

2014 年山东省莱芜市中考数学试卷

一、选择题（本题共 12 小题，每小题选对得 3 分，选错、不选或选出的答案超过一个均记零分，共 36 分）

1. (3 分) (2014•莱芜) 下列四个实数中，是无理数的为 ()

- A. 0 B. -3 C. $\sqrt{8}$ D. $\frac{3}{11}$

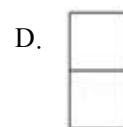
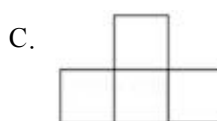
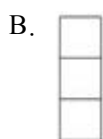
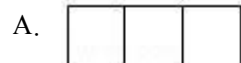
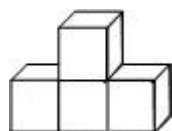
2. (3 分) (2014•莱芜) 下面计算正确的是 ()

- A. $3a - 2a = 1$ B. $3a^2 + 2a = 5a^3$ C. $(2ab)^3 = 6a^3b^3$ D. $-a^4 \cdot a^4 = -a^8$

3. (3 分) (2014•莱芜) 2014 年 4 月 25 日青岛世界园艺博览会成功开幕，预计将接待 1500 万人前来观赏，将 1500 万用科学记数法表示为 ()

- A. 15×10^5 B. 1.5×10^6 C. 1.5×10^7 D. 0.15×10^8

4. (3 分) (2014•莱芜) 如图是由 4 个相同的小正方形搭成的一个几何体，则它的俯视图是 ()



5. (3 分) (2014•莱芜) 对参加某次野外训练的中学生的年龄（单位：岁）进行统计，结果如表：

年龄	13	14	15	16	17	18
人数	4	5	6	6	7	2

则这些学生年龄的众数和中位数分别是 ()

- A. 17, 15.5 B. 17, 16 C. 15, 15.5 D. 16, 16

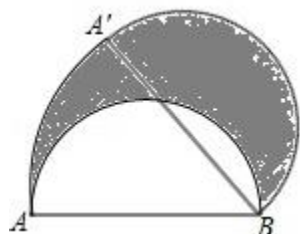
6. (3 分) (2014•莱芜) 若一个正 n 边形的每个内角为 156° ，则这个正 n 边形的边数是 ()

- A. 13 B. 14 C. 15 D. 16

7. (3 分) (2014•莱芜) 已知 A、C 两地相距 40 千米，B、C 两地相距 50 千米，甲乙两车分别从 A、B 两地同时出发到 C 地。若乙车每小时比甲车多行驶 12 千米，则两车同时到达 C 地。设乙车的速度为 x 千米/小时，依题意列方程正确的是 ()

- A. $\frac{40}{x} = \frac{50}{x-12}$ B. $\frac{40}{x-12} = \frac{50}{x}$ C. $\frac{40}{x} = \frac{50}{x+12}$ D. $\frac{40}{x+12} = \frac{50}{x}$

8. (3分) (2014•莱芜) 如图, AB 为半圆的直径, 且 AB=4, 半圆绕点 B 顺时针旋转 45° , 点 A 旋转到 A' 的位置, 则图中阴影部分的面积为 ()

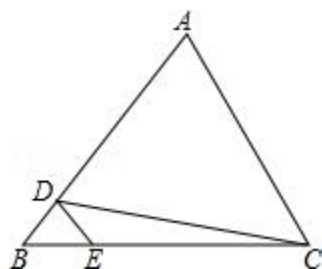


- A. π B. 2π C. $\frac{\pi}{2}$ D. 4π

9. (3分) (2014•莱芜) 一个圆锥的侧面展开图是半径为 R 的半圆, 则该圆锥的高是 ()

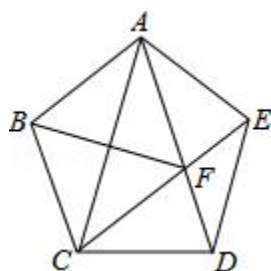
- A. R B. $\frac{1}{2}R$ C. $\sqrt{3}R$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

10. (3分) (2014•莱芜) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D、E 分别是 AB、BC 上的点, 且 $DE \parallel AC$, 若 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = 1 : 4$, 则 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle ACD} =$ ()



- A. 1: 16 B. 1: 18 C. 1: 20 D. 1: 24

11. (3分) (2014•莱芜) 如图, 在正五边形 ABCDE 中, 连接 AC、AD、CE, CE 交 AD 于点 F, 连接 BF, 下列说法不正确的是 ()

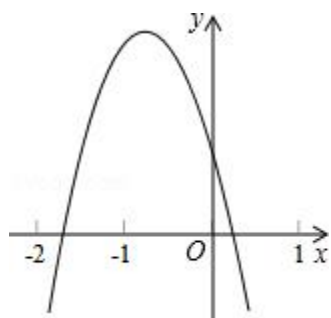


- A. $\triangle CDF$ 的周长等于 $AD+CD$ B. FC 平分 $\angle BFD$
C. $AC^2 + BF^2 = 4CD^2$ D. $DE^2 = EF \cdot CE$

12. (3分) (2014•莱芜) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图象如图所示. 下列结论:

- ① $abc > 0$; ② $2a - b < 0$; ③ $4a - 2b + c < 0$; ④ $(a+c)^2 < b^2$

其中正确的个数有 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题 (本题包括 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

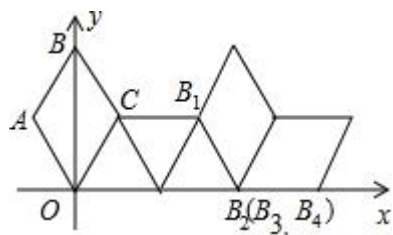
13. (4 分) (2014•莱芜) 分解因式: $a^3 - 4ab^2 =$ _____.

14. (4 分) (2014•莱芜) 计算: $|3 - 2\sqrt{3}| + (\pi - 2014)^0 + (\frac{1}{2})^{-1} =$ _____.

15. (4 分) (2014•莱芜) 若关于 x 的方程 $x^2 + (k - 2)x + k^2 = 0$ 的两根互为倒数, 则 $k =$ _____.

16. (4 分) (2014•莱芜) 已知一次函数 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象相交于 A (4, 2)、B (-2, m) 两点, 则一次函数的表达式为_____.

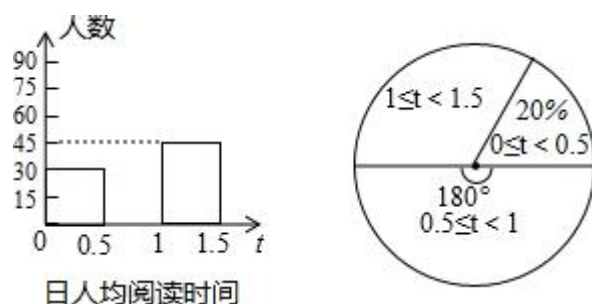
17. (4 分) (2014•莱芜) 如图在坐标系中放置一菱形 OABC, 已知 $\angle ABC = 60^\circ$, $OA = 1$. 先将菱形 OABC 沿 x 轴的正方向无滑动翻转, 每次翻转 60° , 连续翻转 2014 次, 点 B 的落点依次为 $B_1, B_2, B_3, \dots$, 则 B_{2014} 的坐标为_____.



三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 64 分, 解答要写出必要的文字说明, 证明过程或推演步骤)

18. (6 分) (2014•莱芜) 先化简, 再求值: $(a+1 - \frac{4a-5}{a-1}) \div (\frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-a})$, 其中 $a = -1$.

