

2014 年山东省日照市中考数学试卷

一、选择题（共大题共 12 小题，其中 1-8 题每小题 3 分，9-12 题每小题 3 分，满分 40 分. 每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确的选项的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1. (3 分) (2014•日照) 在已知实数: -1 , 0 , $\frac{1}{2}$, -2 中, 最小的一个实数是 ()

- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. -2

2. (3 分) (2014•日照) 下列运算正确的是 ()

- A. $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^6$ B. $(a^2)^3 = a^6$ C. $a^8 \div a^2 = a^4$ D. $-x^3 + x^3 = 2x^6$

3. (3 分) (2014•日照) 在下列图案中, 是中心对称图形的是 ()

- A.  B.  C.  D. 

4. (3 分) (2014•日照) 某养殖场 2013 年底的生猪出栏价格是每千克 a 元, 受市场影响, 2014 年第一季度出栏价格平均每千克下降了 15%, 到了第二季度平均每千克比第一季度又上升了 20%, 则第三季度初这家养殖场的生猪出栏价格是每千克 ()

- A. $(1 - 15\%) (1 + 20\%) a$ 元 B. $(1 - 15\%) 20\%a$ 元
C. $(1 + 15\%) (1 - 20\%) a$ 元 D. $(1 + 20\%) 15\%a$ 元

5. (3 分) (2014•日照) 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 13, 且各边长均为整数, 那么这样的等腰 $\triangle ABC$ 有 ()

- A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个

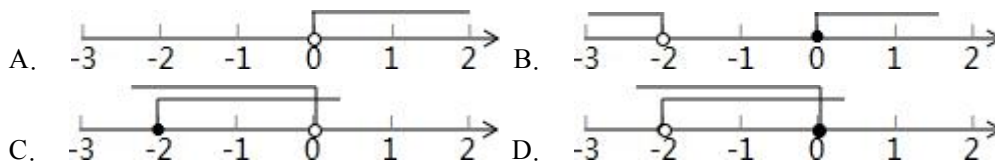
6. (3 分) (2014•日照) 李大伯在承包的果园里种植了 100 棵樱桃树, 今年已经进入收获期, 收获时, 从中任意采摘了 6 棵树上的樱桃, 分别称得每棵树的产量 (单位: 千克) 如下表:

序 号	1	2	3	4	5	6
产 量	17	21	19	18	20	19

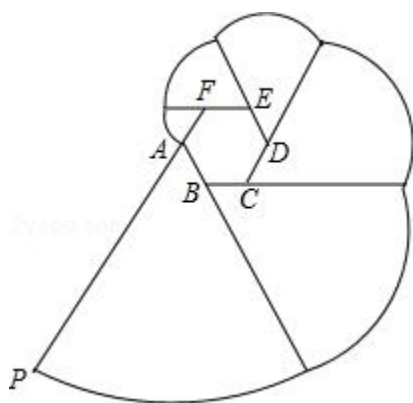
这组数据的中位数为 m , 樱桃的总产量约为 n , 则 m , n 分别是 ()

- A. 18, 2000 B. 19, 1900 C. 18.5, 1900 D. 19, 1850

7. (3 分) (2014•日照) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + k + 1 = 0$ 的两个实根 x_1 , x_2 , 满足 $x_1 + x_2 - x_1 x_2 < -1$, 则 k 的取值范围在数轴上表示为 ()



8. (3分) (2014•日照) 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 是边长为 2cm 的螺母, 点 P 是 FA 延长线上的点, 在 A 、 P 之间拉一条长为 12cm 的无伸缩性细线, 一端固定在点 A , 握住另一端点 P 拉直细线, 把它全部紧紧缠绕在螺母上 (缠绕时螺母不动), 则点 P 运动的路径长为 ()

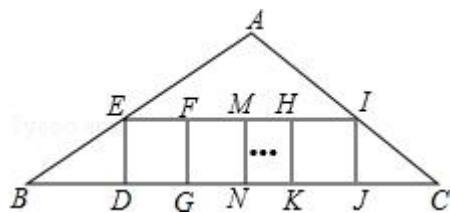


- A. $13\pi\text{cm}$ B. $14\pi\text{cm}$ C. $15\pi\text{cm}$ D. $16\pi\text{cm}$

9. (4分) (2014•日照) 当 $k > \frac{1}{2}$ 时, 直线 $kx - y = k$ 与直线 $ky + x = 2k$ 的交点在 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

10. (4分) (2014•日照) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的面积是 12 , 点 E 、 I 分别在边 AB 、 AC 上, 在 BC 边上依次作了 n 个全等的小正方形 $DEFG$, $GFMN$, ..., $KHIJ$, 则每个小正方形的边长为 ()

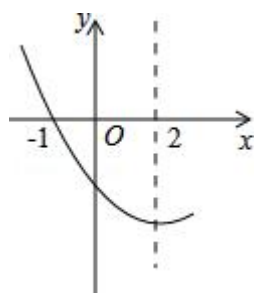


- A. $\frac{12}{11}$ B. $\frac{12}{2n-3}$ C. $\frac{12}{5}$ D. $\frac{12}{2n+3}$

11. (4分) (2014•日照) 如图, 是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分. 已知抛物线的对称轴为 $x = 2$, 与 x 轴的一个交点是 $(-1, 0)$. 有下列结论:

- ① $abc > 0$; ② $4a - 2b + c < 0$; ③ $4a + b = 0$; ④ 抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(5, 0)$; ⑤ 点 $(-3, y_1)$, $(6, y_2)$ 都在抛物线上, 则有 $y_1 < y_2$.

其中正确的是 ()



- A. ①②③ B. ②④⑤ C. ①③④ D. ③④⑤

12. (4分) (2014•日照) 下面是按照一定规律排列的一列数:

第1个数: $\frac{1}{2} - (1 + \frac{-1}{2})$;

第2个数: $\frac{1}{3} - (1 + \frac{-1}{2}) \times (1 + \frac{(-1)^2}{3}) \times (1 + \frac{(-1)^3}{4})$;

第3个数: $\frac{1}{4} - (1 + \frac{-1}{2}) \times (1 + \frac{(-1)^2}{3}) \times (1 + \frac{(-1)^3}{4}) \times (1 + \frac{(-1)^4}{5}) \times (1 + \frac{(-1)^5}{6})$;

...

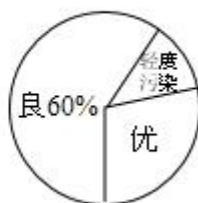
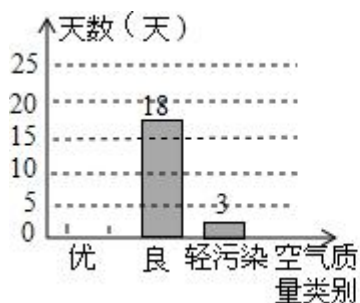
依此规律, 在第10个数、第11个数、第12个数、第13个数中, 最大的数是 ()

- A. 第10个数 B. 第11个数 C. 第12个数 D. 第13个数

二、填空题 (共4小题, 每小题4分, 满分16分, 不需写出解答过程, 请将答案直接写在答题卡相应的位置上)

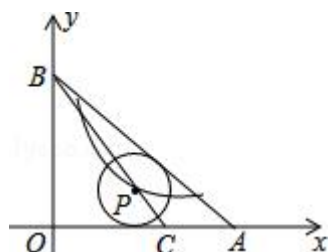
13. (4分) (2014•日照) 分解因式: $x^3 - xy^2 =$ _____.

14. (4分) (2014•日照) 小明从市环境监测网随机查阅了若干天的空气质量数据作为样本进行统计, 分别绘制了如图的条形统计图和扇形统计图, 根据图中提供的信息, 可知扇形统计图中表示空气质量为优的扇形的圆心角的度数为_____.



15. (4分) (2014•日照) 已知 $a > b$, 如果 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{3}{2}$, $ab=2$, 那么 $a-b$ 的值为_____.

