 代入,

$$\text{得} \begin{cases} 40k+b=160 \\ 120k+b=0 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} k=-2 \\ b=240 \end{cases},$$

所以 y 与 x 的函数关系式为 $y=-2x+240$ ($40 \leq x \leq 120$);

(2) 由题意得 $(x-40)(-2x+240)=2400$,

整理得, $x^2-160x+6000=0$,

解得 $x_1=60$, $x_2=100$.

当 $x=60$ 时, 销售单价为 60 元, 销售量为 120 千克, 则成本价为 $40 \times 120=4800$ (元), 超过了 3000 元, 不合题意, 舍去;

当 $x=100$ 时, 销售单价为 100 元, 销售量为 40 千克, 则成本价为 $40 \times 40=1600$ (元), 低于 3000 元, 符合题意.

所以销售单价为 100 元.

答: 销售单价应定为 100 元.

点评: 本题考查了一次函数的应用以及一元二次方程的应用, 利用待定系数法求出 y 与 x 的函数关系式是解题的关键.

23. (10 分) (2015•德州) (1) 问题

如图 1, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 为 AB 上一点, $\angle DPC=\angle A=\angle B=90^\circ$, 求证: $AD \cdot BC=AP \cdot BP$.

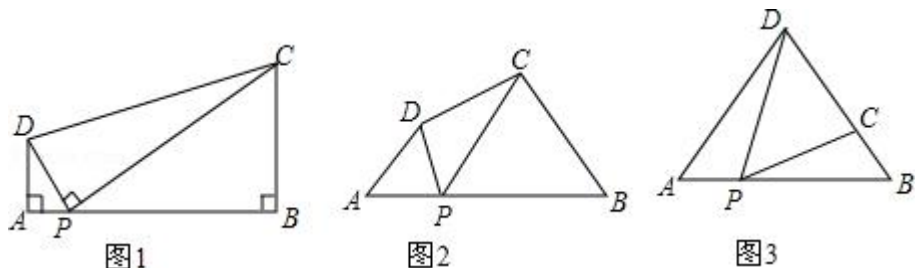
(2) 探究

如图 2, 在四边形 $ABCD$ 中, 点 P 为 AB 上一点, 当 $\angle DPC=\angle A=\angle B=\theta$ 时, 上述结论是否依然成立? 说明理由.

(3) 应用

请利用 (1) (2) 获得的经验解决问题:

如图 3, 在 $\triangle ABD$ 中, $AB=6$, $AD=BD=5$, 点 P 以每秒 1 个单位长度的速度, 由点 A 出了, 沿边 AB 向点 B 运动, 且满足 $\angle DPC=\angle A$, 设点 P 的运动时间为 t (秒), 当以 D 为圆心, 以 DC 为半径的圆与 AB 相切时, 求 t 的值.



考点: 相似形综合题; 切线的性质.

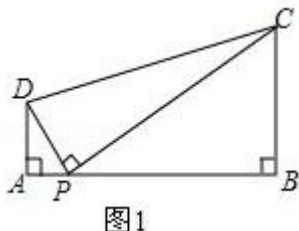
专题: 探究型.

分析: (1) 如图 1, 由 $\angle DPC=\angle A=\angle B=90^\circ$ 可得 $\angle ADP=\angle BPC$, 即可证到 $\triangle ADP \sim \triangle BPC$, 然后运用相似三角形的性质即可解决问题;

(2) 如图 2, 由 $\angle DPC=\angle A=\angle B=\theta$ 可得 $\angle ADP=\angle BPC$, 即可证到 $\triangle ADP \sim \triangle BPC$, 然后运用相似三角形的性质即可解决问题;

(3) 如图 3, 过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E , 根据等腰三角形的性质可得 $AE=BE=3$, 根据勾股定理可得 $DE=4$, 由题可得 $DC=DE=4$, 则有 $BC=5-4=1$. 易证 $\angle DPC=\angle A=\angle B$. 根据 $AD \cdot BC=AP \cdot BP$, 就可求出 t 的值.

解答: 解: (1) 如图 1,



$$\begin{aligned} &\because \angle DPC=\angle A=\angle B=90^\circ, \\ &\therefore \angle ADP+\angle APD=90^\circ, \\ &\angle BPC+\angle APD=90^\circ, \\ &\therefore \angle ADP=\angle BPC, \\ &\therefore \triangle ADP \sim \triangle BPC, \\ &\therefore \frac{AD}{BP}=\frac{AP}{BC}, \\ &\therefore AD \cdot BC=AP \cdot BP; \end{aligned}$$

(2) 结论 $AD \cdot BC=AP \cdot BP$ 仍然成立.