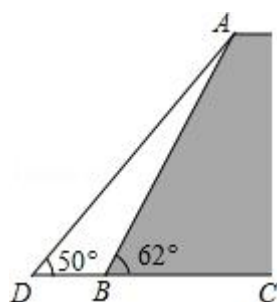
19. (8分) (2014•莱芜) 在某市开展的“读中华经典，做书香少年”读书月活动中，围绕学生日人均阅读时间这一问题，对初二学生进行随机抽样调查. 如图是根据调查结果绘制成的统计图 (不完整)，请你根据图中提供的信息解答下列问题：



- (1) 本次抽样调查的样本容量是多少？
- (2) 请将条形统计图补充完整.
- (3) 在扇形统计图中，计算出日人均阅读时间在 1 ~ 1.5 小时对应的圆心角度数.
- (4) 根据本次抽样调查，试估计该市 12000 名初二学生中日人均阅读时间在 0.5 ~ 1.5 小时的多少人.

20. (9分) (2014•莱芜) 如图，一堤坝的坡角 $\angle ABC = 62^\circ$ ，坡面长度 $AB = 25$ 米 (图为横截面)，为了使堤坝更加牢固，一施工队欲改变堤坝的坡面，使得坡面的坡角 $\angle ADB = 50^\circ$ ，则此时应将坝底向外拓宽多少米？ (结果保留到 0.01 米)

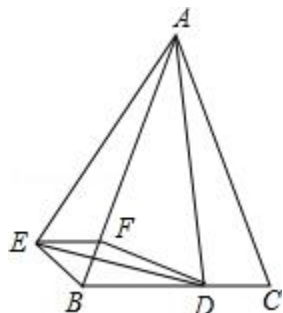
(参考数据: $\sin 62^\circ \approx 0.88$, $\cos 62^\circ \approx 0.47$, $\tan 50^\circ \approx 1.20$)



21. (9分) (2014•莱芜) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形, 顶角 $\angle BAC=\alpha$ ($\alpha < 60^\circ$), D 是 BC 边上的一点, 连接 AD , 线段 AD 绕点 A 顺时针旋转 α 到 AE , 过点 E 作 BC 的平行线, 交 AB 于点 F , 连接 DE , BE , DF .

(1) 求证: $BE=CD$;

(2) 若 $AD \perp BC$, 试判断四边形 $BDFE$ 的形状, 并给出证明.



22. (10分) (2014•莱芜) 某市为打造“绿色城市”, 积极投入资金进行河道治污与园林绿化两项工程. 已知2013年投资1000万元, 预计2015年投资1210万元. 若这两年内平均每年投资增长的百分率相同.

(1) 求平均每年投资增长的百分率;

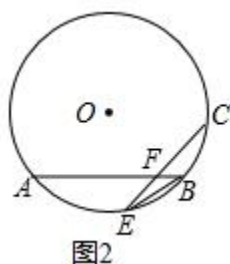
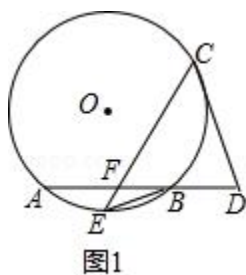
(2) 已知河道治污每平方需投入400元, 园林绿化每平方米需投入200元, 若要求2015年河道治污及园林绿化总面积不少于35000平方米, 且河道治污费用不少于园林绿化费用的4倍, 那么园林绿化的费用应在什么范围内?

23. (10分) (2014•莱芜) 如图1, 在 $\odot O$ 中, E 是弧 AB 的中点, C 为 $\odot O$ 上的一动点 (C 与 E 在 AB 异侧), 连接 EC 交 AB 于点 F , $EB=\frac{2}{3}r$ (r 是 $\odot O$ 的半径).

(1) D 为 AB 延长线上一点, 若 $DC=DF$, 证明: 直线 DC 与 $\odot O$ 相切;

(2) 求 $EF \cdot EC$ 的值;

(3) 如图2, 当 F 是 AB 的四等分点时, 求 EC 的值.

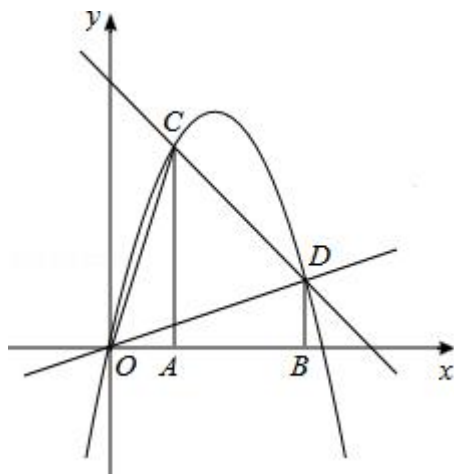


24. (12 分) (2014·莱芜) 如图, 过 $A(1, 0)$ 、 $B(3, 0)$ 作 x 轴的垂线, 分别交直线 $y=4-x$ 于 C 、 D 两点. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 O 、 C 、 D 三点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 M 为直线 OD 上的一个动点, 过 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N , 问是否存在这样的点 M , 使得以 A 、 C 、 M 、 N 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 求此时点 M 的横坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若 $\triangle AOC$ 沿 CD 方向平移 (点 C 在线段 CD 上, 且不与点 D 重合), 在平移的过程中 $\triangle AOC$ 与 $\triangle OBD$ 重叠部分的面积记为 S , 试求 S 的最大值.



2014 年山东省莱芜市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本题共 12 小题，每小题选对得 3 分，选错、不选或选出的答案超过一个均记零分，共 36 分）

1. (3 分) (2014•莱芜) 下列四个实数中，是无理数的为 ()

- A. 0 B. -3 C. $\sqrt{8}$ D. $\frac{3}{11}$

考点: 无理数.

分析: 无理数就是无限不循环小数. 理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称. 即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数. 由此即可判定选择项.

解答: 解: A、0 是整数，是有理数，选项错误;

B、-3 是整数，是有理数，选项错误;

C、 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 是无理数正确;

D、 $\frac{3}{11}$ 是无限循环小数，是有理数，选项错误.

故选: C.

点评: 此题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有: π , 2π 等; 开方开不尽的数; 以及像 0.1010010001..., 等有这样规律的数.

2. (3 分) (2014•莱芜) 下面计算正确的是 ()

- A. $3a - 2a = 1$ B. $3a^2 + 2a = 5a^3$ C. $(2ab)^3 = 6a^3b^3$ D. $-a^4 \cdot a^4 = -a^8$

考点: 幂的乘方与积的乘方; 合并同类项; 同底数幂的乘法.

分析: 分别进行合并同类项、积的乘方和幂的乘方等运算，然后选择正确答案.

解答: 解: A、 $3a - 2a = a$ ，原式计算错误，故本选项错误;

B、 $3a^2$ 和 $2a$ 不是同类项，不能合并，故本选项错误;

C、 $(2ab)^3 = 8a^3b^3$ ，原式计算错误，故本选项错误;

D、 $-a^4 \cdot a^4 = -a^8$ ，计算正确，故本选项正确.

故选 D.

点评: 本题考查了合并同类项、积的乘方和幂的乘方等知识，掌握运算法则是解答本题的关键.

3. (3 分) (2014•莱芜) 2014 年 4 月 25 日青岛世界园艺博览会成功开幕，预计将接待 1500 万人前来观赏，将 1500 万用科学记数法表示为 ()

- A. 15×10^5 B. 1.5×10^6 C. 1.5×10^7 D. 0.15×10^8

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当

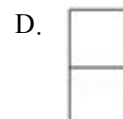
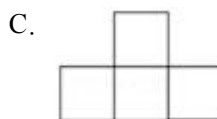
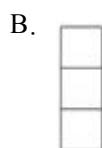
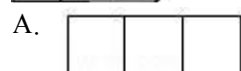
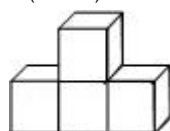
原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: 将 1500 万用科学记数法表示为: 1.5×10^7 .