16. (4分) (2014•日照) 如图, 在 $Rt\triangle OAB$ 中, $OA=4$, $AB=5$, 点 C 在 OA 上, $AC=1$, $\odot P$ 的圆心 P 在线段 BC 上, 且 $\odot P$ 与边 AB , AO 都相切. 若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过圆心 P , 则 $k=$ _____.



三、解答题 (本大题共 6 小题, 满分 64 分, 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (8分) (2014•日照) 为了进一步落实“节能减排”措施, 冬季供暖来临前, 某单位决定对 7200 平方米的“外墙保温”工程进行招标, 现有甲、乙两个工程队参与投标, 比较这两个工程队的标书发现: 乙队每天完成的工程量是甲队的 1.5 倍, 这样乙队单独干比甲队单独干能提前 15 天完成任务. 问甲队每天完成多少平方米?

18. (8分) (2014•日照) 在某班“讲故事”比赛中有一个抽奖活动, 活动规则是: 只有进入最后决赛的甲、乙、丙三位同学, 每人才能获得一次抽奖机会. 在如图所示的翻奖牌正面的 4 个数字中选一个数字, 选中后就可以得到该数字后面的相应奖品: 前面的人选中的数字, 后面的人就不能再选择数字了.

1	2	文具	计算器
3	4	计算器	篮球

翻奖牌正面

翻奖牌背面

(1) 请用树状图 (或列表) 的方法求甲、乙二人得到的奖品都是计算器的概率.

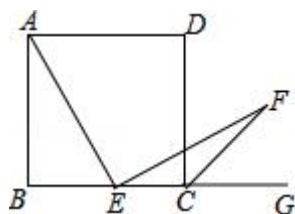
(2) 有的同学认为, 如果甲先翻奖牌, 那么他得到篮球的概率会大些, 这种说法正确吗?

请说明理由.

19. (10 分) (2014•日照) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 边长 $AB=3$, 点 E (与 B , C 不重合) 是 BC 边上任意一点, 把 EA 绕点 E 顺时针方向旋转 90° 到 EF , 连接 CF .

(1) 求证: CF 是正方形 $ABCD$ 的外角平分线;

(2) 当 $\angle BAE=30^\circ$ 时, 求 CF 的长.



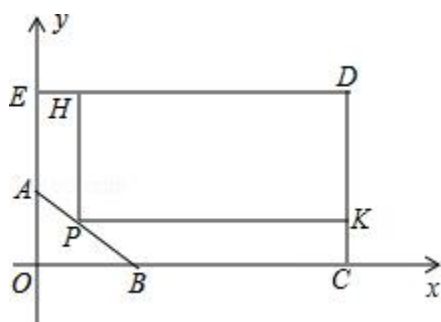
20. (10 分) (2014•日照) 如图, 为了绿化小区, 某物业公司要在形如五边形 $ABCDE$ 的草坪上建一个矩形花坛 $PKDH$. 已知: $PH \parallel AE$, $PK \parallel BC$, $DE=100$ 米, $EA=60$ 米, $BC=70$ 米, $CD=80$ 米. 以 BC 所在直线为 x 轴, AE 所在直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 坐标原点为 O .

(I) 求直线 AB 的解析式.

(II) 若设点 P 的横坐标为 x , 矩形 $PKDH$ 的面积为 S .

(1) 用 x 表示 S ;

(2) 当 x 为何值时, S 取最大值, 并求出这个最大值.



21. (14 分) (2014•日照) 阅读资料: 小明是一个爱动脑筋的学生, 他在学习了有关圆的切线性质后, 意犹未尽, 又查阅到了与圆的切线相关的一个问题:

如图 1, 已知 PC 是 $\odot O$ 的切线, AB 是 $\odot O$ 的直径, 延长 BA 交切线 PC 与 P , 连接 AC 、 BC 、 OC .

因为 PC 是 $\odot O$ 的切线, AB 是 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle OCP = \angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle B = \angle 2$.

在 $\triangle PAC$ 与 $\triangle PCB$ 中, 又因为: $\angle P = \angle P$, 所以 $\triangle PAC \sim \triangle PCB$, 所以 $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$, 即 $PC^2 = PA \cdot PB$.

问题拓展:

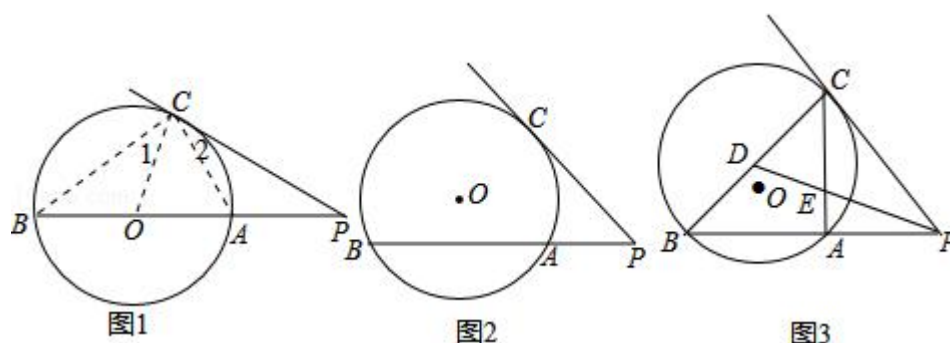
(I) 如果 PB 不经过 $\odot O$ 的圆心 O (如图 2) 等式 $PC^2 = PA \cdot PB$, 还成立吗? 请证明你的结论;

综合应用:

(II) 如图 3, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, PC 是 $\odot O$ 的切线, C 是切点, BA 的延长线交 PC 于点 P ;

(1) 当 $AB = PA$, 且 $PC = 12$ 时, 求 PA 的值;

(2) D 是 BC 的中点, PD 交 AC 于点 E . 求证: $\frac{PC^2}{PA^2} = \frac{CE}{AE}$.



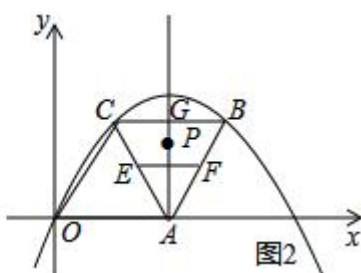
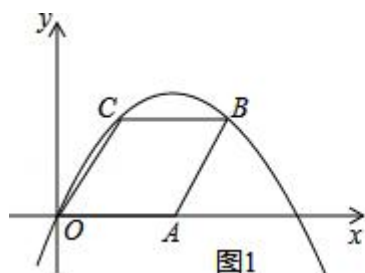
22. (14 分) (2014•日照) 如图 1, 在菱形 $OABC$ 中, 已知 $OA = 2\sqrt{3}$, $\angle AOC = 60^\circ$, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 经过 O , C , B 三点.

(I) 求出点 B、C 的坐标并求抛物线的解析式.

(II) 如图 2, 点 E 是 AC 的中点, 点 F 是 AB 的中点, 直线 AG 垂直 BC 于点 G, 点 P 在直线 AG 上.

(1) 当 $OP+PC$ 的最小值时, 求出点 P 的坐标;

(2) 在 (1) 的条件下, 连接 PE、PF、EF 得 $\triangle PEF$, 问在抛物线上是否存在点 M, 使得以 M, B, C 为顶点的三角形与 $\triangle PEF$ 相似? 若存在, 请求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2014 年山东省日照市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共大题共 12 小题，其中 1-8 题每小题 3 分，9-12 题每小题 3 分，满分 40 分．每小题所给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确的选项的字母代号填涂在答题卡相应位置上）

1. (3 分) (2014•日照) 在已知实数：-1, 0, $\frac{1}{2}$, -2 中，最小的一个实数是 ()
- A. -1 B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. -2

分析：正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，两个负实数绝对值大的反而小，由此可得出答案．

解答：解：-2、-1、0、1 中，最小的实数是 -2．
故选：D．

点评：本题考查了实数的大小比较，属于基础题，掌握实数的大小比较法则是关键．

2. (3 分) (2014•日照) 下列运算正确的是 ()
- A. $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^6$ B. $(a^2)^3 = a^6$ C. $a^8 \div a^2 = a^4$ D. $-x^3 + x^3 = 2x^6$

考点：同底数幂的除法；合并同类项；幂的乘方与积的乘方；单项式乘单项式．

分析：根据合并同类项的法则，同底数幂的乘法与除法以及幂的乘方的知识求解即可求得答案．

解答：解：A、 $3a^3 \cdot 2a^2 = 6a^5$ ，故 A 选项错误；
B、 $(a^2)^3 = a^6$ ，故 B 选项正确；
C、 $a^8 \div a^2 = a^6$ ，故 C 选项错误；
D、 $x^3 + x^3 = 2x^3$ ，故 D 选项错误．
故选：B．

点评：此题考查了合并同类项的法则，同底数幂的乘法与除法以及幂的乘方等知识，解题要注意细心．

3. (3 分) (2014•日照) 在下列图案中，是中心对称图形的是 ()
- A.  B.  C.  D. 

