

2014 年山东省德州市中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 满分 36 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是正确的, 请把正确的选项选出来, 每小题选对得 3 分, 选错、不选或选出的答案超过一个均记零分)

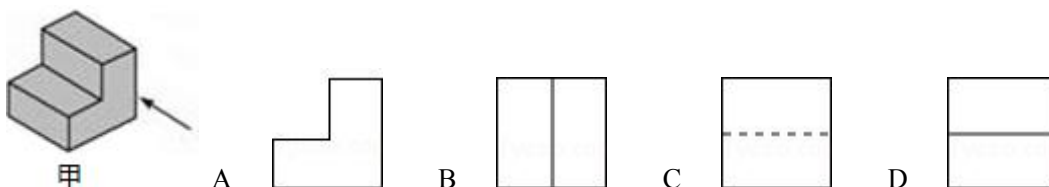
1. (3 分) (2014•德州) 下列计算正确的是 ()

- A. $-(-3)^2=9$ B. $\sqrt[3]{27}=3$ C. $-(-2)^0=1$ D. $|-3|=-3$

2. (3 分) (2014•德州) 下列银行标志中, 既不是中心对称图形也不是轴对称图形的是 ()



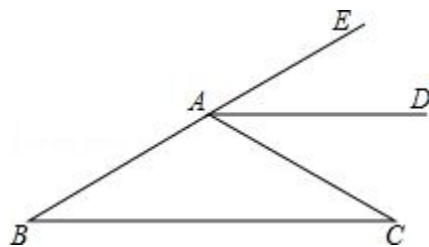
3. (3 分) (2014•德州) 图甲是某零件的直观图, 则它的主视图为 ()



4. (3 分) (2014•德州) 第六次全国人口普查数据显示, 德州市常住人口约为 556.82 万人, 此数用科学记数法表示正确的是 ()

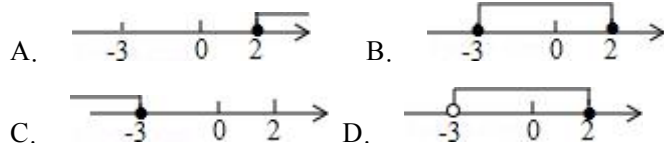
- A. 556.82×10^4 B. 5.5682×10^2 C. 5.5682×10^6 D. 5.5682×10^5

5. (3 分) (2014•德州) 如图, AD 是 $\angle EAC$ 的平分线, $AD \parallel BC$, $\angle B=30^\circ$, 则 $\angle C$ 为 ()

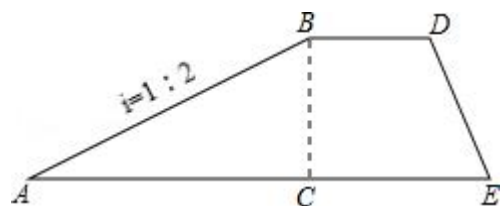


- A. 30° B. 60° C. 80° D. 120°

6. (3 分) (2014•德州) 不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{3}x+1>0 \\ 2-x\geq 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上可表示为 ()

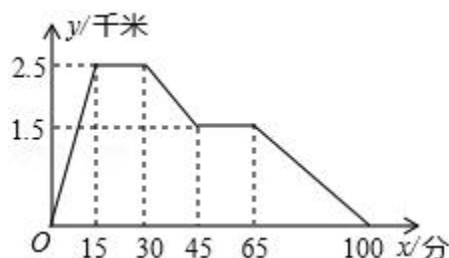


7. (3分) (2014•德州) 如图是拦水坝的横断面, 斜坡 AB 的水平宽度为 12 米, 斜面坡度为 1:2, 则斜坡 AB 的长为 ()



- A. $4\sqrt{3}$ 米 B. $6\sqrt{5}$ 米 C. $12\sqrt{5}$ 米 D. 24 米

8. (3分) (2014•德州) 图象中所反映的过程是: 张强从家跑步去体育场, 在那里锻炼了一阵后, 又去早餐店吃早餐, 然后散步走回家. 其中 x 表示时间, y 表示张强离家的距离. 根据图象提供的信息, 以下四个说法错误的是 ()



- A. 体育场离张强家 2.5 千米
B. 张强在体育场锻炼了 15 分钟
C. 体育场离早餐店 4 千米
D. 张强从早餐店回家的平均速度是 3 千米/小时
9. (3分) (2014•德州) 雷霆队的杜兰特当选为 2013 - 2014 赛季 *NBA* 常规赛 *MVP*, 下表是他 8 场比赛的得分, 则这 8 场比赛得分的众数与中位数分别为 ()

场次	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	30	28	28	38	23	26	39	42

- A. 29 28 B. 28 29 C. 28 28 D. 28 27
10. (3分) (2014•德州) 下列命题中, 真命题是 ()
- A. 若 $a > b$, 则 $c - a < c - b$
- B. 某种彩票中奖的概率是 1%, 买 100 张该种彩票一定会中奖
- C. 点 $M(x_1, y_1)$, 点 $N(x_2, y_2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上, 若 $x_1 < x_2$, 则 $y_1 > y_2$
- D. 甲、乙两射击运动员分别射击 10 次, 他们射击成绩的方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 4$, $S_{\text{乙}}^2 = 9$,

这过程中乙发挥比甲更稳定

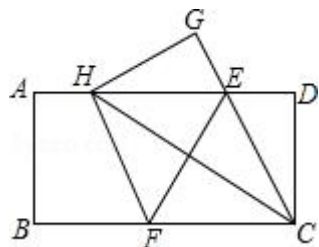
11. (3分) (2014•德州) 分式方程 $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$ 的解是 ()

- A. $x=1$ B. $x=-1+\sqrt{5}$ C. $x=2$ D. 无解

12. (3分) (2014•德州) 如图, 在一张矩形纸片 $ABCD$ 中, $AB=4$, $BC=8$, 点 E , F 分别在 AD , BC 上, 将纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠, 点 C 落在 AD 上的一点 H 处, 点 D 落在点 G 处, 有以下四个结论:

- ①四边形 $CFHE$ 是菱形;
 ② EC 平分 $\angle DCH$;
 ③线段 BF 的取值范围为 $3 \leq BF \leq 4$;
 ④当点 H 与点 A 重合时, $EF=2\sqrt{5}$.

以上结论中, 你认为正确的有 () 个.



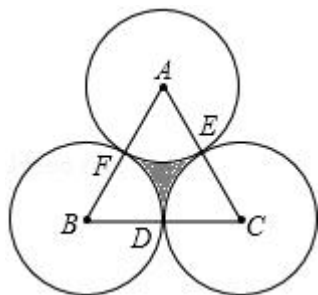
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分, 只要求填写最后结果, 每小题填对得 4 分)

13. (4分) (2014•德州) $-\frac{1}{3}$ 的相反数是_____.

14. (4分) (2014•德州) 若 $y = \frac{\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}}{2} - 2$, 则 $(x+y)^y =$ _____.

15. (4分) (2014•德州) 如图, 正三角形 ABC 的边长为 2, D 、 E 、 F 分别为 BC 、 CA 、 AB 的中点, 以 A 、 B 、 C 三点为圆心, 半径为 1 作圆, 则圆中阴影部分的面积是_____.



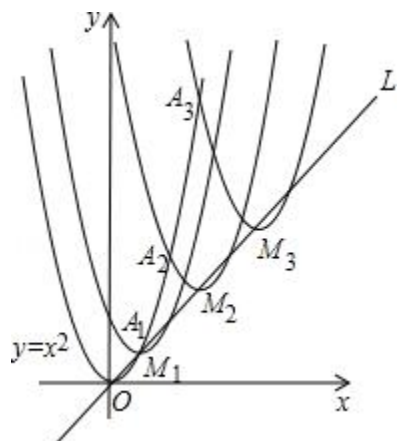
16. (4分) (2014•德州) 方程 $x^2 + 2kx + k^2 - 2k + 1 = 0$ 的两个实数根 x_1 , x_2 满足 $x_1^2 + x_2^2 = 4$, 则 k 的值为_____.