故选: C.

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. (3 分) (2014•莱芜) 如图是由 4 个相同的小正方形搭成的一个几何体, 则它的俯视图是 ()



考点: 简单组合体的三视图.

分析: 根据俯视图是从上面看到的图形判定即可.

解答: 解: 从上面可看到从左往右有三个正方形,
故选 A.

点评: 本题考查了三视图的知识, 俯视图是从物体的上面看得到的视图.

5. (3 分) (2014•莱芜) 对参加某次野外训练的中学生的年龄 (单位: 岁) 进行统计, 结果如表:

年龄	13	14	15	16	17	18
人数	4	5	6	6	7	2

则这些学生年龄的众数和中位数分别是 ()

A. 17, 15.5

B. 17, 16

C. 15, 15.5

D. 16, 16

考点: 众数; 中位数.

分析: 出现次数最多的那个数, 称为这组数据的众数; 中位数一定要先排好顺序, 然后再根据奇数和偶数个来确定中位数, 如果数据有奇数个, 则正中间的数字即为所求, 如果是偶数个则找中间两位数的平均数.

解答: 解: 17 出现的次数最多, 17 是众数.

第 15 和第 16 个数分别是 15、16, 所以中位数为 16.5.

故选 A.

点评: 本题考查了众数及中位数的知识, 掌握各部分的概念是解题关键.

6. (3 分) (2014•莱芜) 若一个正 n 边形的每个内角为 156° , 则这个正 n 边形的边数是 ()

A. 13

B. 14

C. 15

D. 16

考点: 多边形内角与外角.

分析: 由一个正多边形的每个内角都为 156° , 可求得其外角的度数, 继而可求得此多边形的边数, 则可求得答案.

解答: 解: $\because$ 一个正多边形的每个内角都为 156° ,
 $\therefore$ 这个正多边形的每个外角都为: $180^\circ - 156^\circ = 24^\circ$,
 $\therefore$ 这个多边形的边数为: $360^\circ \div 24^\circ = 15$,
 故选 C.

点评: 此题考查了多边形的内角和与外角和的知识. 此题难度不大, 注意掌握多边形的外角和定理是关键.

7. (3 分) (2014•莱芜) 已知 A、C 两地相距 40 千米, B、C 两地相距 50 千米, 甲乙两车分别从 A、B 两地同时出发到 C 地. 若乙车每小时比甲车多行驶 12 千米, 则两车同时到达 C 地. 设乙车的速度为 x 千米/小时, 依题意列方程正确的是 ()

- A. $\frac{40}{x} = \frac{50}{x-12}$ B. $\frac{40}{x-12} = \frac{50}{x}$ C. $\frac{40}{x} = \frac{50}{x+12}$ D. $\frac{40}{x+12} = \frac{50}{x}$

考点: 由实际问题抽象出分式方程.

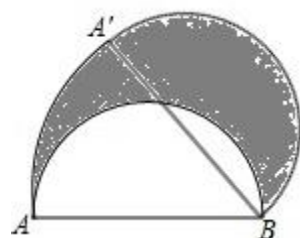
分析: 设乙车的速度为 x 千米/小时, 则甲车的速度为 $(x-12)$ 千米/小时, 根据用相同的时间甲走 40 千米, 乙走 50 千米, 列出方程.

解答: 解: 设乙车的速度为 x 千米/小时, 则甲车的速度为 $(x-12)$ 千米/小时,
 由题意得, $\frac{50}{x} = \frac{40}{x-12}$.

故选 B.

点评: 本题考查了由实际问题抽象出分式方程, 解答本题的关键是读懂题意, 设出未知数, 找出合适的等量关系, 列出方程.

8. (3 分) (2014•莱芜) 如图, AB 为半圆的直径, 且 $AB=4$, 半圆绕点 B 顺时针旋转 45° , 点 A 旋转到 A' 的位置, 则图中阴影部分的面积为 ()



- A. π B. 2π C. $\frac{\pi}{2}$ D. 4π

考点: 扇形面积的计算; 旋转的性质.

分析: 根据题意可得出阴影部分的面积等于扇形 ABA' 的面积加上半圆面积再减去半圆面积, 即为扇形面积即可.

解答: 解: $\because S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形 } ABA'} + S_{\text{半圆}} - S_{\text{半圆}}$

$$= S_{\text{扇形 } ABA'} = \frac{45 \times \pi \times 4^2}{360}$$

$$= 2\pi,$$

故选 B.

点评: 本题考查了扇形面积的计算以及旋转的性质, 是基础知识, 难度不大.

9. (3 分) (2014•莱芜) 一个圆锥的侧面展开图是半径为 R 的半圆, 则该圆锥的高是 ()
- A. R B. $\frac{1}{2}R$ C. $\sqrt{3}R$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}R$

考点: 圆锥的计算.

分析: 根据侧面展开图的弧长等于圆锥的底面周长, 即可求得底面周长, 进而即可求得底面的半径长, 然后表示出圆锥的高即可.

解答: 解: 圆锥的底面周长是: πR ;
设圆锥的底面半径是 r , 则 $2\pi r = \pi R$.

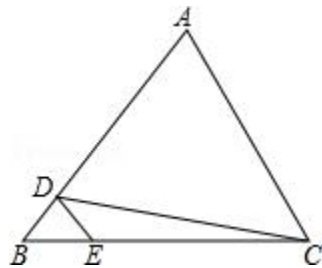
$$\text{解得: } r = \frac{1}{2}R.$$

$$\text{由勾股定理得到圆锥的高为 } \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}R\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

故选 D.

点评: 本题考查了圆锥的计算, 正确理解圆锥的侧面展开图与原来的扇形之间的关系是解决本题的关键, 理解圆锥的母线长是扇形的半径, 圆锥的底面圆周长是扇形的弧长.

10. (3 分) (2014•莱芜) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D 、 E 分别是 AB 、 BC 上的点, 且 $DE \parallel AC$, 若 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = 1 : 4$, 则 $S_{\triangle BDE} : S_{\triangle ACD} =$ ()



- A. 1: 16 B. 1: 18 C. 1: 20 D. 1: 24

考点: 相似三角形的判定与性质.

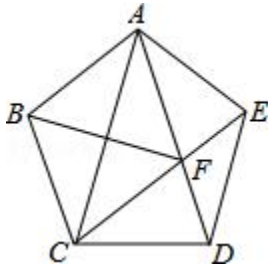
分析: 设 $\triangle BDE$ 的面积为 a , 表示出 $\triangle CDE$ 的面积为 $4a$, 根据等高的三角形的面积的比等于底边的比求出 $\frac{BE}{CE}$, 然后求出 $\triangle DBE$ 和 $\triangle ABC$ 相似, 根据相似三角形面积的比等于相似比的平方求出 $\triangle ABC$ 的面积, 然后表示出 $\triangle ACD$ 的面积, 再求出比值即可.

解答: 解: $\because S_{\triangle BDE} : S_{\triangle CDE} = 1 : 4$,
 $\therefore$ 设 $\triangle BDE$ 的面积为 a , 则 $\triangle CDE$ 的面积为 $4a$,
 $\because \triangle BDE$ 和 $\triangle CDE$ 的点 D 到 BC 的距离相等,
 $\therefore \frac{BE}{CE} = \frac{1}{4}$,
 $\therefore \frac{BE}{BC} = \frac{1}{5}$,
 $\because DE \parallel AC$,
 $\therefore \triangle DBE \sim \triangle ABC$,
 $\therefore S_{\triangle DBE} : S_{\triangle ABC} = 1 : 25$,

$\therefore S_{\triangle ACD} = 25a - a - 4a = 20a$,
 $\therefore S_{\triangle BDE} : S_{\triangle ACD} = a : 20a = 1 : 20$.
 故选 C.