理由: 如图 2,

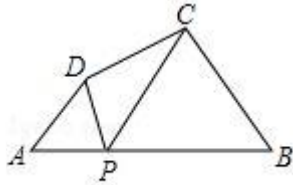


图2

$$\begin{aligned}
 &\because \angle BPD = \angle DPC + \angle BPC, \quad \angle BPD = \angle A + \angle ADP, \\
 &\therefore \angle DPC + \angle BPC = \angle A + \angle ADP. \\
 &\because \angle DPC = \angle A = \angle B = \theta, \\
 &\therefore \angle BPC = \angle ADP, \\
 &\therefore \triangle ADP \sim \triangle BPC, \\
 &\therefore \frac{AD}{BP} = \frac{AP}{BC}, \\
 &\therefore AD \cdot BC = AP \cdot BP;
 \end{aligned}$$

(3) 如图 3,

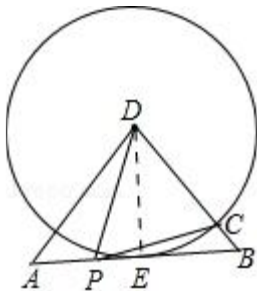


图3

$$\begin{aligned}
 &\text{过点 } D \text{ 作 } DE \perp AB \text{ 于点 } E. \\
 &\because AD = BD = 5, \quad AB = 6, \\
 &\therefore AE = BE = 3. \\
 &\text{由勾股定理可得 } DE = 4. \\
 &\because \text{以点 } D \text{ 为圆心, } DC \text{ 为半径的圆与 } AB \text{ 相切,} \\
 &\therefore DC = DE = 4, \\
 &\therefore BC = 5 - 4 = 1. \\
 &\text{又 } \because AD = BD, \\
 &\therefore \angle A = \angle B, \\
 &\therefore \angle DPC = \angle A = \angle B. \\
 &\text{由 (1)、(2) 的经验可知 } AD \cdot BC = AP \cdot BP, \\
 &\therefore 5 \times 1 = t(6 - t), \\
 &\text{解得: } t_1 = 1, \quad t_2 = 5, \\
 &\therefore t \text{ 的值为 } 1 \text{ 秒或 } 5 \text{ 秒.}
 \end{aligned}$$

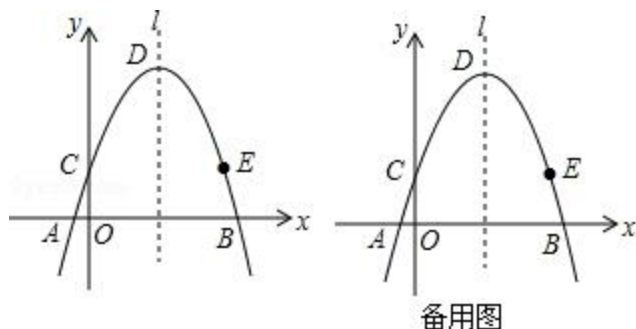
点评: 本题是对 K 型相似模型的探究和应用, 考查了相似三角形的判定与性质、切线的性质、等腰三角形的性质、勾股定理、等角的余角相等、三角形外角的性质、解一元二次方程等知识, 以及运用已有经验解决问题的能力, 渗透了特殊到一般的思想.

24. (12分) (2015•德州) 已知抛物线 $y = -mx^2 + 4x + 2m$ 与 x 轴交于点 $A(\alpha, 0)$, $B(\beta, 0)$, 且 $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -2$,

(1) 求抛物线的解析式.

(2) 抛物线的对称轴为 l , 与 y 轴的交点为 C , 顶点为 D , 点 C 关于 l 的对称点为 E , 是否存在 x 轴上的点 M , y 轴上的点 N , 使四边形 $DNME$ 的周长最小? 若存在, 请画出图形 (保留作图痕迹), 并求出周长的最小值; 若不存在, 请说明理由.

(3) 若点 P 在抛物线上, 点 Q 在 x 轴上, 当以点 D 、 E 、 P 、 Q 为顶点的四边形是平行四边形时, 求点 P 的坐标.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 利用根与系数的关系得出 $\alpha + \beta = \frac{4}{m}$, $\alpha\beta = -2$, 进而代入求出 m 的值即可得出答案;

(2) 利用轴对称求最短路线的方法, 作点 D 关于 y 轴的对称点 D' , 点 E 关于 x 轴的对称点 E' , 得出四边形 $DNME$ 的周长最小为: $D'E' + DE$, 进而利用勾股定理求出即可;

(3) 利用平行四边形的判定与性质结合 P 点纵坐标为 ± 4 , 进而分别求出即可.