考点：中心对称图形．

分析：根据中心对称图形的概念求解．

解答：解：A、不是中心对称图形．故本选项错误；
B、不是中心对称图形．故本选项错误；
C、是中心对称图形．故本选项正确；

D、不是中心对称图形. 故本选项错误.

故选 C.

点评: 本题考查了中心对称图形的概念: 中心对称图形是要寻找对称中心, 旋转 180 度后与原图重合.

4. (3 分) (2014•日照) 某养殖场 2013 年底的生猪出栏价格是每千克 a 元, 受市场影响, 2014 年第一季度出栏价格平均每千克下降了 15%, 到了第二季度平均每千克比第一季度又上升了 20%, 则第三季度初这家养殖场的生猪出栏价格是每千克 ()

- A. $(1 - 15\%)$ B. $(1 - 15\%) 20\%a$ C. $(1 + 15\%) (1 -$ D. $(1 + 20\%) 15\%a$ 元
 $(1 + 20\%) a$ 元 元 $20\%) a$ 元

考点: 列代数式.

分析: 由题意可知: 2014 年第一季度出栏价格为 2013 年底的生猪出栏价格的 $(1 - 15\%)$, 第二季度平均价格每千克是第一季度的 $(1 + 20\%)$, 由此列出代数式即可.

解答: 解: 第三季度初这家养殖场的生猪出栏价格是每千克 $(1 - 15\%) (1 + 20\%) a$ 元.

故选: A.

点评: 此题考查列代数式, 注意题目蕴含的数量关系, 找准标准是解决问题的关键.

5. (3 分) (2014•日照) 已知 $\triangle ABC$ 的周长为 13, 且各边长均为整数, 那么这样的等腰 $\triangle ABC$ 有 ()

- A. 5 个 B. 4 个 C. 3 个 D. 2 个

考点: 等腰三角形的性质; 三角形三边关系.

分析: 由已知条件, 根据三角形三边的关系, 任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边, 结合边长是整数进行分析.

解答: 解: 周长为 13, 边长为整数的等腰三角形的边长只能为: 3, 5, 5; 或 4, 4, 5; 或 6, 6, 1, 共 3 个.

故选: C.

点评: 本题考查了等腰三角形的判定; 所构成的等腰三角形的三边必须满足任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边. 解答本题时要进行多次的尝试验证.

6. (3 分) (2014•日照) 李大伯在承包的果园里种植了 100 棵樱桃树, 今年已经进入收获期, 收获时, 从中任意采摘了 6 棵树上的樱桃, 分别称得每棵树的产量 (单位: 千克) 如下表:

序 号	1	2	3	4	5	6
产量量	17	21	19	18	20	19

这组数据的中位数为 m , 樱桃的总产量约为 n , 则 m , n 分别是 ()

- A. 18, 2000 B. 19, 1900 C. 18.5, 1900 D. 19, 1850

考点: 中位数; 用样本估计总体.

分析: 找中位数要把数据按从小到大的顺序排列, 位于最中间的一个数 (或两个数的平均数) 为中位数; 根据已知数据利用平均数的计算公式求出 6 棵树上的樱桃的平均产量, 然后利用样本估计总体的思想即可求出樱桃的总产量.

解答: 解: 先对这组数据按从小到大的顺序重新排序: 17, 18, 19, 19, 20, 21.

位于最中间的数是 19, 19,

所以这组数的中位数是 $m = (19+19) \div 2 = 19$;

从 100 棵樱桃中抽样 6 棵,

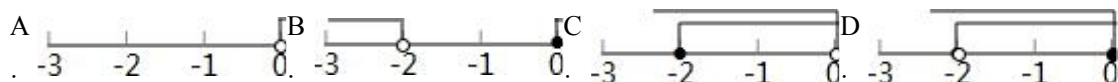
每颗的平均产量为 $\frac{1}{6} (17+18+19+19+20+21) = 19$ (千克),

所以估计樱桃的总产量 $n = 19 \times 100 = 1900$ (千克);

故选 B.

点评: 此题考查了中位数、平均数、样本估计总体等知识, 综合性比较强, 要求学生熟练掌握定义并且能够运用这些知识才能很好解决问题.

7. (3 分) (2014•日照) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + k + 1 = 0$ 的两个实根 x_1, x_2 , 满足 $x_1 + x_2 - x_1 x_2 < -1$, 则 k 的取值范围在数轴上表示为 ()



考点: 在数轴上表示不等式的解集; 根的判别式; 根与系数的关系.

分析: 根据根的判别式和根与系数的关系列出不等式, 求出解集.

解答: 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + k + 1 = 0$ 有两个实根,

$$\therefore \Delta \geq 0,$$

$$\therefore 4 - 4(k+1) \geq 0,$$

解得 $k \leq 0$,

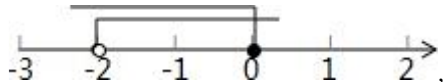
$$\because x_1 + x_2 = -2, \quad x_1 \cdot x_2 = k + 1,$$

$$\therefore -2 - (k+1) < -1,$$

解得 $k > -2$,

不等式组的解集为 $-2 < k \leq 0$,

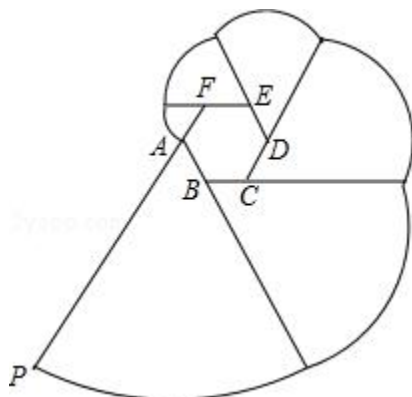
在数轴上表示为:



故选 D.

点评: 本题考查了根的判别式、根与系数的关系, 在数轴上找到公共部分是解题的关键.

8. (3 分) (2014•日照) 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 是边长为 2cm 的螺母, 点 P 是 FA 延长线上的点, 在 A, P 之间拉一条长为 12cm 的无伸缩性细线, 一端固定在点 A , 握住另一端点 P 拉直细线, 把它全部紧紧缠绕在螺母上 (缠绕时螺母不动), 则点 P 运动的路径长为 ()



A. $13\pi\text{cm}$ B. $14\pi\text{cm}$ C. $15\pi\text{cm}$ D. $16\pi\text{cm}$

考点: 弧长的计算; 正多边形和圆.

分析: 根据如图所示可知点 P 运动的路线就是图中六条扇形的弧长, 扇形的圆心角为 60° , 半径从 12cm , 依次减 2cm , 求得六条弧的长的和即可.

解答: 解: 点 P 运动的路径长为:

$$\begin{aligned} & \frac{60\pi \times 12}{180} + \frac{60\pi \times 10}{180} + \frac{60\pi \times 8}{180} + \frac{60\pi \times 6}{180} + \frac{60\pi \times 4}{180} + \frac{60\pi \times 2}{180} \\ &= \frac{\pi}{3} (12+10+8+6+4+2) \\ &= 14\pi \text{ (cm)}. \end{aligned}$$

故选 B.