点评: 本题考查了相似三角形的判定与性质, 等高的三角形的面积的比等于底边的比, 熟记相似三角形面积的比等于相似比的平方用 $\triangle BDE$ 的面积表示出 $\triangle ABC$ 的面积是解题的关键.

11. (3 分) (2014•莱芜) 如图, 在正五边形 ABCDE 中, 连接 AC、AD、CE, CE 交 AD 于点 F, 连接 BF, 下列说法不正确的是 ()



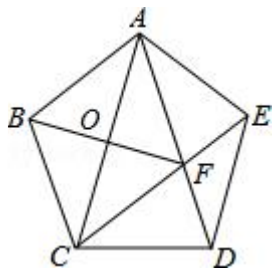
- A. $\triangle CDF$ 的周长等于 $AD+CD$ B. FC 平分 $\angle BFD$
 C. $AC^2+BF^2=4CD^2$ D. $DE^2=EF \cdot CE$

考点: 正多边形和圆.

分析: 首先由正五边形的性质可得 $AB=BC=CD=DE=AE$, $BA \parallel CE$, $AD \parallel BC$, $AC \parallel DE$, $AC=AD=CE$, 根据有一组邻边相等的平行四边形是菱形即可证得四边形 ABCF 为菱形, 得 $CF=AF$, 即 $\triangle CDF$ 的周长等于 $AD+CD$, 由菱形的性质和勾股定理得出 $AC^2+BF^2=4CD^2$, 可证明 $\triangle CDE \sim \triangle DFE$, 即可得出 $DE^2=EF \cdot CE$.

解答: 解: $\because$ 五边形 ABCDE 是正五边形,
 $\therefore AB=BC=CD=DE=AE$, $BA \parallel CE$, $AD \parallel BC$, $AC \parallel DE$, $AC=AD=CE$,
 $\therefore$ 四边形 ABCF 是菱形,
 $\therefore CF=AF$,
 $\therefore \triangle CDF$ 的周长等于 $CF+DF+CD$,
 即 $\triangle CDF$ 的周长等于 $AD+CD$,
 故 A 说法正确;
 $\because$ 四边形 ABCF 是菱形,
 $\therefore AC \perp BF$,
 设 AC 与 BF 交于点 O,
 由勾股定理得 $OB^2+OC^2=BC^2$,
 $\therefore AC^2+BF^2 = (2OC)^2 + (2OB)^2 = 4OC^2+4OB^2 = 4BC^2$,
 $\therefore AC^2+BF^2=4CD^2$.
 故 C 说法正确;
 由正五边形的性质得, $\triangle ADE \cong \triangle CDE$,
 $\therefore \angle DCE = \angle EDF$,
 $\therefore \triangle CDE \sim \triangle DFE$,
 $\therefore \frac{CE}{DE} = \frac{DE}{EF}$,
 $\therefore DE^2 = EF \cdot CE$,

故 C 说法正确；
 故选 B.

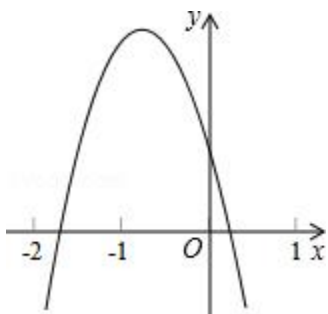


点评: 本题考查了正五边形的性质, 全等三角形的判定, 综合考察的知识点较多, 难度中等, 解答本题注意已经证明的结论, 可以直接拿来使用.

12. (3 分) (2014•莱芜) 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图所示. 下列结论:

① $abc > 0$; ② $2a - b < 0$; ③ $4a - 2b + c < 0$; ④ $(a+c)^2 < b^2$

其中正确的个数有 ()



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

考点: 二次函数图象与系数的关系.

专题: 数形结合.

分析: 由抛物线开口方向得 $a < 0$, 由抛物线对称轴在 y 轴的左侧得 a 、 b 同号, 即 $b < 0$, 由抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方得 $c > 0$, 所以 $abc > 0$; 根据抛物线对称轴的位置得到 $-1 < -\frac{b}{2a} < 0$, 则根据不等式性质即可得到 $2a - b < 0$; 由于 $x = -2$ 时, 对应的函数值小于 0, 则 $4a - 2b + c < 0$; 同样当 $x = -1$ 时, $a - b + c > 0$, $x = 1$ 时, $a + b + c < 0$, 则 $(a - b + c)(a + b + c) < 0$, 利用平方差公式展开得到 $(a + c)^2 - b^2 < 0$, 即 $(a + c)^2 < b^2$.

解答: 解: $\because$ 抛物线开口向下,

$\therefore a < 0$,

$\because$ 抛物线的对称轴在 y 轴的左侧,

$\therefore x = -\frac{b}{2a} < 0$,

$\therefore b < 0$,

$\because$ 抛物线与 y 轴的交点在 x 轴上方,

$\therefore c > 0$,

$\therefore abc > 0$, 所以①正确;

$$\therefore -1 < -\frac{b}{2a} < 0,$$

$\therefore 2a - b < 0$, 所以②正确;

$\therefore$ 当 $x = -2$ 时, $y < 0$,

$\therefore 4a - 2b + c < 0$, 所以③正确;

$\therefore$ 当 $x = -1$ 时, $y > 0$,

$\therefore a - b + c > 0$,

$\therefore$ 当 $x = 1$ 时, $y < 0$,

$\therefore a + b + c < 0$,

$\therefore (a - b + c)(a + b + c) < 0$, 即 $(a + c - b)(a + c + b) < 0$,

$\therefore (a + c)^2 - b^2 < 0$, 所以④正确.

故选 D.

点评: 本题考查了二次函数的图象与系数的关系: 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象为抛物线, 当 $a > 0$, 抛物线开口向上; 对称轴为直线 $x = -\frac{b}{2a}$; 抛物线与 y 轴的交点坐标为 $(0, c)$; 当 $b^2 - 4ac > 0$, 抛物线与 x 轴有两个交点; 当 $b^2 - 4ac = 0$, 抛物线与 x 轴有一个交点; 当 $b^2 - 4ac < 0$, 抛物线与 x 轴没有交点.

二、填空题 (本题包括 5 小题, 每小题 4 分, 共 20 分)

13. (4 分) (2014·莱芜) 分解因式: $a^3 - 4ab^2 = \underline{a(a+2b)(a-2b)}$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

分析: 观察原式 $a^3 - 4ab^2$, 找到公因式 a , 提出公因式后发现 $a^2 - 4b^2$ 符合平方差公式的形式, 再利用平方差公式继续分解因式.

解答: 解: $a^3 - 4ab^2$
 $= a(a^2 - 4b^2)$
 $= a(a + 2b)(a - 2b)$.

故答案为: $a(a + 2b)(a - 2b)$.

点评: 本题考查了提公因式法与公式法分解因式, 有公因式的首先提取公因式, 最后一定要分解到各个因式不能再分解为止.

14. (4 分) (2014·莱芜) 计算: $|3 - 2\sqrt{3}| + (\pi - 2014)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \underline{2\sqrt{3}}$.

考点: 实数的运算; 零指数幂; 负整数指数幂.