解答: 解: (1) 由题意可得: α, β 是方程 $-mx^2 + 4x + 2m = 0$ 的两根, 由根与系数的关系可得,

$$\alpha + \beta = \frac{4}{m}, \quad \alpha\beta = -2,$$

$$\therefore \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = -2,$$

$$\therefore \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = -2, \quad \text{即} \quad \frac{\frac{4}{m}}{-2} = -2,$$

解得: $m = 1$,

故抛物线解析式为: $y = -x^2 + 4x + 2$;

(2) 存在 x 轴上的点 M , y 轴上的点 N , 使得四边形 $DNME$ 的周长最小,

$$\because y = -x^2 + 4x + 2 = -(x - 2)^2 + 6,$$

$\therefore$ 抛物线的对称轴 l 为 $x = 2$, 顶点 D 的坐标为: $(2, 6)$,

又 $\because$ 抛物线与 y 轴交点 C 的坐标为: $(0, 2)$, 点 E 与点 C 关于 l 对称,

$\therefore E$ 点坐标为: $(4, 2)$,

作点 D 关于 y 轴的对称点 D' , 点 E 关于 x 轴的对称点 E' ,

则 D' 的坐标为: $(-2, 6)$, E' 坐标为: $(4, -2)$,

连接 $D'E'$ ，交 x 轴于 M ，交 y 轴于 N ，
 此时，四边形 $DNME$ 的周长最小为： $D'E'+DE$ ，如图 1 所示：
 延长 $E'E$ ，'D 交于一点 F ，在 $Rt\triangle D'E'F$ 中， $D'F=6$ ， $E'F=8$ ，
 则 $D'E'=\sqrt{D'F^2+E'F^2}=\sqrt{6^2+8^2}=10$ ，
 设对称轴 l 与 CE 交于点 G ，在 $Rt\triangle DGE$ 中， $DG=4$ ， $EG=2$ ，
 $\therefore DE=\sqrt{DG^2+EG^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ ，
 $\therefore$ 四边形 $DNME$ 的周长最小值为： $10+2\sqrt{5}$ ；

(3) 如图 2， P 为抛物线上的点，过点 P 作 $PH\perp x$ 轴，垂足为 H ，
 若以点 D 、 E 、 P 、 Q 为顶点的四边形为平行四边形，则 $\triangle PHQ\cong\triangle DGE$ ，
 $\therefore PH=DG=4$ ，
 $\therefore |y|=4$ ，
 $\therefore$ 当 $y=4$ 时， $-x^2+4x+2=4$ ，
 解得： $x_1=2+\sqrt{2}$ ， $x_2=2-\sqrt{2}$ ，
 当 $y=-4$ 时， $-x^2+4x+2=-4$ ，
 解得： $x_3=2+\sqrt{10}$ ， $x_4=2-\sqrt{10}$ ，
 故 P 点的坐标为： $(2-\sqrt{2}, 4)$ ， $(2+\sqrt{2}, 4)$ ， $(2-\sqrt{10}, -4)$ ， $(2+\sqrt{10}, -4)$ 。

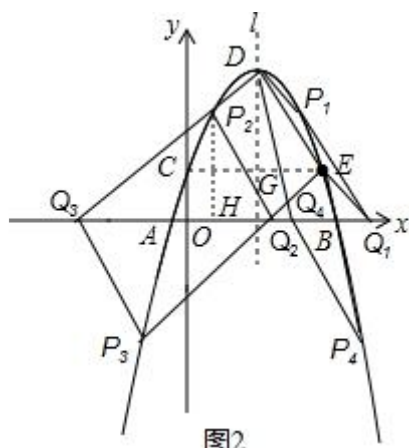


图2

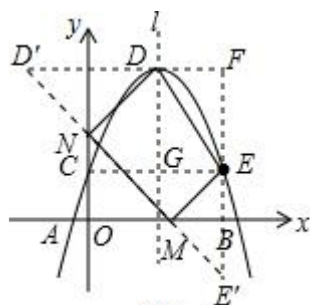


图1

点评：此题主要考查了平行四边形的性质以及勾股定理、利用轴对称求最短路线等知识，利用数形结合以及分类讨论得出 P 点坐标是解题关键。