点评: 本题的关键是理解点 P 运动的路线是六条弧, 理解每条弧的圆心角和半径是关键.

9. (4 分) (2014•日照) 当 $k > \frac{1}{2}$ 时, 直线 $kx - y = k$ 与直线 $ky + x = 2k$ 的交点在 ()

A. 第一象限

B. 第二象限

C. 第三象限

D. 第四象限

考点: 两条直线相交或平行问题.

分析:

解方程组 $\begin{cases} kx - y = k \\ ky + x = 2k \end{cases}$ 得两直线的交点坐标, 由 $k > \frac{1}{2}$, 求出交点的横坐标、纵坐标的

符号, 得出结论.

解答:

解: 解方程组 $\begin{cases} kx - y = k \\ ky + x = 2k \end{cases}$ 得, 两直线的交点坐标为 $(\frac{k^2+2k}{k^2+1}, \frac{2k^2-k}{k^2+1})$,

因为 $k > \frac{1}{2}$,

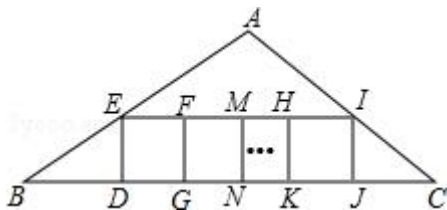
$$\text{所以 } \frac{k^2+2k}{k^2+1} > 0, \quad \frac{2k^2-k}{k^2+1} = \frac{k(2k-1)}{k^2+1} > 0,$$

所以交点在第一象限.

故选: A.

点评: 本题考查求两直线的交点的方法, 以及各个象限内的点的坐标的特征.

10. (4 分) (2014•日照) 如图, 已知 $\triangle ABC$ 的面积是 12, 点 E、I 分别在边 AB、AC 上, 在 BC 边上依次作了 n 个全等的小正方形 DEFG, GFMN, ..., KHIJ, 则每个小正方形的边长为 ()



A. $\frac{12}{11}$

B. $\frac{12}{2n-3}$

C. $\frac{12}{5}$

D. $\frac{12}{2n+3}$

考点：相似三角形的判定与性质；正方形的性质.

分析：设正方形的边长为 x ，根据正方形的性质、勾股定理和相似三角形的判定和性质，可以求出有两个正方形的边长和有三个正方形的边长，从中得到规律就可得到 n 个正方形的边长规律即可得到问题答案.

解答：解：过 C 作 $CM \perp AB$ ，垂足为 M ，交 GH 于点 N .

$$\therefore \angle CMB = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形,

$$\therefore GH \parallel AB, GH = GF, GF \perp AB,$$

$$\therefore \angle CGH = \angle A, \angle CNH = \angle CMB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle GCH = \angle ACB,$$

$$\therefore \triangle CGH \sim \triangle CAB.$$

$$\therefore \frac{CN}{CM} = \frac{GH}{AB},$$

$$\because GF = MN = GH, \text{ 设 } GH = x, \text{ 三角形 } ABC \text{ 的底为 } a, \text{ 高为 } h,$$

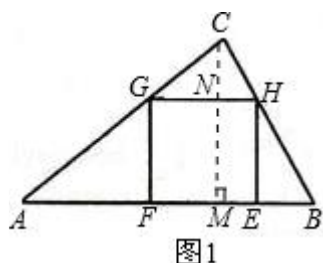
$$\therefore CN = CM - MN = CM - GH = CM - x.$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{h-x}{h},$$

...以此类推,

$$\text{由此, 当为 } n \text{ 个正方形时以 } x = \frac{12}{2n+3},$$

故选 D.

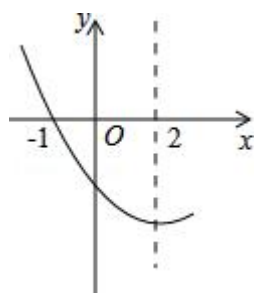


点评：本题考查了相似三角形的判定和性质，解题的关键是需要对正方形的性质、直角三角形的勾股定理和相似三角形的判定和性质熟练地掌握，并把它运用到实际的题目中去.

11. (4分) (2014•日照) 如图，是抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 图象的一部分. 已知抛物线的对称轴为 $x = 2$ ，与 x 轴的一个交点是 $(-1, 0)$. 有下列结论：

① $abc > 0$ ；② $4a - 2b + c < 0$ ；③ $4a + b = 0$ ；④ 抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(5, 0)$ ；⑤ 点 $(-3, y_1)$ ， $(6, y_2)$ 都在抛物线上，则有 $y_1 < y_2$.

其中正确的是 ()



A. ①②③

B. ②④⑤

C. ①③④

D. ③④⑤

考点：二次函数图象与系数的关系.

分析：①先根据抛物线开口方向、对称轴位置、抛物线与 y 轴交点位置求得 a 、 b 、 c 的符号，再根据有理数乘法法则即可判断；

②把 $x = -2$ 代入函数关系式，结合图象即可判断；

③根据对称轴求出 $b = -4a$ ，即可判断；

④根据抛物线的对称性求出抛物线与 x 轴的另一个交点坐标，即可判断；

⑤先求出点 $(-3, y_1)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点的坐标，根据抛物线的增减性即可判断 y_1 和 y_2 的大小.

解答：解：① $\because$ 二次函数的图象开口向上，

$$\therefore a > 0,$$

$\because$ 二次函数的图象交 y 轴的负半轴于一点，

$$\therefore c < 0,$$

$\because$ 对称轴是直线 $x=2$,

$$\therefore -\frac{b}{2a} = 2,$$

$$\therefore b = -4a < 0,$$

$$\therefore abc > 0.$$

故①正确；

②把 $x = -2$ 代入 $y = ax^2 + bx + c$ 得： $y = 4a - 2b + c$,

由图象可知，当 $x = -2$ 时， $y > 0$ ，即 $4a - 2b + c > 0$.

故②错误；

③ $\because b = -4a$,

$$\therefore 4a + b = 0.$$

故③正确；

④ $\because$ 抛物线的对称轴为 $x=2$ ，与 x 轴的一个交点是 $(-1, 0)$,

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的另一个交点是 $(5, 0)$.

故④正确；

⑤ $\because (-3, y_1)$ 关于直线 $x=2$ 的对称点的坐标是 $(7, y_1)$,

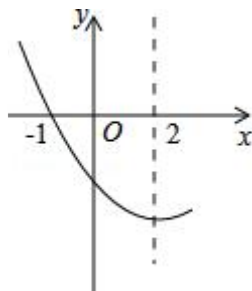
又 $\because$ 当 $x > 2$ 时， y 随 x 的增大而增大， $7 > 6$,

$$\therefore y_1 > y_2.$$

故⑤错误;

综上所述, 正确的结论是①③④.

故选: C.



点评: 此题考查了二次函数图象与系数的关系, 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$), a 的符号由抛物线的开口方向决定; b 的符号由对称轴的位置与 a 的符号决定; c 的符号由抛物线与 y 轴交点的位置决定; 抛物线与 x 轴有交点时, 两交点关于对称轴对称, 此外还要根据图象判断 $x=-2$ 时对应函数值的正负及二次函数的增减性.

12. (4分) (2014•日照) 下面是按照一定规律排列的一列数:

第1个数: $\frac{1}{2} - (1 + \frac{-1}{2})$;

第2个数: $\frac{1}{3} - (1 + \frac{-1}{2}) \times (1 + \frac{(-1)^2}{3}) \times (1 + \frac{(-1)^3}{4})$;

第3个数: $\frac{1}{4} - (1 + \frac{-1}{2}) \times (1 + \frac{(-1)^2}{3}) \times (1 + \frac{(-1)^3}{4}) \times (1 + \frac{(-1)^4}{5}) \times$
 $(1 + \frac{(-1)^5}{6})$;

...

依此规律, 在第10个数、第11个数、第12个数、第13个数中, 最大的数是 ()

A. 第10个数 B. 第11个数 C. 第12个数 D. 第13个数

考点: 规律型: 数字的变化类.