17. (4 分) (2014•德州) 如图, 抛物线 $y=x^2$ 在第一象限内经过的整数点 (横坐标、纵坐标都为整数的点) 依次为 $A_1, A_2, A_3 \dots A_n, \dots$. 将抛物线 $y=x^2$ 沿直线 $L: y=x$ 向上平移, 得一系列抛物线, 且满足下列条件:

① 抛物线的顶点 $M_1, M_2, M_3, \dots M_n, \dots$ 都在直线 $L: y=x$ 上;

② 抛物线依次经过点 $A_1, A_2, A_3 \dots A_n, \dots$.

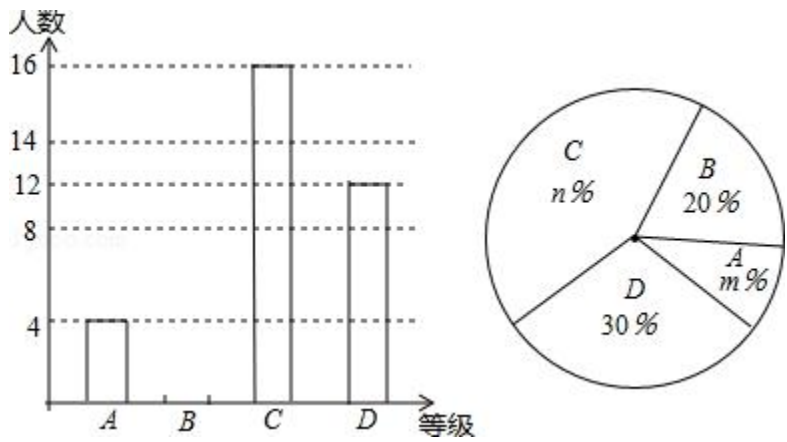
则顶点 M_{2014} 的坐标为 (_____, _____).



三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 61 分, 解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (6 分) (2014•德州) 先化简, 再求值: $\frac{a-b}{a+2b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2} - 1$. 其中 $a=2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ$, $b=1$.

19. (8分) (2014•德州) 2011年5月, 我市某中学举行了“中国梦•校园好少年”演讲比赛活动, 根据学生的成绩划分为A, B, C, D四个等级, 丙绘制了不完整的两种统计图.



根据图中提供的信息, 回答下列问题:

- (1) 参加演讲比赛的学生共有_____人, 并把条形图补充完整;
- (2) 扇形统计图中, $m=$ _____, $n=$ _____; C等级对应扇形的圆心角为_____度;
- (3) 学校欲从或A等级的学生中随机选取2人, 参加市举办的演讲比赛, 请利用列表法或树形图法, 求或A等级的小明参加市比赛的概率.

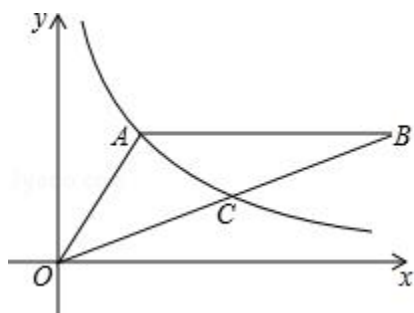
20. (8分) (2014•德州) 目前节能灯在城市已基本普及, 今年山东省面向县级及农村地区推广, 为响应号召, 某商场计划购进甲, 乙两种节能灯共1200只, 这两种节能灯的进价、售价如下表:

	进价 (元/只)	售价 (元/只)
甲型	25	30
乙型	45	60

- (1) 如何进货, 进货款恰好为46000元?
- (2) 如何进货, 商场销售完节能灯时获利最多且不超过进货价的30%, 此时利润为多少元?

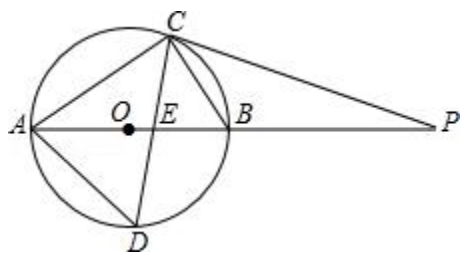
21. (10 分) (2014•德州) 如图, 双曲线 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$) 经过 $\triangle OAB$ 的顶点 A 和 OB 的中点 C , $AB \parallel x$ 轴, 点 A 的坐标为 $(2, 3)$.

- (1) 确定 k 的值;
- (2) 若点 $D(3, m)$ 在双曲线上, 求直线 AD 的解析式;
- (3) 计算 $\triangle OAB$ 的面积.



22. (10 分) (2014•德州) 如图, $\odot O$ 的直径 AB 为 10cm , 弦 BC 为 5cm , D 、 E 分别是 $\angle ACB$ 的平分线与 $\odot O$, AB 的交点, P 为 AB 延长线上一点, 且 $PC = PE$.

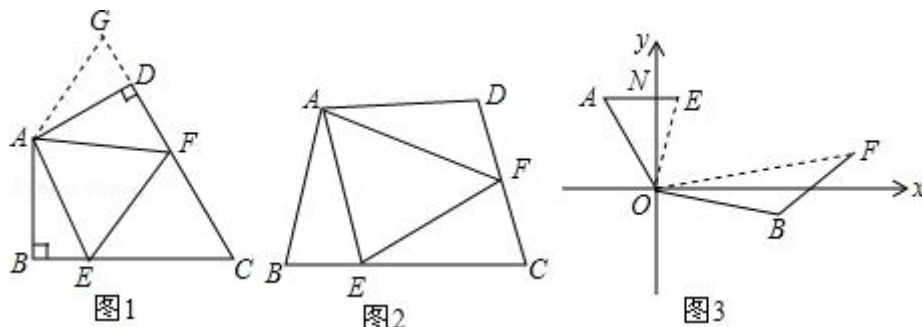
- (1) 求 AC 、 AD 的长;
- (2) 试判断直线 PC 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由.



23. (10 分) (2014•德州) 问题背景:

如图 1: 在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $\angle BAD=120^\circ$, $\angle B=\angle ADC=90^\circ$. E, F 分别是 BC, CD 上的点. 且 $\angle EAF=60^\circ$. 探究图中线段 BE, EF, FD 之间的数量关系.

小王同学探究此问题的方法是, 延长 FD 到点 G , 使 $DG=BE$. 连结 AG , 先证明 $\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出结论, 他的结论应是_____;



探索延伸:

如图 2, 若在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $\angle B+\angle D=180^\circ$. E, F 分别是 BC, CD 上的点, 且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$, 上述结论是否仍然成立, 并说明理由;

实际应用:

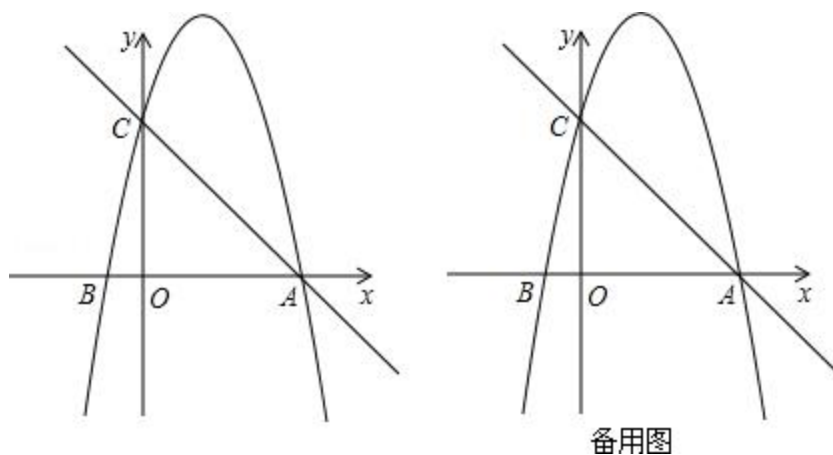
如图 3, 在某次军事演习中, 舰艇甲在指挥中心 (O 处) 北偏西 30° 的 A 处, 舰艇乙在指挥中心南偏东 70° 的 B 处, 并且两舰艇到指挥中心的距离相等, 接到行动指令后, 舰艇甲向正东方向以 60 海里/小时的速度前进, 舰艇乙沿北偏东 50° 的方向以 80 海里/小时的速度前进. 1.5 小时后, 指挥中心观测到甲、乙两舰艇分别到达 E, F 处, 且两舰艇之间的夹角为 70° , 试求此时两舰艇之间的距离.