分析: 本题涉及零指数幂、绝对值、负指数幂等考点. 针对每个考点分别进行计算, 然后根据实数的运算法则求得计算结果.

解答: 解: 原式 $= 2\sqrt{3} - 3 + 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}$

$$= 2\sqrt{3} - 3 + 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{3} - 3 + 1 + 2$$

$$=2\sqrt{3}.$$

故答案为 $2\sqrt{3}$.

点评: 本题考查实数的综合运算能力, 是各地中考题中常见的计算题型. 解决此类题目的关键是掌握零指数幂、绝对值、负指数幂等考点的运算.

15. (4 分) (2014•莱芜) 若关于 x 的方程 $x^2 + (k-2)x + k^2 = 0$ 的两根互为倒数, 则 $k = \underline{-1}$.

考点: 根与系数的关系.

分析: 根据已知和根与系数的关系 $x_1x_2 = -\frac{c}{a}$ 得出 $k^2 = 1$, 求出 k 的值, 再根据原方程有两个实数根, 求出符合题意的 k 的值.

解答: 解: $\because x_1x_2 = k^2$, 两根互为倒数,
 $\therefore k^2 = 1$,
 解得 $k = 1$ 或 -1 ;
 $\because$ 方程有两个实数根, $\Delta > 0$,
 $\therefore$ 当 $k = 1$ 时, $\Delta < 0$, 舍去,
 故 k 的值为 -1 .

点评: 本题考查了根与系数的关系, 根据 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的两个实数根, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = -\frac{c}{a}$ 进行求解.

16. (4 分) (2014•莱芜) 已知一次函数 $y = ax + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象相交于 A (4, 2)、B (-2, m) 两点, 则一次函数的表达式为 $\underline{y = x - 2}$.

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

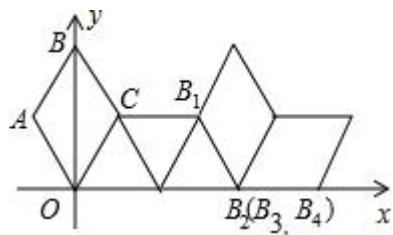
专题: 计算题.

分析: 先把 A 点坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 中求出 k , 得到反比例函数解析式为 $y = \frac{8}{x}$, 再利用反比例函数解析式确定 B 点坐标, 然后利用待定系数法求一次函数解析式.

解答: 解: 把 A (4, 2) 代入 $y = \frac{k}{x}$ 得 $k = 4 \times 2 = 8$,
 所以反比例函数解析式为 $y = \frac{8}{x}$,
 把 B (-2, m) 代入 $y = \frac{8}{x}$ 得 $-2m = 8$, 解得 $m = -4$,
 把 A (4, 2)、B (-2, -4) 代入 $y = ax + b$ 得 $\begin{cases} 4a + b = 2 \\ -2a + b = -4 \end{cases}$,
 解得 $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$,
 所以一次函数解析式为 $y = x - 2$.
 故答案为 $y = x - 2$.

点评: 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题: 反比例函数与一次函数图象的交点坐标满足两函数解析式. 也考查了待定系数法求函数解析式.

17. (4分) (2014•莱芜) 如图在坐标系中放置一菱形 $OABC$, 已知 $\angle ABC=60^\circ$, $OA=1$. 先将菱形 $OABC$ 沿 x 轴的正方向无滑动翻转, 每次翻转 60° , 连续翻转 2014 次, 点 B 的落点依次为 $B_1, B_2, B_3, \dots$, 则 B_{2014} 的坐标为 (1342, 0).



考点: 规律型: 点的坐标; 等边三角形的判定与性质; 菱形的性质.

专题: 规律型.

分析: 连接 AC , 根据条件可以求出 AC , 画出第 5 次、第 6 次、第 7 次翻转后的图形, 容易发现规律: 每翻转 6 次, 图形向右平移 4. 由于 $2014=335 \times 6+4$, 因此点 B_4 向右平移 1340 (即 335×4) 即可到达点 B_{2014} , 根据点 B_4 的坐标就可求出点 B_{2014} 的坐标.

解答: 解: 连接 AC , 如图所示.

$\because$ 四边形 $OABC$ 是菱形,

$\therefore OA=AB=BC=OC$.

$\because \angle ABC=90^\circ$,

$\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

$\therefore AC=AB$.

$\therefore AC=OA$.

$\because OA=1$,

$\therefore AC=1$.

画出第 5 次、第 6 次、第 7 次翻转后的图形, 如图所示.

由图可知: 每翻转 6 次, 图形向右平移 4.

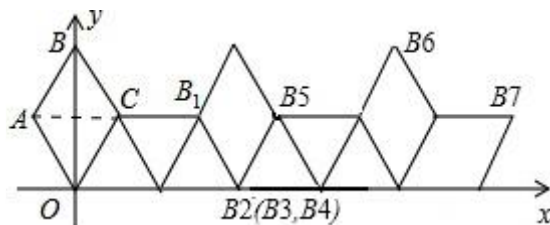
$\because 2014=335 \times 6+4$,

$\therefore$ 点 B_4 向右平移 1340 (即 335×4) 到点 B_{2014} .

$\because B_4$ 的坐标为 $(2, 0)$,

$\therefore B_{2014}$ 的坐标为 $(2+1340, 0)$,

$\therefore B_{2014}$ 的坐标为 $(1342, 0)$.



点评: 本题考查了菱形的性质、等边三角形的判定与性质等知识, 考查了操作、探究、发现规律的能力. 发现“每翻转 6 次, 图形向右平移 4”是解决本题的关键.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 64 分, 解答要写出必要的文字说明, 证明过程或推演步骤)

18. (6分) (2014•莱芜) 先化简, 再求值: $(a+1 - \frac{4a-5}{a-1}) \div (\frac{1}{a-1} - \frac{2}{a^2-a})$, 其中 $a = -1$.

考点: 分式的化简求值.

专题: 计算题.

分析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分得到最简结果, 将 a 的值代入计算即可求出值.

解答: 解: 原式 = $\frac{(a+1)(a-1) - 4a + 5}{a-1} \div \frac{a-2}{a(a-1)}$

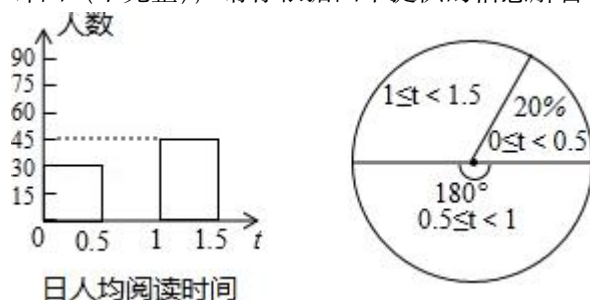
$$= \frac{(a-2)^2 \cdot a(a-1)}{a-1} \cdot \frac{a-2}{a(a-1)}$$

$$= a(a-2),$$

当 $a = -1$ 时, 原式 = $-1 \times (-3) = 3$.

点评: 此题考查了分式的化简求值, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

19. (8分) (2014•莱芜) 在某市开展的“读中华经典, 做书香少年”读书月活动中, 围绕学生日人均阅读时间这一问题, 对初二学生进行随机抽样调查. 如图是根据调查结果绘制成的统计图 (不完整), 请你根据图中提供的信息解答下列问题:



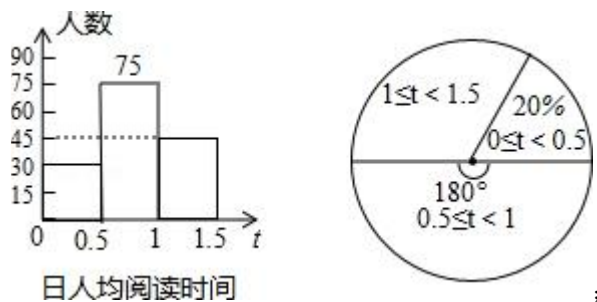
日人均阅读时间

- (1) 本次抽样调查的样本容量是多少?
- (2) 请将条形统计图补充完整.
- (3) 在扇形统计图中, 计算出日人均阅读时间在 1~1.5 小时对应的圆心角度数.
- (4) 根据本次抽样调查, 试估计该市 12000 名初二学生中日人均阅读时间在 0.5~1.5 小时的多少人.