分析: 通过计算可以发现, 第一个数 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$, 第二个数为 $\frac{1}{3} - \frac{1}{2}$, 第三个数为 $\frac{1}{4} - \frac{1}{2}$, ...第

n 个数为 $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2}$, 由此求第10个数、第11个数、第12个数、第13个数的得数,

通过比较得出答案.

解答: 解: 第1个数: $\frac{1}{2} - (1 + \frac{-1}{2})$;

第2个数: $\frac{1}{3} - (1 + \frac{-1}{2}) \times (1 + \frac{(-1)^2}{3}) \times (1 + \frac{(-1)^3}{4})$;

$$\text{第3个数: } \frac{1}{4} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{(-1)^2}{3}\right) \times \left(1 + \frac{(-1)^3}{4}\right) \times \left(1 + \frac{(-1)^4}{5}\right) \\ \times \left(1 + \frac{(-1)^5}{6}\right);$$

...

$$\therefore \text{第} n \text{ 个数为 } \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{-1}{2}\right)$$

$$\left[1 + \frac{(-1)^2}{3}\right] \left[1 + \frac{(-1)^3}{4}\right] \dots \left[1 + \frac{(-1)^{2n-1}}{2n}\right] = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{第10个数、第11个数、第12个数、第13个数分别为 } -\frac{9}{22}, -\frac{5}{12}, -\frac{11}{26}, -\frac{3}{7},$$

其中最大的数为 $-\frac{9}{22}$, 即第10个数最大.

故选 A.

点评: 本题考查的是数字的变化类, 根据题意找出规律是解答此题的关键.

二、填空题 (共4小题, 每小题4分, 满分16分, 不需写出解答过程, 请将答案直接写在答题卡相应的位置上)

13. (4分) (2014•日照) 分解因式: $x^3 - xy^2 = \underline{x(x+y)(x-y)}$.

考点: 提公因式法与公式法的综合运用.

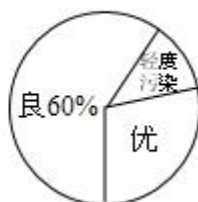
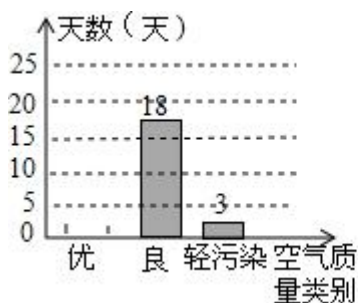
分析: 首先提取公因式 x , 进而利用平方差公式分解因式得出即可.

解答: 解: $x^3 - xy^2 = x(x^2 - y^2) = x(x+y)(x-y)$.

故答案为: $x(x+y)(x-y)$.

点评: 此题主要考查了提取公因式法分解因式以及公式法分解因式, 熟练应用乘法公式是解题关键.

14. (4分) (2014•日照) 小明从市环境监测网随机查阅了若干天的空气质量数据作为样本进行统计, 分别绘制了如图的条形统计图和扇形统计图, 根据图中提供的信息, 可知扇形统计图中表示空气质量为优的扇形的圆心角的度数为 $\underline{108^\circ}$.



考点: 条形统计图; 扇形统计图.

分析: 根据空气质量为良的天数和所占的百分比求出总的天数, 再用总天数减去空气质量为

良和轻度污染的天数求出优的天数，再用 360° 乘以优的天数所占的百分比即可。

解答：解：根据题意得：

随机查阅的总天数是： $\frac{18}{60\%}=30$ （天），

优的天数是： $30-18-3=9$ （天），

则空气质量为优的扇形的圆心角的度数为： $\frac{9}{30}\times 360^\circ=108^\circ$ ；

故答案为： 108° 。

点评：本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。

15. (4分) (2014•日照) 已知 $a>b$ ，如果 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{3}{2}$ ， $ab=2$ ，那么 $a-b$ 的值为 1。

考点：完全平方公式；分式的加减法。

专题：计算题。

分析：已知等式左边通分并利用同分母分式的加法法则计算，将 ab 的值代入求出 $a+b$ 的值，再利用完全平方公式即可求出 $a-b$ 的值。

解答：解： $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}=\frac{3}{2}$ ，

将 $ab=2$ 代入得： $a+b=3$ ，

$\therefore (a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab = 9 - 8 = 1$ ，

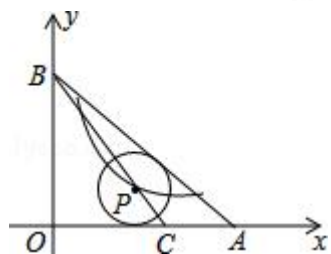
$\because a>b$ ， $\therefore a-b>0$ ，

则 $a-b=1$ 。

故答案为：1

点评：此题考查了完全平方公式，以及分式的加减法，熟练掌握公式及法则是解本题的关键。

16. (4分) (2014•日照) 如图，在 $Rt\triangle OAB$ 中， $OA=4$ ， $AB=5$ ，点 C 在 OA 上， $AC=1$ ， $\odot P$ 的圆心 P 在线段 BC 上，且 $\odot P$ 与边 AB ， AO 都相切。若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ ($k\neq 0$) 的图象经过圆心 P ，则 $k=-\frac{5}{4}$ 。



考点：反比例函数综合题；待定系数法求反比例函数解析式；勾股定理；切线的性质；相似三角形的判定与性质。

专题：计算题。

分析：设 $\odot P$ 与边 AB ， AO 分别相切于点 E 、 D ，连接 PE 、 PD 、 PA ，用面积法可求出 $\odot P$

的半径，然后通过三角形相似可求出 CD，从而得到点 P 的坐标，就可求出 k 的值.

解答: 解: 设 $\odot P$ 与边 AB, AO 分别相切于点 E、D, 连接 PE、PD、PA, 如图所示.

则有 $PD \perp OA$, $PE \perp AB$.

设 $\odot P$ 的半径为 r,

$\because AB=5$, $AC=1$,

$$\therefore S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}AB \cdot PE = \frac{5}{2}r, \quad S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}AC \cdot PD = \frac{1}{2}r.$$

$\because \angle OAB=90^\circ$, $OA=4$, $AB=5$,

$\therefore OB=3$.

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot OB = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}.$$

$\because S_{\triangle ABC} = S_{\triangle APB} + S_{\triangle APC}$,

$$\therefore \frac{3}{2} = \frac{5}{2}r + \frac{1}{2}r.$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore PD = \frac{1}{2}.$$

$\because PD \perp OA$, $\angle AOB=90^\circ$,

$\therefore \angle PDC = \angle BOC = 90^\circ$.

$\therefore PD \parallel BO$.

$\therefore \triangle PDC \sim \triangle BOC$.

$$\therefore \frac{PD}{BO} = \frac{CD}{OC}.$$

$\therefore PD \cdot OC = CD \cdot BO$.

$$\therefore \frac{1}{2} \times (4 - 1) = 3CD.$$

$$\therefore CD = \frac{1}{2}.$$

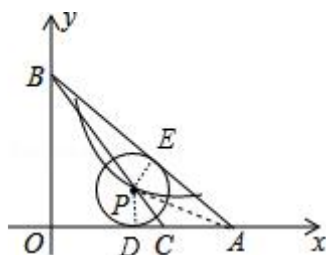
$$\therefore OD = OC - CD = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$.

$\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) 的图象经过圆心 P,

$$\therefore k = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$$

故答案为: $\frac{5}{4}$.



点评: 本题考查了用待定系数法求反比例函数的解析式、相似三角形的判定与性质、切线的性质、勾股定理等知识，有一定的综合性.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 满分 64 分, 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (8 分) (2014•日照) 为了进一步落实“节能减排”措施, 冬季供暖来临前, 某单位决定对 7200 平方米的“外墙保温”工程进行招标, 现有甲、乙两个工程队参与投标, 比较这两个工程队的标书发现: 乙队每天完成的工程量是甲队的 1.5 倍, 这样乙队单独干比甲队单独干能提前 15 天完成任务. 问甲队每天完成多少平方米?