24. (12 分) (2014•德州) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 A 的坐标是 $(4, 0)$, 并且 $OA=OC=4OB$, 动点 P 在过 A, B, C 三点的抛物线上.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 是否存在点 P , 使得 $\triangle ACP$ 是以 AC 为直角边的直角三角形? 若存在, 求出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由;

(3) 过动点 P 作 PE 垂直于 y 轴于点 E , 交直线 AC 于点 D , 过点 D 作 y 轴的垂线, 垂足为 F , 连接 EF , 当线段 EF 的长度最短时, 求出点 P 的坐标.



2014 年山东省德州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是正确的，请把正确的选项选出来，每小题选对得 3 分，选错、不选或选出的答案超过一个均记零分）

1. (3 分) (2014•德州) 下列计算正确的是 ()

A. $-(-3)^2=9$ B. $\sqrt[3]{27}=3$ C. $-(-2)^0=1$ D. $|-3|=-3$

考点：立方根；绝对值；有理数的乘方；零指数幂.

分析：A. 平方是正数，相反数应为负数，
B. 开立方符号不变.
C. 0 指数的幂为 1，1 的相反数是 -1.
D. 任何数的绝对值都 ≥ 0

解答：解：A、 $-(-3)^2=9$ 此选项错，

B、 $\sqrt[3]{27}=3$ ，此项正确，

C、 $-(-2)^0=1$ ，此项正确，

D、 $|-3|=-3$ ，此项错.

故选：B.

点评：本题主要考查立方根，绝对值，零指数的幂，解本题的关键是确定符号.

2. (3 分) (2014•德州) 下列银行标志中，既不是中心对称图形也不是轴对称图形的是 ()



考点：中心对称图形；轴对称图形.

分析：根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解.

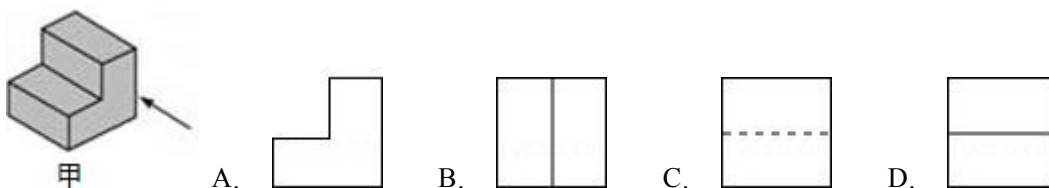
解答：解：A、是轴对称图形，也是中心对称图形，故此选项不合题意；

B、是轴对称图形，不是中心对称图形，故此选项不合题意；

C、是轴对称图形，也是中心对称图形．故此选项不合题意；
D、不是轴对称图形，也不是中心对称图形，故此选项符合题意；
故选 D．

点评： 此题主要考查了中心对称图形与轴对称图形的概念：轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分沿对称轴折叠后可重合；中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后与原图重合．

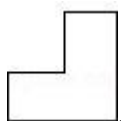
3. (3 分) (2014•德州) 图甲是某零件的直观图，则它的主视图为 ()



考点： 简单组合体的三视图．

分析： 根据主视图是从正面看得到的视图判定则可．

解答： 解：从正面看，主视图为



故选 A．

点评： 本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图．

4. (3 分) (2014•德州) 第六次全国人口普查数据显示，德州市常住人口约为 556.82 万人，此数用科学记数法表示正确的是 ()

A. 556.82×10^4 B. 5.5682×10^2 C. 5.5682×10^6 D. 5.5682×10^5

考点： 科学记数法—表示较大的数．

分析： 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

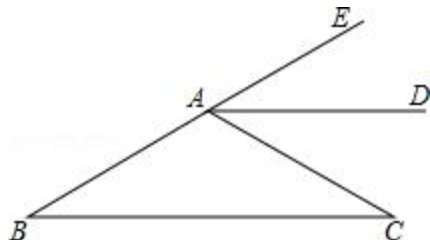
解答： 解：将 556.82 万人用科学记数法表示为 5.5682×10^6 元．

故答案为： 2.46619×10^{13} ．

故选：C.

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

5. (3 分) (2014•德州) 如图， AD 是 $\angle EAC$ 的平分线， $AD \parallel BC$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，则 $\angle C$ 为 ()



A. 30° B. 60° C. 80° D. 120°

考点：平行线的性质.

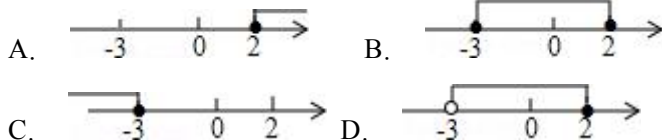
分析：根据两直线平行，同位角相等可得 $\angle EAD = \angle B$ ，再根据角平分线的定义求出 $\angle EAC$ ，然后根据三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和列式计算即可得解.

解答：解： $\because AD \parallel BC$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，
 $\therefore \angle EAD = \angle B = 30^\circ$ ，
 $\because AD$ 是 $\angle EAC$ 的平分线，
 $\therefore \angle EAC = 2 \angle EAD = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle C = \angle EAC - \angle B = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$.

故选 A.

点评：本题考查了平行线的性质，角平分线的定义，以及三角形的一个外角等于与它不相邻的两个内角的和的性质，熟记性质是解题的关键.

6. (3 分) (2014•德州) 不等式组 $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 1 > 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases}$ 的解集在数轴上可表示为 ()



考点：在数轴上表示不等式的解集；解一元一次不等式组

分析：先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分，然后把不等式的解集表示在数轴上即可.

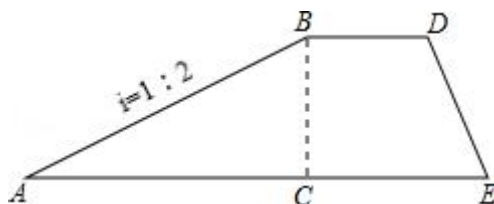
解不等式组得： $\begin{cases} x > -3 \\ x \leq 2 \end{cases}$ ，再分别表示在数轴上即可得解.

解答： $\begin{cases} \frac{1}{3}x+1 > 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x > -3 \\ x \leq 2 \end{cases}$ ，

故选：D.

点评： 本题考查了在数轴表示不等式的解集，把每个不等式的解集在数轴上表示出来（ $>$ ， $\geq$ 向右画； $<$ ， $\leq$ 向左画），数轴上的点把数轴分成若干段，如果数轴的某一段上面表示解集的线的条数与不等式的个数一样，那么这段就是不等式组的解集. 有几个就要几个. 在表示解集时“ $\geq$ ”，“ $\leq$ ”要用实心圆点表示；“ $<$ ”，“ $>$ ”要用空心圆点表示.

7. (3分) (2014•德州) 如图是拦水坝的横断面，斜坡 AB 的水平宽度为 12 米，斜面坡度为 1:2，则斜坡 AB 的长为 ()



A. $4\sqrt{3}$ 米 B. $6\sqrt{5}$ 米 C. $12\sqrt{5}$ 米 D. 24 米

考点： 解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题.

分析： 先根据坡度的定义得出 BC 的长，进而利用勾股定理得出 AB 的长.