考点: 条形统计图; 用样本估计总体; 扇形统计图.

分析: (1) 根据第一组的人数是 30, 占 20%, 即可求得总数, 即样本容量;
 (2) 利用总数减去另外两段的人数, 即可求得 0.5~1 小时的人数, 从而作出直方图;
 (3) 利用 360° 乘以日人均阅读时间在 1~1.5 小时的所占的比例;
 (4) 利用总人数 12000 乘以对应的比例即可.

解答: 解: (1) 样本容量是: $30 \div 20\% = 150$;
 (2) 日人均阅读时间在 0.5~1 小时的人数是: $150 - 30 - 45 = 75$.



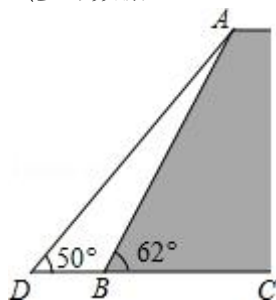
(3) 人均阅读时间在 1 ~ 1.5 小时对应的圆心角度数是: $360^\circ \times \frac{45}{150} = 108^\circ$;

(4) $12000 \times \frac{75}{150} = 6000$ (人).

点评: 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用, 读懂统计图, 从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据; 扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

20. (9 分) (2014•莱芜) 如图, 一堤坝的坡角 $\angle ABC = 62^\circ$, 坡面长度 $AB = 25$ 米 (图为横截面), 为了使堤坝更加牢固, 一施工队欲改变堤坝的坡面, 使得坡面的坡角 $\angle ADB = 50^\circ$, 则此时应将坝底向外拓宽多少米? (结果保留到 0.01 米)

(参考数据: $\sin 62^\circ \approx 0.88$, $\cos 62^\circ \approx 0.47$, $\tan 50^\circ \approx 1.20$)



考点: 解直角三角形的应用-坡度坡角问题.

分析: 过 A 点作 $AE \perp CD$ 于 E. 在 $Rt\triangle ABE$ 中, 根据三角函数可得 AE, BE, 在 $Rt\triangle ADE$ 中, 根据三角函数可得 DE, 再根据 $DB = DC - BE$ 即可求解.

解答: 解: 过 A 点作 $AE \perp CD$ 于 E.

在 $Rt\triangle ABE$ 中, $\angle ABE = 62^\circ$.

$\therefore AE = AB \cdot \sin 62^\circ = 25 \times 0.88 = 22$ 米,

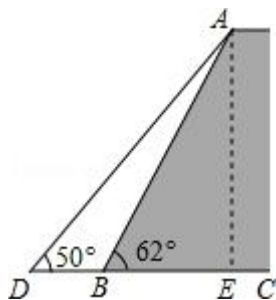
$BE = AB \cdot \cos 62^\circ = 25 \times 0.47 = 11.75$ 米,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $\angle ADB = 50^\circ$,

$\therefore DE = \frac{AE}{\tan 50^\circ} = 18\frac{1}{3}$ 米,

$\therefore DB = DE - BE \approx 6.58$ 米.

故此时应将坝底向外拓宽大约 6.58 米.

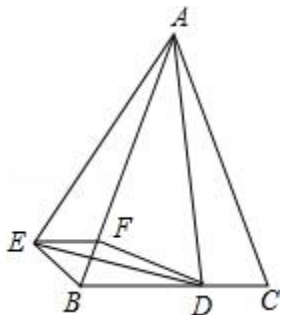


点评: 考查了解直角三角形的应用 – 坡度坡角问题，两个直角三角形有公共的直角边，先求出公共边的解决此类题目的基本出发点.

21. (9分) (2014•莱芜) 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形，顶角 $\angle BAC=\alpha$ ($\alpha < 60^\circ$)，D是BC边上的一点，连接AD，线段AD绕点A顺时针旋转 α 到AE，过点E作BC的平行线，交AB于点F，连接DE，BE，DF.

(1) 求证: $BE=CD$;

(2) 若 $AD \perp BC$ ，试判断四边形BDFE的形状，并给出证明.



考点: 全等三角形的判定与性质；菱形的判定；旋转的性质.

分析: (1) 根据旋转可得 $\angle BAE=\angle CAD$ ，从而SAS证明 $\triangle ACD \cong \triangle ABE$ ，得出答案 $BE=CD$;

(2) 由 $AD \perp BC$ ，SAS可得 $\triangle ACD \cong \triangle ABE \cong \triangle ABD$ ，得出 $BE=BD=CD$ ， $\angle EBF=\angle DBF$ ，再由 $EF \parallel BC$ ， $\angle DBF=\angle EFB$ ，从而得出 $\angle EBF=\angle EFB$ ，则 $EB=EF$ ，证明得出四边形BDFE为菱形.

解答: 证明: (1) $\because \triangle ABC$ 是等腰三角形，顶角 $\angle BAC=\alpha$ ($\alpha < 60^\circ$)，线段AD绕点A顺时针旋转 α 到AE，

$$\therefore AB=AC,$$

$$\therefore \angle BAE=\angle CAD,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases} AB=AC \\ \angle BAE=\angle CAD, \\ AE=AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABE \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BE=CD;$$

(2) $\because AD \perp BC$,

$$\therefore BD=CD,$$

$$\therefore BE=BD=CD, \angle BAD=\angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAE=\angle BAD,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ABE$ 中，

$$\begin{cases} AE=AD \\ \angle BAE=\angle BAD, \\ AB=AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ABE \text{ (SAS),}$$

$$\therefore \angle EBF = \angle DBF,$$

$$\therefore EF \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle EFB,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle EFB,$$

$$\therefore EB = EF,$$

$$\therefore BD = BE = EF = FD,$$

$$\therefore \text{四边形 BDFE 为菱形.}$$

点评: 本题考查了全等三角形的判定和性质以及菱形的判定、旋转的性质.

22. (10 分) (2014·莱芜) 某市为打造“绿色城市”, 积极投入资金进行河道治污与园林绿化两项工程. 已知 2013 年投资 1000 万元, 预计 2015 年投资 1210 万元. 若这两年内平均每年投资增长的百分率相同.

(1) 求平均每年投资增长的百分率;

(2) 已知河道治污每平方需投入 400 元, 园林绿化每平方米需投入 200 元, 若要求 2015 年河道治污及园林绿化总面积不少于 35000 平方米, 且河道治污费用不少于园林绿化费用的 4 倍, 那么园林绿化的费用应在什么范围内?

考点: 一元二次方程的应用; 一元一次不等式组的应用.

分析: (1) 设平均每年投资增长的百分率是 x . 根据 2013 年投资 1000 万元, 得出 2014 年投资 $1000(1+x)$ 万元, 2015 年投资 $1000(1+x)^2$ 万元, 而 2015 年投资 1210 万元. 据此列方程求解;

(2) 设 2015 年河道治污面积为 a 平方米, 园林绿化面积为 $\frac{12100000 - 400a}{200}$ 平方米,

根据 2015 年河道治污及园林绿化总面积不少于 35000 平方米及河道治污费用不少于园林绿化费用的 4 倍列出不等式组, 解不等式组即可.