考点: 分式方程的应用.

分析: 设甲队每天完成 x 米², 乙队每天完成 $1.5x$ 米². 则依据“乙队单独干比甲队单独干能提前 15 天完成任务”列出方程.

解答: 解: 设甲队每天完成 x 米², 乙队每天完成 $1.5x$ 米², 根据题意得.

$$\frac{7200}{x} - \frac{7200}{1.5x} = 15,$$

解得 $x=160$,

经检验, $x=160$, 是所列方程的解.

答: 甲队每天完成 160 米².

点评: 本题考查了分式方程的应用. 分析题意, 找到合适的等量关系是解决问题的关键.

18. (8 分) (2014•日照) 在某班“讲故事”比赛中有一个抽奖活动, 活动规则是: 只有进入最后决赛的甲、乙、丙三位同学, 每人才能获得一次抽奖机会. 在如图所示的翻奖牌正面的 4 个数字中选一个数字, 选中后就可以得到该数字后面的相应奖品: 前面的人选中的数字, 后面的人就不能再选择数字了.

1	2
3	4

翻奖牌正面

文具	计算器
计算器	篮球

翻奖牌背面

面的人就不能再选择数字了.

(1) 请用树状图 (或列表) 的方法求甲、乙二人得到的奖品都是计算器的概率.

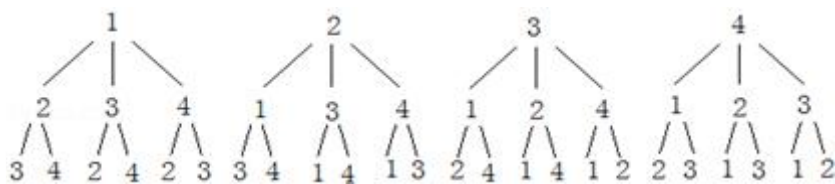
(2) 有的同学认为, 如果甲先翻奖牌, 那么他得到篮球的概率会大些, 这种说法正确吗? 请说明理由.

考点: 列表法与树状图法.

分析: (1) 首先画树形图可知: 一共有 24 种情况, 甲、乙二人都得到计算器共有 4 种情况除以总情况数即为所求概率;

(2) 根据 (1) 中的树形图, 分别求出甲、乙、丙得到篮球的概率即可.

解答: 解: (1) 所有获奖情况的树状图如下:



共有 24 种可能的情况，其中甲、乙二人都得到计算器共有 4 种情况，

所以，甲、乙二人都得计算器的概率为： $P = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$;

(2) 这种说法是不正确的. 由上面的树状图可知共有 24 种可能情况:

甲得到篮球有六种可能情况: $P(\text{甲}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$,

乙得到篮球有六种可能情况: $P(\text{乙}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$,

丙得到篮球有六种可能情况: $P(\text{丙}) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$,

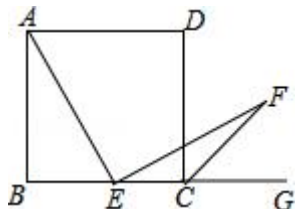
所以甲、乙、丙三人不管谁先翻奖牌得到篮球的概率都相等.

点评: 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 适合于两步完成的事件. 游戏双方获胜的概率相同, 游戏就公平, 否则游戏不公平. 用到的知识点为: 概率=所求情况数与总情况数之比.

19. (10 分) (2014•日照) 如图, 在正方形 ABCD 中, 边长 AB=3, 点 E (与 B, C 不重合) 是 BC 边上任意一点, 把 EA 绕点 E 顺时针方向旋转 90° 到 EF, 连接 CF.

(1) 求证: CF 是正方形 ABCD 的外角平分线;

(2) 当 $\angle BAE = 30^\circ$ 时, 求 CF 的长.



考点: 正方形的性质; 全等三角形的判定与性质; 解直角三角形.

分析: (1) 过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G, 易证 $\triangle ABE \cong \triangle EGF$, 所以可得到 $AB = EG$, $BE = FG$, 由此可得到 $\angle FCG = \angle 45^\circ$, 即 CF 平分 $\angle DCG$, 所以 CF 是正方形 ABCD 外角的平分线;

(2) 首先可求出 BE 的长, 即 FG 的长, 再在 $Rt\triangle CFG$ 中, 利用 $\cos 45^\circ$ 即可求出 CF 的长.

解答: (1) 证明: 过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G.

$\because \angle AEF = \angle B = \angle 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$.

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle EGF$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle B = \angle FGE = 90^\circ \\ AE = EF \end{cases}$$

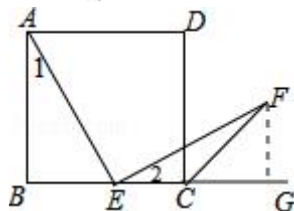
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle EGF$ (AAS).
 $\therefore AB=EG$, $BE=FG$.
 又 $\because AB=BC$,
 $\therefore BE=CG$,
 $\therefore FG=CG$,
 $\therefore \angle FCG = \angle 45^\circ$,
 即 CF 平分 $\angle DCG$,
 $\therefore CF$ 是正方形 $ABCD$ 外角的平分线.

$$(2) \because AB=3, \angle BAE=30^\circ, \tan 30^\circ = \frac{BE}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$BE = AB \cdot \tan 30^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } CG = \sqrt{3}.$$

$$\text{在 Rt}\triangle CFG \text{ 中, } \cos 45^\circ = \frac{CG}{CF},$$

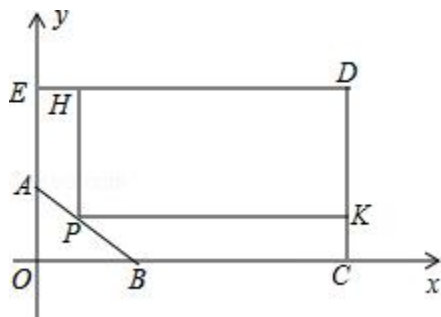
$$\therefore CF = \sqrt{6}.$$



点评: 主要考查了正方形的性质, 以及全等三角形的判定和性质、特殊角的三角函数值的运用, 题目的综合性较强, 难度中等.

20. (10 分) (2014•日照) 如图, 为了绿化小区, 某物业公司要在形如五边形 $ABCDE$ 的草坪上建一个矩形花坛 $PKDH$. 已知: $PH \parallel AE$, $PK \parallel BC$, $DE=100$ 米, $EA=60$ 米, $BC=70$ 米, $CD=80$ 米. 以 BC 所在直线为 x 轴, AE 所在直线为 y 轴, 建立平面直角坐标系, 坐标原点为 O .

- (I) 求直线 AB 的解析式.
- (II) 若设点 P 的横坐标为 x , 矩形 $PKDH$ 的面积为 S .
 - (1) 用 x 表示 S ;
 - (2) 当 x 为何值时, S 取最大值, 并求出这个最大值.



考点: 一次函数综合题.

分析: (I) 根据题意易求 A 、 B 的坐标为 $(0, 20)$ 、 $(30, 0)$. 利用待定系数法可以求得直线 AB 的解析式;

(II) (1) 点 P 的坐标可以表示为 $(x, -\frac{2}{3}x+20)$, 则 $PK=100-x$, $PH=80-(-\frac{2}{3}x+20)$
 $=60+\frac{2}{3}x$, 所以根据矩形的面积公式可以求得函数解析式为: $S=(100-x)(60+\frac{2}{3}x)$;

(2) 利用 (1) 中的二次函数的性质来求 S 的最大值.

解答: 解: (I) 如图所示, $\because OE=80$ 米, $OC=ED=100$ 米, $AE=60$ 米, $BC=70$ 米,

$\therefore OA=20$ 米, $OB=30$ 米,

即 A、B 的坐标为 $(0, 20)$ 、 $(30, 0)$.

设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b$ ($k \neq 0$), 则

$$\begin{cases} 30k+b=0 \\ b=20 \end{cases},$$

$$\text{解得, } \begin{cases} k=-\frac{2}{3} \\ b=20 \end{cases},$$

则直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{2}{3}x+20$;

(II) (1) 设点 P 的坐标为 $P(x, y)$.