解答： 解：在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\therefore \frac{BC}{AC} = i = \frac{1}{2}$ ， $AC = 12$ 米，

$\therefore BC = 6$ 米，

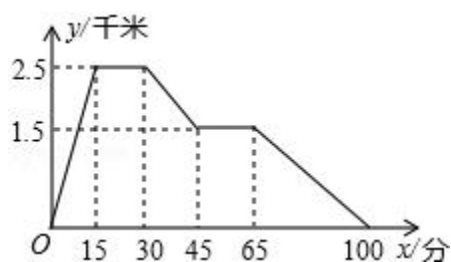
根据勾股定理得：

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 6\sqrt{5} \text{ 米，}$$

故选 B.

点评： 此题考查了解直角三角形的应用 - 坡度坡角问题，勾股定理，难度适中. 根据坡度的定义求出 BC 的长是解题的关键.

8. (3分) (2014•德州) 图象中所反映的过程是：张强从家跑步去体育场，在那里锻炼了一阵后，又去早餐店吃早餐，然后散步走回家. 其中 x 表示时间， y 表示张强离家的距离. 根据图象提供的信息，以下四个说法错误的是 ()



- A. 体育场离张强家 2.5 千米
- B. 张强在体育场锻炼了 15 分钟
- C. 体育场离早餐店 4 千米
- D. 张强从早餐店回家的平均速度是 3 千米/小时

考点：函数的图象

分析：结合图象得出张强从家直接到体育场，故第一段函数图象所对应的 y 轴的最高点即为体育场离张强家的距离；进而得出锻炼时间以及整个过程所用时间．由图中可以看出，体育场离张强家 2.5 千米，体育场离早餐店 $2.5 - 1.5$ 千米；平均速度=总路程÷总时间．

解答：解：A、由函数图象可知，体育场离张强家 2.5 千米，故此选项正确；

B 由图象可得出张强在体育场锻炼 $45 - 15 = 30$ （分钟），故此选项正确；

C、体育场离张强家 2.5 千米，体育场离早餐店 $2.5 - 1.5 = 1$ （千米），故此选项错误；

D、 $\because$ 张强从早餐店回家所用时间为 $100 - 65 = 35$ 分钟，距离为 1.5km ，

$\therefore$ 张强从早餐店回家的平均速度 $1.5 \div \frac{35}{60} = \frac{18}{7}$ （千米/时），故此选项正确．

故选：C．

点评：此题主要考查了函数图象与实际问题，根据已知图象得出正确信息是解题关键．

9. (3 分) (2014•德州) 雷霆队的杜兰特当选为 2013 - 2014 赛季 *NBA* 常规赛 *MVP*，下表是他 8 场比赛的得分，则这 8 场比赛得分的众数与中位数分别为 ()

场次	1	2	3	4	5	6	7	8
得分	30	28	28	38	23	26	39	42

- A. 29 28
- B. 28 29
- C. 28 28
- D. 28 27

考点：众数；中位数

分析：根据众数和中位数的概念求解．

解答：解：这组数据按照从小到大的顺序排列为：23，26，28，28，30，38，39，42，

则众数为：28，

中位数为： $\frac{28+30}{2}=29$.

故选 B.

点评： 本题考查了众数和中位数，一组数据中出现次数最多的数据叫做众数；将一组数据按照从小到大（或从大到小）的顺序排列，如果数据的个数是奇数，则处于中间位置的数就是这组数据的中位数；如果这组数据的个数是偶数，则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数.

10. (3 分) (2014•德州) 下列命题中，真命题是 ()

A. 若 $a > b$ ，则 $c - a < c - b$

B. 某种彩票中奖的概率是 1%，买 100 张该种彩票一定会中奖

C. 点 $M(x_1, y_1)$ ，点 $N(x_2, y_2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上，若 $x_1 < x_2$ ，则 $y_1 > y_2$

D. 甲、乙两射击运动员分别射击 10 次，他们射击成绩的方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 4$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 9$ ，

这过程中乙发挥比甲更稳定

考点： 命题与定理

专题： 常规题型.

分析： 根据不等式的性质对 A 进行判断；

根据概率的意义对 B 进行判断；

根据反比例函数的性质对 C 进行判断；

根据方差的意义对 D 进行判断.

解答： 解：A、当 $a > b$ ，则 $-a < -b$ ，所以 $c - a < c - b$ ，所以 A 选项正确；

B、某种彩票中奖的概率是 1%，买 100 张该种彩票不一定会中奖，所以 B 选项错误；

C、点 $M(x_1, y_1)$ ，点 $N(x_2, y_2)$ 都在反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的图象上，若 $0 < x_1 < x_2$ ，则 $y_1 > y_2$ ，所以 C 选项错误；

D、甲、乙两射击运动员分别射击 10 次，他们射击成绩的方差分别为 $S_{\text{甲}}^2 = 4$ ， $S_{\text{乙}}^2 = 9$ ，这过程中甲发挥比乙更稳定，所以 D 选项错误.

故选 A.

点评： 本题考查了命题与定理：判断一件事情的语句，叫做命题. 许多命题都是由题设和结论两部分组成，题设是已知事项，结论是由已知事项推出的事项，一个命题可以写成“如果...那么...”

形式；有些命题的正确性是用推理证实的，这样的真命题叫做定理.

11. (3分) (2014•德州) 分式方程 $\frac{x}{x-1} - 1 = \frac{3}{(x-1)(x+2)}$ 的解是 ()

- A. $x=1$ B. $x=-1+\sqrt{5}$ C. $x=2$ D. 无解

考点：解分式方程.

专题：计算题.

分析：分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解.

解答：解：去分母得： $x(x+2) - (x-1)(x+2) = 3$,

去括号得： $x^2+2x - x^2 - x+2=3$,

解得： $x=1$,

经检验 $x=1$ 是增根，分式方程无解.

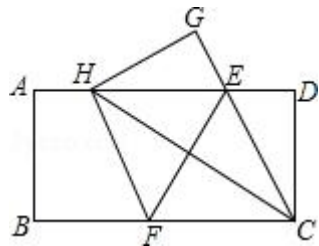
故选 D.

点评：此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定要注意要验根.

12. (3分) (2014•德州) 如图，在一张矩形纸片 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=8$ ，点 E ， F 分别在 AD ， BC 上，将纸片 $ABCD$ 沿直线 EF 折叠，点 C 落在 AD 上的一点 H 处，点 D 落在点 G 处，有以下四个结论：

- ①四边形 $CFHE$ 是菱形；
- ② EC 平分 $\angle DCH$ ；
- ③线段 BF 的取值范围为 $3 \leq BF \leq 4$ ；
- ④当点 H 与点 A 重合时， $EF=2\sqrt{5}$.

以上结论中，你认为正确的有 () 个.



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

考点：翻折变换（折叠问题）

分析：先判断出四边形 $CFHE$ 是平行四边形，再根据翻折的性质可得 $CF=FH$ ，然后根据邻边相等的平行四边形是菱形证明，判断出①正确；

根据菱形的对角线平分一组对角线可得 $\angle BCH = \angle ECH$ ，然后求出只有 $\angle DCE = 30^\circ$ 时 EC 平分 $\angle DCH$ ，判断出②错误；

点 H 与点 A 重合时，设 $BF = x$ ，表示出 $AF = FC = 8 - x$ ，利用勾股定理列出方程求解得到 BF 的最小值，点 G 与点 D 重合时， $CF = CD$ ，求出 $BF = 4$ ，然后写出 BF 的取值范围，判断出③正确；