解答: 解: (1) 设平均每年投资增长的百分率是 x .

由题意得 $1000(1+x)^2 = 1210$,

解得 $x_1 = 0.1$, $x_2 = -2.1$ (不合题意舍去).

答: 平均每年投资增长的百分率为 10%;

(2) 设 2015 年河道治污面积为 a 平方米, 园林绿化面积为 $\frac{12100000 - 400a}{200}$ 平方米,

$$\text{由题意, 得 } \begin{cases} a + \frac{12100000 - 400a}{200} \geq 35000 \text{ ①} \\ 400a \geq \frac{12100000 - 400a}{200} \times 200 \times 4 \text{ ②} \end{cases},$$

由①得 $a \leq 25500$,

由②得 $a \geq 24200$,

$\therefore 24200 \leq a \leq 25500$,

$\therefore 968 \text{ 万} \leq 400a \leq 1020 \text{ 万}$,

$$\therefore 190 \text{ 万} \leq 1210 \text{ 万} - 400a \leq 242 \text{ 万},$$

答：园林绿化的费用应在 190 万 ~ 242 万的范围内.

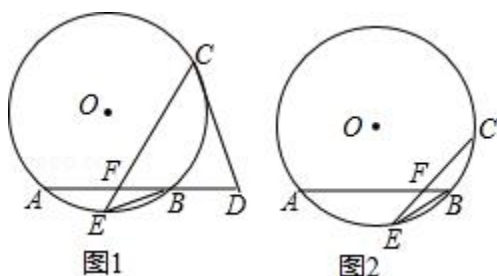
点评： 本题考查了一元二次方程及一元一次不等式组的应用，解题关键是要读懂题目的意思，根据题目给出的条件，找出合适的关系，列出方程或不等式组.

23. (10 分) (2014·莱芜) 如图 1，在 $\odot O$ 中，E 是弧 AB 的中点，C 为 $\odot O$ 上的一动点 (C 与 E 在 AB 异侧)，连接 EC 交 AB 于点 F， $EB = \frac{2}{3}r$ (r 是 $\odot O$ 的半径).

(1) D 为 AB 延长线上一点，若 $DC = DF$ ，证明：直线 DC 与 $\odot O$ 相切；

(2) 求 $EF \cdot EC$ 的值；

(3) 如图 2，当 F 是 AB 的四等分点时，求 EC 的值.



考点： 圆的综合题.

专题： 综合题.

分析： (1) 连结 OC、OE，OE 交 AB 于 H，如图 1，由 E 是弧 AB 的中点，根据垂径定理的推论得到 $OE \perp AB$ ，则 $\angle HEF + \angle HFE = 90^\circ$ ，由对顶相等得 $\angle HFE = \angle CFD$ ，则 $\angle HEF + \angle CFD = 90^\circ$ ，再由 $DC = DF$ 得 $\angle CFD = \angle DCF$ ，加上 $\angle OCE = \angle OEC$ ，所以 $\angle OCE + \angle DCE = \angle HEF + \angle CFD = 90^\circ$ ，于是根据切线的判定定理得直线 DC 与 $\odot O$ 相切；

(2) 由弧 AE = 弧 BE，根据圆周角定理得到 $\angle ABE = \angle BCE$ ，加上 $\angle FEB = \angle BEC$ ，于是可判断 $\triangle EBF \sim \triangle ECB$ ，利用相似比得到 $EF \cdot EC = BE^2 = \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = \frac{4}{9}r^2$ ；

(3) 如图 2，连结 OA，由弧 AE = 弧 BE 得 $AE = BE = \frac{2}{3}r$ ，设 $OH = x$ ，则 $HE = r - x$ ，根据勾股定理，在 $Rt\triangle OAH$ 中有 $AH^2 + x^2 = r^2$ ；在 $Rt\triangle EAH$ 中由 $AH^2 + (r - x)^2 = \left(\frac{2}{3}r\right)^2$ ，利用等式的性质得 $x^2 - (r - x)^2 = r^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^2$ ，即得 $x = \frac{7}{9}r$ ，则 $HE = r - \frac{7}{9}r = \frac{2}{9}r$ ，在 $Rt\triangle OAH$ 中，根据勾股定理计算出 $AH = \frac{4\sqrt{2}r}{9}$ ，由 $OE \perp AB$ 得 $AH = BH$ ，而 F 是 AB 的四等分点，所以 $HF = \frac{1}{2}AH = \frac{2\sqrt{2}r}{9}$ ，于是在 $Rt\triangle EFH$ 中可计算出 $EF = \frac{2\sqrt{3}}{9}r$ ，然后利用 (2) 中的结论可计算出 EC.

解答： (1) 证明：连结 OC、OE，OE 交 AB 于 H，如图 1，

$\because$ E 是弧 AB 的中点，

$\therefore OE \perp AB$ ，

$\therefore \angle EHF = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle HEF + \angle HFE = 90^\circ$,
 而 $\angle HFE = \angle CFD$,
 $\therefore \angle HEF + \angle CFD = 90^\circ$,
 $\therefore DC = DF$,
 $\therefore \angle CFD = \angle DCF$,
 而 $OC = OE$,
 $\therefore \angle OCE = \angle OEC$,
 $\therefore \angle OCE + \angle DCE = \angle HEF + \angle CFD = 90^\circ$,
 $\therefore OC \perp CD$,
 $\therefore$ 直线 DC 与 $\odot O$ 相切;

(2) 解: 连结 BC ,
 $\therefore E$ 是弧 AB 的中点,
 $\therefore$ 弧 $AE =$ 弧 BE ,
 $\therefore \angle ABE = \angle BCE$,
 而 $\angle FEB = \angle BEC$,
 $\therefore \triangle EBF \sim \triangle ECB$,
 $\therefore EF : BE = BE : EC$,
 $\therefore EF \cdot EC = BE^2 = \left(\frac{2}{3}r\right)^2 = \frac{4}{9}r^2$;

(3) 解: 如图 2, 连结 OA ,
 $\therefore$ 弧 $AE =$ 弧 BE ,
 $\therefore AE = BE = \frac{2}{3}r$,
 设 $OH = x$, 则 $HE = r - x$,
 在 $Rt\triangle OAH$ 中, $AH^2 + OH^2 = OA^2$, 即 $AH^2 + x^2 = r^2$,
 在 $Rt\triangle EAH$ 中, $AH^2 + EH^2 = EA^2$, 即 $AH^2 + (r - x)^2 = \left(\frac{2}{3}r\right)^2$,
 $\therefore x^2 - (r - x)^2 = r^2 - \left(\frac{2}{3}r\right)^2$, 即得 $x = \frac{7}{9}r$,

$$\therefore HE = r - \frac{7}{9}r = \frac{2}{9}r,$$

$$\text{在 } Rt\triangle OAH \text{ 中, } AH = \sqrt{OA^2 - OH^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{7}{9}r\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}r}{9},$$

$$\therefore OE \perp AB,$$

$$\therefore AH = BH,$$

而 F 是 AB 的四等分点,

$$\therefore HF = \frac{1}{2}AH = \frac{2\sqrt{2}r}{9},$$

$$\text{在 } Rt\triangle EFH \text{ 中, } EF = \sqrt{HE^2 + HF^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{9}r\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{9}r\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{9}r,$$

$$\therefore EF \cdot EC = \frac{4}{9}r^2,$$

$$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{9}r \cdot EC = \frac{4}{9}r^2,$$