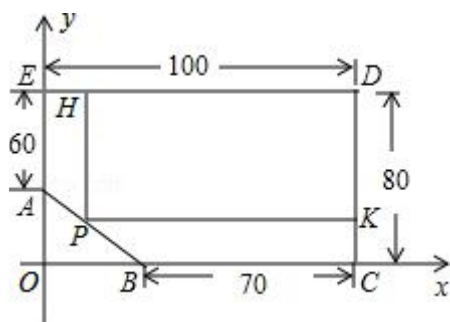
$\because$ 点 P 在直线 AB 上, 所以点 P 的坐标可以表示为 $(x, -\frac{2}{3}x+20)$,

$\therefore PK=100-x$, $PH=80-(-\frac{2}{3}x+20)=60+\frac{2}{3}x$,

$\therefore S=(100-x)(60+\frac{2}{3}x)$.

(2) 由 $S=(100-x)(60+\frac{2}{3}x)=-\frac{2}{3}(x-10)^2+\frac{18200}{3}$,

所以, 当 $x=10$ 时, 矩形面积的最大值为: $S_{\text{最大}}=\frac{18200}{3}$ 平方米.



点评: 本题主要考查函数模型的建立和应用, 主要涉及了用解析法解决平面问题, 矩形面积公式, 二次函数法求最值, 以及数形结合的思想.

21. (14 分) (2014•日照) 阅读资料: 小明是一个爱动脑筋的学生, 他在学习了有关圆的切线性质后, 意犹未尽, 又查阅到了与圆的切线相关的一个问题:

如图 1, 已知 PC 是 $\odot O$ 的切线, AB 是 $\odot O$ 的直径, 延长 BA 交切线 PC 与 P, 连接 AC、BC、OC.

因为 PC 是 $\odot O$ 的切线, AB 是 $\odot O$ 的直径, 所以 $\angle OCP = \angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\angle B = \angle 2$.

在 $\triangle PAC$ 与 $\triangle PCB$ 中, 又因为: $\angle P = \angle P$, 所以 $\triangle PAC \sim \triangle PCB$, 所以 $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$, 即 $PC^2 = PA \cdot PB$.

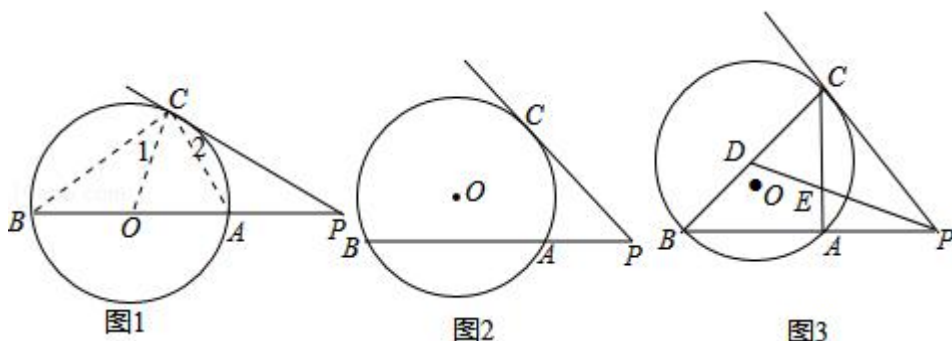
问题拓展:

(I) 如果 PB 不经过 $\odot O$ 的圆心 O (如图 2) 等式 $PC^2 = PA \cdot PB$, 还成立吗? 请证明你的结论;
综合应用:

(II) 如图 3, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, PC 是 $\odot O$ 的切线, C 是切点, BA 的延长线交 PC 于点 P ;

(1) 当 $AB = PA$, 且 $PC = 12$ 时, 求 PA 的值;

(2) D 是 BC 的中点, PD 交 AC 于点 E . 求证: $\frac{PC^2}{PA^2} = \frac{CE}{AE}$.



考点: 圆的综合题.

分析: (I) 证法一: 如图 2-1, 连接 PO 并延长交 $\odot O$ 于点 D, E , 连接 BD, AE , 易证得 $\triangle PBD \sim \triangle PEA$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 可得 $PA \cdot PB = PD \cdot PE$, 由图 1 知, $PC^2 = PD \cdot PE$, 即可证得结论;

证法二: 如图 2-2, 过点 C 作 $\odot O$ 的直径 CD , 连接 AD, BC, AC , 由 PC 是 $\odot O$ 的切线, 易证得 $\triangle PBC \sim \triangle PCA$, 然后由相似三角形的对应边成比例, 证得结论;

(II) (1) 由 (1) 得, $PC^2 = PA \cdot PB$, $PC = 12$, $AB = PA$, 即可求得 $PC^2 = PA \cdot PB = PA(PA + AB) = 2PA^2$, 继而求得答案;

(2) 证法一: 过点 A 作 $AF \parallel BC$, 交 PD 于点 F , 由平行线分线段成比例定理即可求得 $\frac{PB}{PA} = \frac{BD}{AF}$, $\frac{CD}{CE} = \frac{CE}{AE}$, 又由 $PC^2 = PA \cdot PB$, 即可证得结论;

证法二: 过点 A 作 $AG \parallel BC$, 交 BC 于点 G , 由平行线分线段成比例定理即可求得 $\frac{PB}{PA} = \frac{BD}{GD}$, $\frac{CD}{CE} = \frac{CE}{AE}$, 又由 $PC^2 = PA \cdot PB$, 即可证得结论.

解答: 解: (I) 当 PB 不经过 $\odot O$ 的圆心 O 时, 等式 $PC^2 = PA \cdot PB$ 仍然成立.

证法一: 如图 2-1, 连接 PO 并延长交 $\odot O$ 于点 D, E , 连接 BD, AE ,

$\therefore \angle B = \angle E$, $\angle BPD = \angle APE$,

$\therefore \triangle PBD \sim \triangle PEA$,

$\therefore \frac{PD}{PA} = \frac{PB}{PE}$,

即 $PA \cdot PB = PD \cdot PE$,

由图 1 知, $PC^2 = PD \cdot PE$,

$\therefore PC^2 = PA \cdot PB$.

证法二：如图 2-2，过点 C 作 $\odot O$ 的直径 CD，连接 AD，BC，AC，

$\because PC$ 是 $\odot O$ 的切线，

$\therefore PC \perp CD$ ，

$\therefore \angle CAD = \angle PCD = 90^\circ$ ，

即 $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ， $\angle D + \angle 1 = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle D = \angle 2$ ，

$\because \angle D = \angle B$ ，

$\therefore \angle B = \angle 2$ ，

$\angle P = \angle P$ ，

$\therefore \triangle PBC \sim \triangle PCA$ ，

所以 $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$ ，

即 $PC^2 = PA \cdot PB$ 。

(II) 由 (1) 得， $PC^2 = PA \cdot PB$ ， $PC = 12$ ， $AB = PA$ ，

$\therefore PC^2 = PA \cdot PB = PA(PA + AB) = 2PA^2$ ，

$\therefore 2PA^2 = 144$ ，

$\therefore PA = \pm 6\sqrt{2}$ (负值无意义，舍去)。

$\therefore PA = 6\sqrt{2}$ 。

(2) 证法一：过点 A 作 $AF \parallel BC$ ，交 PD 于点 F，

$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{BD}{AF}$ ， $\frac{CD}{AF} = \frac{CE}{AE}$ ，

$\because D$ 为 BC 的中点，

$\therefore BD = CD$ ，

$\therefore \frac{BD}{AF} = \frac{CD}{AF}$ ，

$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{CE}{AE}$ ，

$\therefore PC^2 = PA \cdot PB$ ，

$\therefore \frac{PC^2}{PA^2} = \frac{PA \cdot PB}{PA^2} = \frac{PB}{PA} = \frac{CE}{AE}$ ，