过点 F 作 $FM \perp AD$ 于 M ，求出 ME ，再利用勾股定理列式求解得到 EF ，判断出④正确。

解答：解：∵ FH 与 CG ， EH 与 CF 都是矩形 $ABCD$ 的对边 AD 、 BC 的一部分，

$$\therefore FH \parallel CG, EH \parallel CF,$$

∴ 四边形 $CFHE$ 是平行四边形，

由翻折的性质得， $CF = FH$ ，

∴ 四边形 $CFHE$ 是菱形，故①正确；

$$\therefore \angle BCH = \angle ECH,$$

∴ 只有 $\angle DCE = 30^\circ$ 时 EC 平分 $\angle DCH$ ，故②错误；

点 H 与点 A 重合时，设 $BF = x$ ，则 $AF = FC = 8 - x$ ，

在 $Rt\triangle ABF$ 中， $AB^2 + BF^2 = AF^2$ ，

$$\text{即 } 4^2 + x^2 = (8 - x)^2,$$

解得 $x = 3$ ，

点 G 与点 D 重合时， $CF = CD = 4$ ，

$$\therefore BF = 4,$$

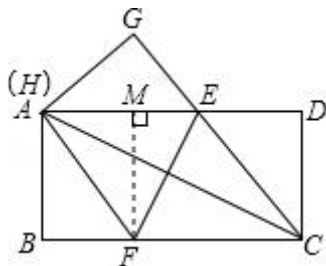
∴ 线段 BF 的取值范围为 $3 \leq BF \leq 4$ ，故③正确；

过点 F 作 $FM \perp AD$ 于 M ，则 $ME = (8 - 3) - 3 = 2$ ，

由勾股定理得， $EF = \sqrt{MF^2 + ME^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ ，故④正确；

综上所述，结论正确的有①③④共 3 个。

故选 C。



点评: 本题考查了翻折变换的性质, 菱形的判定与性质, 勾股定理的应用, 难点在于③判断出 BF 最小和最大时的两种情况.

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分, 只要求填写最后结果, 每小题填对得 4 分)

13. (4 分) (2014•德州) $-\frac{1}{3}$ 的相反数是 $-\frac{1}{3}$.

考点: 相反数.

分析: 求一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号.

解答: 解: $-\frac{1}{3}$ 的相反数是 $-(-\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

点评: 本题考查了相反数的意义, 一个数的相反数就是在这个数前面添上“-”号; 一个正数的相反数是负数, 一个负数的相反数是正数, 0 的相反数是 0. 学生易把相反数的意义与倒数的意义混淆.

14. (4 分) (2014•德州) 若 $y = \frac{\sqrt{x-4} + \sqrt{4-x}}{2} - 2$, 则 $(x+y)^{-2} = -\frac{1}{4}$.

考点: 二次根式有意义的条件.

分析: 根据被开方数大于等于 0 列式求出 x , 再求出 y , 然后代入代数式进行计算即可得解.

解答: 解: 由题意得, $x-4 \geq 0$ 且 $4-x \geq 0$,

解得 $x \geq 4$ 且 $x \leq 4$,

所以, $x=4$,

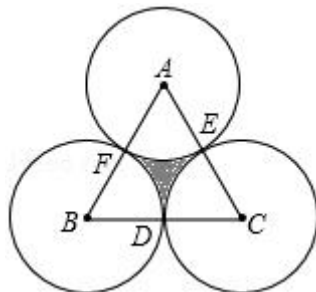
$y=-2$,

所以, $(x+y)^{-2} = (4-2)^{-2} = \frac{1}{4}$.

故答案为: $\frac{1}{4}$.

点评: 本题考查的知识点为: 二次根式的被开方数是非负数.

15. (4分) (2014•德州) 如图, 正三角形 ABC 的边长为 2, D 、 E 、 F 分别为 BC 、 CA 、 AB 的中点, 以 A 、 B 、 C 三点为圆心, 半径为 1 作圆, 则圆中阴影部分的面积是 $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$.



考点: 扇形面积的计算; 等边三角形的性质; 相切两圆的性质.

分析: 观察发现, 阴影部分的面积等于正三角形 ABC 的面积减去三个圆心角是 60° , 半径是 2 的扇形的面积.

解答: 解: 连接 AD .

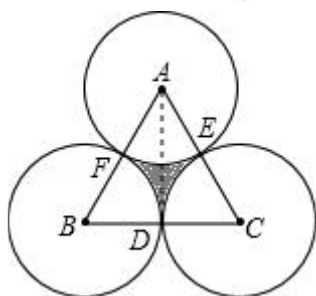
$\because \triangle ABC$ 是正三角形, $BD=CD=1$,

$\therefore \angle BAC=\angle B=\angle C=60^\circ$, $AD \perp BC$.

$\therefore AD=\sqrt{3}$.

$\therefore$ 阴影部分的面积 $=\frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{3}-3 \times \frac{60 \pi \times 1^2}{360}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$.

故答案为: $\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$.



点评: 此题主要考查了扇形面积的计算, 能够正确计算正三角形的面积和扇形的面积. 正三角形的面积等于边长的平方的 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 倍, 扇形的面积 $=\frac{n \pi R^2}{360}$.

16. (4分) (2014•德州) 方程 $x^2+2kx+k^2-2k+1=0$ 的两个实数根 x_1 , x_2 满足 $x_1^2+x_2^2=4$, 则 k 的值为 1.

考点: 根与系数的关系

分析: 由 $x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1 \cdot x_2+x_2^2-2x_1 \cdot x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1 \cdot x_2=4$, 然后根据根与系数的关系即可得到一

个关于 k 的方程，从而求得 k 的值.

解答: 解: $x_1^2+x_2^2=4$,

$$\text{即 } x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1\cdot x_2+x_2^2-2x_1\cdot x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2=4,$$

$$\text{又 } \because x_1+x_2=-2k, \quad x_1\cdot x_2=k^2-2k+1,$$

$$\text{代入上式有 } 4k^2-4(k^2-2k+1)=4,$$

解得 $k=1$.

故答案为: 1.

点评: 本题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$) 的根与系数的关系: 若方程的两根为 x_1, x_2 , 则

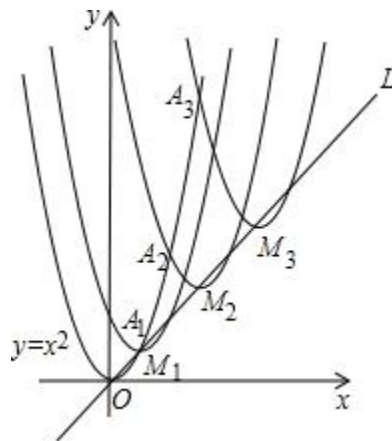
$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

17. (4分) (2014•德州) 如图, 抛物线 $y=x^2$ 在第一象限内经过的整数点 (横坐标、纵坐标都为整数的点) 依次为 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$. 将抛物线 $y=x^2$ 沿直线 $L: y=x$ 向上平移, 得一系列抛物线, 且满足下列条件:

① 抛物线的顶点 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ 都在直线 $L: y=x$ 上;

② 抛物线依次经过点 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$.

则顶点 M_{2014} 的坐标为 (4027, 4027).



考点: 二次函数图象与几何变换.

专题: 规律型.

分析: 根据抛物线 $y=x^2$ 与抛物线 $y_n=(x-a_n)^2+a_n$ 相交于 A_n , 可发现规律, 根据规律, 可得答案.

解答: 解: $M_1(a_1, a_1)$ 是抛物线 $y_1=(x-a_1)^2+a_1$ 的顶点,

抛物线 $y=x^2$ 与抛物线 $y_1=(x-a_1)^2+a_1$ 相交于 A_1 ,

$$\text{得 } x^2=(x-a_1)^2+a_1,$$

即 $2a_1x=a_1^2+a_1$,

$$x=\frac{1}{2}(a_1+1).$$

$\therefore x$ 为整数点

$$\therefore a_1=1,$$

$$M_1(1, 1);$$

$M_2(a_2, a_2)$ 是抛物线 $y_2=(x-a_2)^2+a_2=x^2-2a_2x+a_2^2+a_2$ 顶点,

抛物线 $y=x^2$ 与 y_2 相交于 A_2 ,

$$x^2=x^2-2a_2x+a_2^2+a_2,$$

$$\therefore 2a_2x=a_2^2+a_2,$$

$$x=\frac{1}{2}(a_2+1).$$

$\therefore x$ 为整数点,

$$\therefore a_2=3,$$

$$M_2(3, 3),$$

$M_3(a_3, a_3)$ 是抛物线 $y_3=(x-a_3)^2+a_3=x^2-2a_3x+a_3^2+a_3$ 顶点,

抛物线 $y=x^2$ 与 y_3 相交于 A_3 ,

$$x^2=x^2-2a_3x+a_3^2+a_3,$$

$$\therefore 2a_3x=a_3^2+a_3,$$

$$x=\frac{1}{2}(a_3+1).$$

$\therefore x$ 为整数点

$$\therefore a_3=5,$$

$$M_3(5, 5),$$

所以 $M_{2014}, 2014 \times 2 - 1 = 4027$

$$(4027, 4027),$$

故答案为: $(4027, 4027)$

点评: 本题考查了二次函数图象与几何变换, 定点沿直线 $y=x$ 平移是解题关键.