$$\therefore EC = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

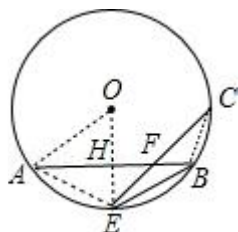


图2

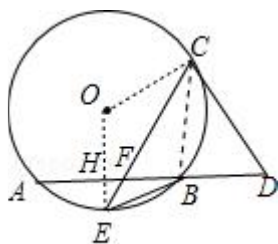


图1

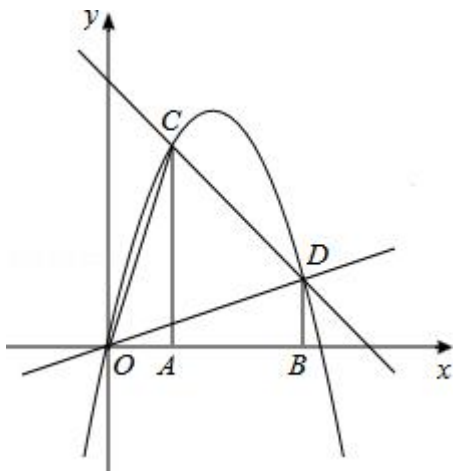
点评: 本题考查了圆的综合题: 熟练掌握垂径定理及其推论、切线的判定定理和圆周角定理; 会利用勾股定理进行几何计算, 利用相似三角形的知识解决有关线段等积的问题.

24. (12分) (2014•莱芜) 如图, 过 A (1, 0)、B (3, 0) 作 x 轴的垂线, 分别交直线 $y=4-x$ 于 C、D 两点. 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 O、C、D 三点.

(1) 求抛物线的表达式;

(2) 点 M 为直线 OD 上的一个动点, 过 M 作 x 轴的垂线交抛物线于点 N, 问是否存在这样的点 M, 使得以 A、C、M、N 为顶点的四边形为平行四边形? 若存在, 求此时点 M 的横坐标; 若不存在, 请说明理由;

(3) 若 $\triangle AOC$ 沿 CD 方向平移 (点 C 在线段 CD 上, 且不与点 D 重合), 在平移的过程中 $\triangle AOC$ 与 $\triangle OBD$ 重叠部分的面积记为 S, 试求 S 的最大值.



考点: 二次函数综合题.

分析: (1) 利用待定系数法求出抛物线的解析式;

(2) 由题意, 可知 $MN \parallel AC$, 因为以 A、C、M、N 为顶点的四边形为平行四边形, 则有 $MN=AC=3$. 设点 M 的横坐标为 x , 则求出 $MN=|\frac{4}{3}x^2 - 4x|$; 解方程 $|\frac{4}{3}x^2 - 4x|=3$, 求出 x 的值, 即点 M 横坐标的值;

(3) 设水平方向的平移距离为 t ($0 \leq t < 2$), 利用平移性质求出 S 的表达式: $S = -\frac{1}{6}(t-1)^2 + \frac{1}{3}$; 当 $t=1$ 时, s 有最大值为 $\frac{1}{3}$.

解答: 解: (1) 由题意, 可得 C (1, 3), D (3, 1).

$\therefore$ 抛物线过原点, $\therefore$ 设抛物线的解析式为: $y=ax^2+bx$.

$$\therefore \begin{cases} a+b=3 \\ 9a+3b=1 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=-\frac{4}{3} \\ b=\frac{13}{3} \end{cases},$$

$\therefore$ 抛物线的表达式为: $y = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{3}x$.

(2) 存在.

设直线 OD 解析式为 $y=kx$, 将 D (3, 1) 代入求得 $k=\frac{1}{3}$,

$\therefore$ 直线 OD 解析式为 $y=\frac{1}{3}x$.

设点 M 的横坐标为 x , 则 M ($x, \frac{1}{3}x$), N ($x, -\frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{3}x$),

$$\therefore MN=|y_M - y_N| = |\frac{1}{3}x - (-\frac{4}{3}x^2 + \frac{13}{3}x)| = |\frac{4}{3}x^2 - 4x|.$$

由题意, 可知 $MN \parallel AC$, 因为以 A、C、M、N 为顶点的四边形为平行四边形, 则有 $MN=AC=3$.

$$\therefore |\frac{4}{3}x^2 - 4x|=3.$$

若 $\frac{4}{3}x^2 - 4x=3$, 整理得: $4x^2 - 12x - 9=0$, 解得: $x=\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$;

若 $\frac{4}{3}x^2 - 4x=-3$, 整理得: $4x^2 - 12x + 9=0$, 解得: $x=\frac{3}{2}$.

$\therefore$ 存在满足条件的点 M, 点 M 的横坐标为: $\frac{3}{2}$ 或 $\frac{3+3\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{3-3\sqrt{2}}{2}$.

(3) $\therefore$ C (1, 3), D (3, 1)

$\therefore$ 易得直线 OC 的解析式为 $y=3x$, 直线 OD 的解析式为 $y=\frac{1}{3}x$.

如解答图所示,

设平移中的三角形为 $\triangle A'O'C'$, 点 C' 在线段 CD 上.

设 $O'C'$ 与 x 轴交于点 E, 与直线 OD 交于点 P;

设 $A'C'$ 与 x 轴交于点 F, 与直线 OD 交于点 Q.

设水平方向的平移距离为 t ($0 \leq t < 2$),

则图中 $AF=t$, $F(1+t)$, $Q(1+t, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}t)$, $C'(1+t, 3-t)$.

设直线 $O'C'$ 的解析式为 $y=3x+b$,

将 $C'(1+t, 3-t)$ 代入得: $b=-4t$,

$\therefore$ 直线 $O'C'$ 的解析式为 $y=3x-4t$.

$\therefore E(\frac{4}{3}t, 0)$.

联立 $y=3x-4t$ 与 $y=\frac{1}{3}x$, 解得 $x=\frac{3}{2}t$, $\therefore P(\frac{3}{2}t, \frac{1}{2}t)$.

过点 P 作 $PG \perp x$ 轴于点 G , 则 $PG=\frac{1}{2}t$.

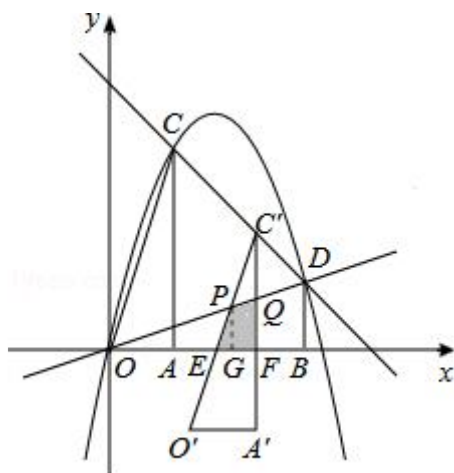
$\therefore S=S_{\triangle OFQ} - S_{\triangle OEP} = \frac{1}{2}OF \cdot FQ - \frac{1}{2}OE \cdot PG$

$= \frac{1}{2}(1+t)(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}t \cdot \frac{1}{2}t$

$= -\frac{1}{6}(t-1)^2 + \frac{1}{3}$

当 $t=1$ 时, S 有最大值为 $\frac{1}{3}$.

$\therefore S$ 的最大值为 $\frac{1}{3}$.



解答图

点评: 本题是二次函数压轴题, 综合考查了二次函数的图象与性质、待定系数法、函数图象上点的坐标特征、平行四边形、平移变换、图形面积计算等知识点, 有一定的难度. 第

(2) 问中, 解题关键是根据平行四边形定义, 得到 $MN=AC=3$, 由此列出方程求解;

第 (3) 问中, 解题关键是求出 S 的表达式, 注意图形面积的计算方法.