即 $\frac{PC^2}{PA^2} = \frac{CE}{AE}$ 。

证法二：过点 A 作 $AG \parallel BC$ ，交 BC 于点 G，

$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{BD}{GD}$ ， $\frac{CD}{DG} = \frac{CE}{AE}$ ，

$\because D$ 为 BC 的中点，

$\therefore BD = CD$ ，

$$\text{即 } \frac{PC^2}{PA^2} = \frac{CE}{AE}.$$



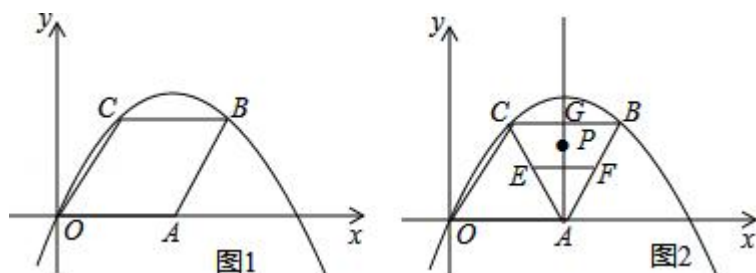
22. (14 分) (2014•日照) 如图 1, 在菱形 $OABC$ 中, 已知 $OA=2\sqrt{3}$, $\angle AOC=60^\circ$, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过 O, C, B 三点.

(II) 如图 2, 点 E 是 AC 的中点, 点 F 是 AB 的中点, 直线 AG 垂直 BC 于点 G, 点 P 在直线 AG 上.

22. (14 分) (2014•日照) 如图 1, 在菱形 $OABC$ 中, 已知 $OA=2\sqrt{3}$, $\angle AOC=60^\circ$, 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 经过 O, C, B 三点.

(1) 当 $OP+PC$ 的最小值时, 求出点 P 的坐标;

(2) 在 (1) 的条件下, 连接 PE 、 PF 、 EF 得 $\triangle PEF$, 问在抛物线上是否存在点 M , 使得以 M , B , C 为顶点的三角形与 $\triangle PEF$ 相似? 若存在, 请求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



考点: 二次函数综合题.

分析: (I) 作 $CH \perp OA$ 于点 H , 通过解三角函数求得 A 、 C 的坐标, 由菱形的性质得出 B 点的坐标, 然后应用待定系数法即可求得解析式.

(II) (1) 先求得抛物线的顶点坐标和与 x 轴的另一个交点坐标, 当 $OP+PC$ 最小时, 由对称性可知, $OP+PC=OB$. 由于 OB 是菱形 $ABCO$ 的对角线, 即可求得 $\angle AOB=30^\circ$, 然后通过解直角三角函数即可求得 AP 的长, 进而求得 P 点的坐标;

(2) 先求得 $\triangle PEF$ 是底角为 30° 的等腰三角形, 根据 $OC=BC=BD=2\sqrt{3}$, $\angle BOC=\angle BDC=30^\circ$, 求得 $\triangle OBC \sim \triangle BCD \sim \triangle PEF$, 又因为 $AQ=4$, $AG=3$, $BC=2\sqrt{3}$, 所以 $GQ=1$, $BG=\sqrt{3}$, 所以, $\tan \angle BGQ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 即 $\angle BGQ=30^\circ$, 得出 $\triangle BQC$ 也是

底角为 30° 的等腰三角形, 即可求得符合条件的点 M 的坐标.

解答: 解: (I) 如图 1, 作 $CH \perp OA$ 于点 H ,

四边形 $OABC$ 是菱形, $OA=2\sqrt{3}$, $\angle AOC=60^\circ$,

$OC=2\sqrt{3}$, $OH=\sin 60^\circ \cdot 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$, $CH=\cos 60^\circ \cdot 2\sqrt{3}=3$,

A 点坐标为 $(2\sqrt{3}, 0)$, C 点的坐标为 $(\sqrt{3}, 3)$,

由菱形的性质得 B 点的坐标为 $(3\sqrt{3}, 3)$.

设抛物线的解析式为 $y=ax^2+bx+c$, 根据题意得

$$\begin{cases} c=0 \\ 3a+\sqrt{3}b+c=3 \\ 27a+3\sqrt{3}b+c=3 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a=-\frac{1}{3}, b=\frac{4\sqrt{3}}{3}, c=0,$$

$$\text{所以, } y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x.$$

$$(II) (1) \text{ 如图 2, 由 (I) 知抛物线的解析式为: } y=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4\sqrt{3}}{3}x,$$

所以对称轴为 $x=2\sqrt{3}$, 顶点为 $Q(2\sqrt{3}, 4)$.

设抛物线与 x 轴的另一个交点为 D , 令 $y=0$, 得, $x^2-4\sqrt{3}x=0$,

解得 $x_1=0$, $x_2=4\sqrt{3}$,

所以点 D 的坐标为 $(4\sqrt{3}, 0)$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 0)$, 对称轴为 $x=2\sqrt{3}$,

且 $AG \perp BC$,

直线 AG 为抛物线的对称轴.

$\therefore$ B、C 两点关于直线 AG 对称,

当 $OP+PC$ 最小时,

由对称性可知, $OP+PC=OB$.

即 OB, AG 的交点为点 P,

$\therefore \angle AOC=60^\circ$, OB 为菱形 OABC 的对角线,

$\therefore \angle AOB=30^\circ$,

即 $AP=OA \tan 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$,

所以点 P 的坐标为 $(2\sqrt{3}, 2)$.

(2) 连接 OB, CD, CQ, BQ,

由 (1) 知直线 AG 为抛物线的对称轴,

则四边形 ODBC 是关于 AG 成轴对称的图形.

$\therefore$ 点 E 是 OB 中点, 点 F 是 AB 的中点, 点 P 在抛物线的对称轴上,

$\therefore PE=PF$, $EF \parallel OD$, $CQ=BQ$

$\angle PEF = \angle BOA = 30^\circ$,

即 $\triangle PEF$ 是底角为 30° 的等腰三角形.

在 $\triangle OBC$ 、 $\triangle BCD$ 中,

$OC=BC=BD=2\sqrt{3}$, $\angle BOC = \angle BDC = 30^\circ$,

所以 $\triangle OBC \sim \triangle BCD \sim \triangle PEF$,

所以, 符合条件的点的坐标为 $(0, 0)$, $(4\sqrt{3}, 0)$.

又因为 $AQ=4$, $AG=3$, $BC=2\sqrt{3}$,

所以 $GQ=1$, $BG=\sqrt{3}$,

所以, $\tan \angle BGQ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

即 $\angle BGQ = 30^\circ$,

$\triangle BQC$ 也是底角为 30° 的等腰三角形,

Q 点的 $(2\sqrt{3}, 4)$,

所以符合条件的点 M 的坐标为 $(0, 0)$, $(4\sqrt{3}, 0)$, $(2\sqrt{3}, 4)$.

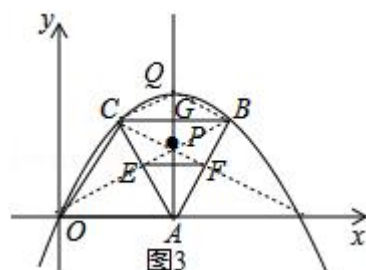
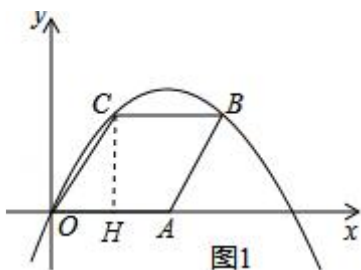
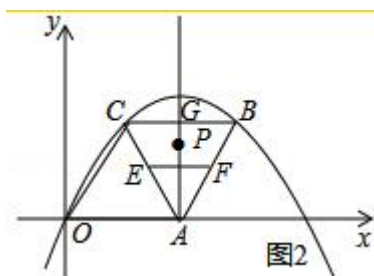


图3



点评: 本题考查了直角三角函数的应用，待定系数法求解析式，菱形的性质，等腰三角形的性质，三角形相似的判定等；连接 OB ， CD ， CQ ， BQ ，构建相似三角形是本题的关键．