三、解答题 (本大题共 7 小题, 共 61 分, 解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

18. (6分) (2014•德州) 先化简, 再求值: $\frac{a-b}{a+2b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+4ab+4b^2} - 1$. 其中 $a=2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ$, $b=1$.

考点: 分式的化简求值; 特殊角的三角函数值

分析: 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再求出 a 的值, 把 a 、 b 的值代入进行计算即可.

解答: 解: 原式 $= \frac{a-b}{a+2b} \div \frac{(a+b)(a-b)}{(a+2b)^2} - 1$

$$= \frac{a-b}{a+2b} \cdot \frac{(a+2b)^2}{(a+b)(a-b)} - 1$$

$$= \frac{a+2b}{a+b} - 1$$

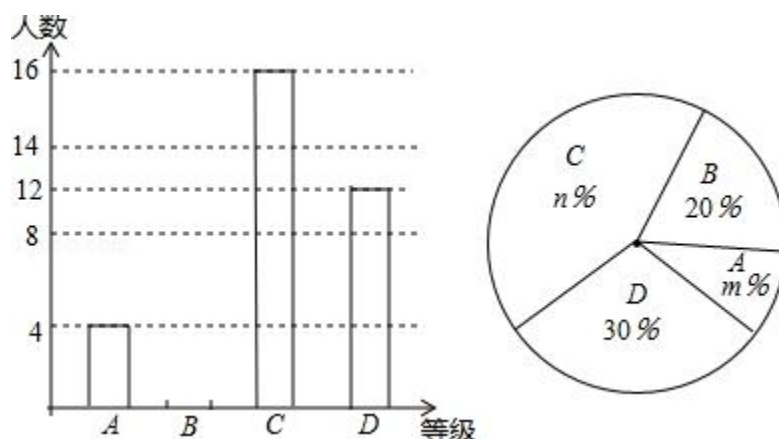
$$= \frac{b}{a+b},$$

$$\text{当 } a=2\sin 60^\circ - \tan 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = \sqrt{3} - 1, \quad b=1 \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = \frac{1}{(\sqrt{3}-1)+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

点评: 本题考查了分式的化简求值和特殊角的三角函数值, 要熟记特殊角的三角函数值.

19. (8分) (2014•德州) 2011年5月, 我市某中学举行了“中国梦•校园好少年”演讲比赛活动, 根据学生的成绩划分为 A , B , C , D 四个等级, 丙绘制了不完整的两种统计图.



根据图中提供的信息, 回答下列问题:

(1) 参加演讲比赛的学生共有 40 人, 并把条形图补充完整;

(2) 扇形统计图中, $m = \underline{10}$, $n = \underline{40}$; C 等级对应扇形的圆心角为 144 度;

(3) 学校欲从或 A 等级的学生中随机选取 2 人，参加市举办的演讲比赛，请利用列表法或树形图法，求或 A 等级的小明参加市比赛的概率.

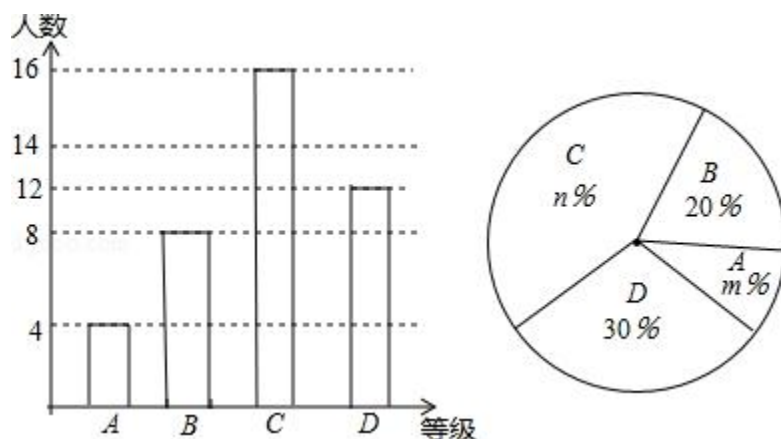
考点：条形统计图；扇形统计图；列表法与树状图法.

分析： (1) 根据 D 等级的有 12 人，占总数的 30%，即可求得总人数，利用总人数减去其它等级的人数求得 B 等级的人数，从而作出直方图；

(2) 根据百分比的定义求得 m 、 n 的值，利用 360° 乘以 C 等级所占的百分比即可求得对应的圆心角；

(3) 利用列举法即可求解.

解答： 解：(1) 参加演讲比赛的学生共有： $12 \div 30\% = 40$ (人)，
则 B 等级的人数是： $40 - 4 - 16 - 12 = 8$ (人).

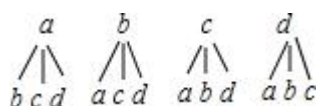


(2) A 所占的比例是： $\frac{4}{40} \times 100\% = 10\%$,

C 所占的百分比： $\frac{16}{40} \times 100\% = 40\%$.

C 等级对应扇形的圆心角是： $360 \times 40\% = 144^\circ$;

(3) 设 A 等级的小明用 a 表示，其他的几个学生用 b 、 c 、 d 表示.



共有 12 种情况，其中小明参加的情况有 6 种，则 P (小明参加比赛) $= \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

点评： 本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键. 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小.

20. (8分) (2014•德州) 目前节能灯在城市已基本普及, 今年山东省面向县级及农村地区推广, 为响应号召, 某商场计划购进甲, 乙两种节能灯共 1200 只, 这两种节能灯的进价、售价如下表:

	进价 (元/只)	售价 (元/只)
甲型	25	30
乙型	45	60

(1) 如何进货, 进货款恰好为 46000 元?

(2) 如何进货, 商场销售完节能灯时获利最多且不超过进货价的 30%, 此时利润为多少元?

考点: 一次函数的应用; 一元一次方程的应用

分析: (1) 设商场购进甲型节能灯 x 只, 则购进乙型节能灯 $(1200 - x)$ 只, 根据两种节能灯的总价为 46000 元建立方程求出其解即可;

(2) 设商场购进甲型节能灯 a 只, 则购进乙型节能灯 $(1200 - a)$ 只, 商场的获利为 y 元, 由销售问题的数量关系建立 y 与 a 的解析式就可以求出结论.

解答: 解: (1) 设商场购进甲型节能灯 x 只, 则购进乙型节能灯 $(1200 - x)$ 只, 由题意, 得 $25x + 45(1200 - x) = 46000$,

解得: $x = 400$.

$\therefore$ 购进乙型节能灯 $1200 - 400 = 800$ 只.

答: 购进甲型节能灯 400 只, 购进乙型节能灯 800 只进货款恰好为 46000 元;

(2) 设商场购进甲型节能灯 a 只, 则购进乙型节能灯 $(1200 - a)$ 只, 商场的获利为 y 元, 由题意, 得

$$y = (30 - 25)a + (60 - 45)(1200 - a),$$

$$y = -10a + 18000.$$

$\therefore$ 商场销售完节能灯时获利最多且不超过进货价的 30%,

$$\therefore -10a + 18000 \leq [25a + 45(1200 - a)] \times 30\%,$$

$$\therefore a \geq 450.$$

$$\therefore y = -10a + 18000,$$

$$\therefore k = -10 < 0,$$

$\therefore y$ 随 a 的增大而减小,

$\therefore a=450$ 时, y 最大=13500 元.

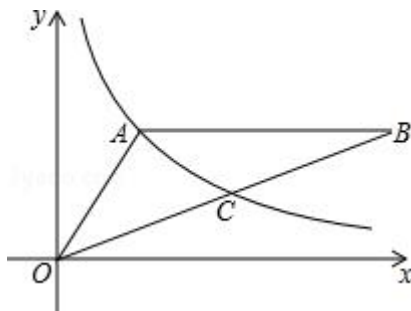
$\therefore$ 商场购进甲型节能灯 450 只, 购进乙型节能灯 750 只时的最大利润为 13500 元.

点评: 本题考查了单价 $\times$ 数量=总价的运用, 列了一元一次方程解实际问题的运用, 一次函数的解析式的运用, 解答时求出一次函数的解析式是关键.

21. (10 分) (2014•德州) 如图, 双曲线 $y=\frac{k}{x}$ ($x>0$) 经过 $\triangle OAB$ 的顶点 A 和 OB 的中点 C ,

$AB \parallel x$ 轴, 点 A 的坐标为 $(2, 3)$.

- (1) 确定 k 的值;
- (2) 若点 $D(3, m)$ 在双曲线上, 求直线 AD 的解析式;
- (3) 计算 $\triangle OAB$ 的面积.



考点: 反比例函数综合题.

专题: 综合题.

分析: (1) 将 A 坐标代入反比例解析式求出 k 的值即可;

(2) 将 D 坐标代入反比例解析式求出 m 的值, 确定出 D 坐标, 设直线 AD 解析式为 $y=kx+b$, 将 A 与 D 坐标代入求出 k 与 b 的值, 即可确定出直线 AD 解析式;

(3) 过点 C 作 $CN \perp y$ 轴, 垂足为 N , 延长 BA , 交 y 轴于点 M , 得到 CN 与 BM 平行, 进而确定出三角形 OCN 与三角形 OBM 相似, 根据 C 为 OB 的中点, 得到相似比为 1: 2, 确定出三角形 OCN 与三角形 OBM 面积比为 1: 4, 利用反比例函数 k 的意义确定出三角形 OCN 与三角形 AOM 面积, 根据相似三角形面积之比为 1: 4, 求出三角形 AOB 面积即可.

解答: 解: (1) 将点 $A(2, 3)$ 代入解析式 $y=\frac{k}{x}$, 得: $k=6$;

(2) 将 $D(3, m)$ 代入反比例解析式 $y=\frac{6}{x}$, 得: $m=\frac{6}{3}=2$,

$\therefore$ 点 D 坐标为 $(3, 2)$,

设直线 AD 解析式为 $y=kx+b$,

将 $A(2, 3)$ 与 $D(3, 2)$ 代入得: $\begin{cases} 2k+b=3 \\ 3k+b=2 \end{cases}$,

解得: $k=-1$, $b=5$,

则直线 AD 解析式为 $y=-x+5$;

(3) 过点 C 作 $CN \perp y$ 轴, 垂足为 N , 延长 BA , 交 y 轴于点 M ,

$\therefore AB \parallel x$ 轴,

$\therefore BM \perp y$ 轴,

$\therefore MB \parallel CN$,

$\therefore \triangle OCN \sim \triangle OBM$,

$\therefore C$ 为 OB 的中点, 即 $\frac{OC}{OB} = \frac{1}{2}$,

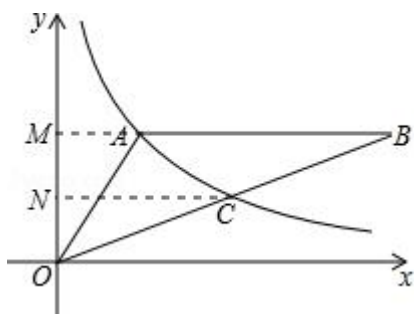
$\therefore \frac{S_{\triangle OCN}}{S_{\triangle OBM}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$,

$\therefore A, C$ 都在双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上,

$\therefore S_{\triangle OCN} = S_{\triangle AOM} = 3$,

由 $\frac{3}{3 + S_{\triangle AOB}} = \frac{1}{4}$, 得到 $S_{\triangle AOB} = 9$,

则 $\triangle AOB$ 面积为 9.

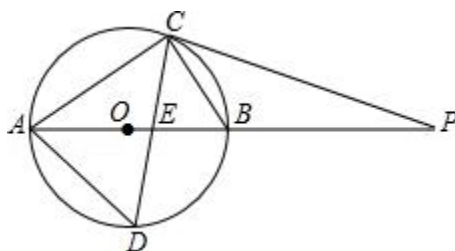


点评: 此题属于反比例函数综合题, 涉及的知识有: 待定系数法确定函数解析式, 坐标与图形性质, 相似三角形的判定与性质, 以及反比例函数 k 的意义, 熟练掌握待定系数法是解本题的关键.

22. (10 分) (2014•德州) 如图, $\odot O$ 的直径 AB 为 10cm , 弦 BC 为 5cm , D, E 分别是 $\angle ACB$ 的平分线与 $\odot O$, AB 的交点, P 为 AB 延长线上一点, 且 $PC=PE$.

(1) 求 AC 、 AD 的长;

(2) 试判断直线 PC 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由.



考点：切线的判定；勾股定理；圆周角定理.

分析： (1) ①连接 BD ，先求出 AC ，在 $RT\triangle ABC$ 中，运用勾股定理求 AC ，②由 CD 平分 $\angle ACB$ ，得出 $AD=BD$ ，所以 $RT\triangle ABD$ 是直角等腰三角形，求出 AD ，②连接 OC ，

(2) 由角的关系求出 $\angle PCB=\angle ACO$ ，可得到 $\angle OCP=90^\circ$ ，所以直线 PC 与 $\odot O$ 相切.

解答： 解：(1) ①如图，连接 BD ，

$\because AB$ 是直径，

$\therefore \angle ACB=\angle ADB=90^\circ$ ，

在 $RT\triangle ABC$ 中，

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8,$$

② $\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ，

$\therefore AD=BD$ ，

$\therefore Rt\triangle ABD$ 是直角等腰三角形，

$$\therefore AD=\frac{\sqrt{2}}{2}AB=\frac{\sqrt{2}}{2}\times 10=5\sqrt{2}cm;$$

(2) 直线 PC 与 $\odot O$ 相切，

理由：连接 OC ，

$\because OC=OA$ ，

$\therefore \angle CAO=\angle OCA$ ，

$\because PC=PE$ ，

$\therefore \angle PCE=\angle PEC$ ，

$\because \angle PEC=\angle CAE+\angle ACE$ ，

$\because CD$ 平分 $\angle ACB$ ，

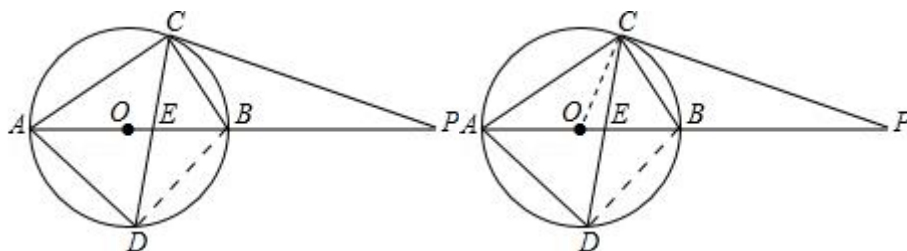
$\therefore \angle ACE=\angle ECB$ ，

$\therefore \angle PCB=\angle ACO$ ，

$\because \angle ACB=90^\circ$ ，

$\therefore \angle OCP=\angle OCB+\angle PCB=\angle ACO+\angle OCB=\angle ACB=90^\circ$ ，

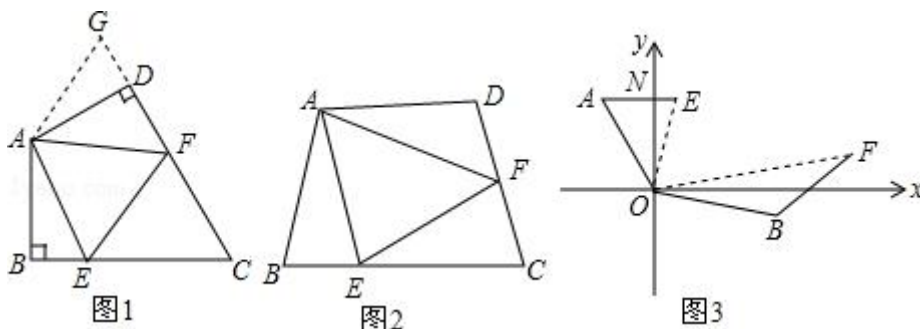
∴ 直线 PC 与 $\odot O$ 相切.



23. (10 分) (2014•德州) 问题背景:

小王同学探究此问题的方法是，延长 FD 到点 G ，使 $DG=BE$ ，连结 AG ，先证明

$\triangle ABE \cong \triangle ADG$, 再证明 $\triangle AEF \cong \triangle AGF$, 可得出结论, 他的结论应是 $EF=BE+DF$;



如图 2, 若在四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD$, $\angle B+\angle D=180^\circ$. E, F 分别是 BC, CD 上的点, 且 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD$, 上述结论是否仍然成立, 并说明理由;

如图 3, 在某次军事演习中, 舰艇甲在指挥中心 (O 处) 北偏西 30° 的 A 处, 舰艇乙在指挥中心南偏东 70° 的 B 处, 并且两舰艇到指挥中心的距离相等, 接到行动指令后, 舰艇甲向正东方向以 60 海里/小时的速度前进, 舰艇乙沿北偏东 50° 的方向以 80 海里/小时的速度前进. 1.5 小时后, 指挥中心观测到甲、乙两舰艇分别到达 E, F 处, 且两舰艇之间的夹角为 70° , 试求此时两舰艇之间的距离.

考点：全等三角形的判定与性质.

分析：问题背景：根据全等三角形对应边相等解答；

探索延伸：延长 FD 到 G ，使 $DG=BE$ ，连接 AG ，根据同角的补角相等求出 $\angle B=\angle ADG$ ，然后利用“边角边”证明 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $AE=AG$ ， $\angle BAE=\angle DAG$ ，再求出 $\angle EAF=\angle GAF$ ，然后利用“边角边”证明 $\triangle AEF$ 和 $\triangle GAF$ 全等，根据全等三角形对应边相等可得 $EF=GF$ ，然后求解即可；

实际应用：连接 EF ，延长 AE 、 BF 相交于点 C ，然后求出 $\angle EAF=\frac{1}{2}\angle AOB$ ，判断出符合探索延伸的条件，再根据探索延伸的结论解答即可。

解答：解：问题背景： $EF=BE+DF$ ；

探索延伸： $EF=BE+DF$ 仍然成立。

证明如下：如图，延长 FD 到 G ，使 $DG=BE$ ，连接 AG ，

$$\because \angle B+\angle ADC=180^\circ, \angle ADC+\angle ADG=180^\circ,$$

$$\therefore \angle B=\angle ADG,$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADG$ 中，

$$\begin{cases} DG=BE \\ \angle B=\angle ADG, \\ AB=AD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADG \quad (SAS),$$

$$\therefore AE=AG, \angle BAE=\angle DAG,$$

$$\because \angle EAF=\frac{1}{2}\angle BAD,$$

$$\therefore \angle GAF=\angle DAG+\angle DAF=\angle BAE+\angle DAF=\angle BAD-\angle EAF=\angle EAF,$$

$$\therefore \angle EAF=\angle GAF,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle GAF$ 中，

$$\begin{cases} AE=AG \\ \angle EAF=\angle GAF, \\ AF=AF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle GAF \quad (SAS),$$

$$\therefore EF=FG,$$

$$\therefore FG=DG+DF=BE+DF,$$

$$\therefore EF=BE+DF;$$

实际应用：如图，连接 EF ，延长 AE 、 BF 相交于点 C ，

$$\because \angle AOB=30^\circ+90^\circ+(90^\circ-70^\circ)=140^\circ,$$

$$\angle EOF=70^{\circ},$$

$$\therefore \angle EAF=\frac{1}{2}\angle AOB,$$

$$\text{又}\because OA=OB,$$

$$\angle OAC+\angle OBC=(90^{\circ}-30^{\circ})+(70^{\circ}+50^{\circ})=180^{\circ},$$

$\therefore$ 符合探索延伸中的条件,

$\therefore$ 结论 $EF=AE+BF$ 成立,

即 $EF=1.5\times(60+80)=210$ 海里.

答: 此时两舰艇之间的距离是 210 海里.

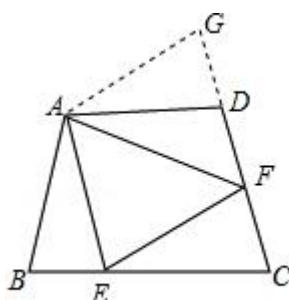


图2

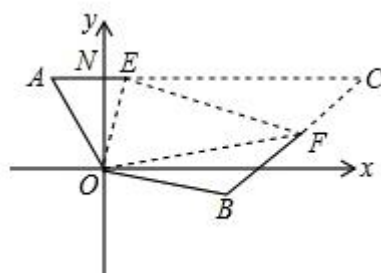


图3

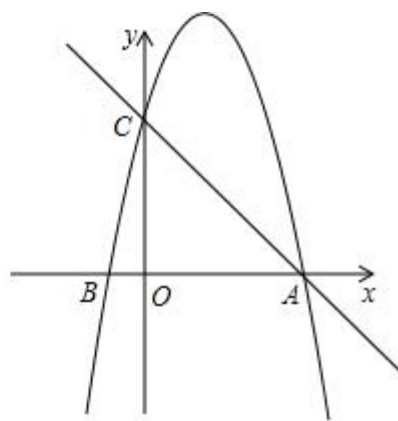
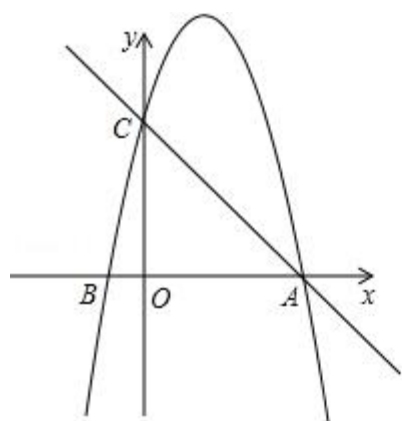
点评: 本题考查了全等三角形的判定与性质, 读懂问题背景的求解思路, 作辅助线构造出全等三角形并两次证明三角形全等是解题的关键, 也是本题的难点.

24. (12 分) (2014•德州) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知点 A 的坐标是 $(4, 0)$, 并且 $OA=OC=4OB$, 动点 P 在过 A, B, C 三点的抛物线上.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 是否存在点 P , 使得 $\triangle ACP$ 是以 AC 为直角边的直角三角形? 若存在, 求出所有符合条件的点 P 的坐标; 若不存在, 说明理由;

(3) 过动点 P 作 PE 垂直于 y 轴于点 E , 交直线 AC 于点 D , 过点 D 作 y 轴的垂线, 垂足为 F , 连接 EF , 当线段 EF 的长度最短时, 求出点 P 的坐标.



备用图

考点：二次函数综合题.

分析：（1）根据 A 的坐标，即可求得 OA 的长，则 B 、 C 的坐标即可求得，然后利用待定系数法即可求得函数的解析式；

（2）分点 A 为直角顶点时，和 C 的直角顶点两种情况讨论，根据 $OA=OC$ ，即可列方程求解；

（3）据垂线段最短，可得当 $OD \perp AC$ 时， OD 最短，即 EF 最短，根据等腰三角形的性质， D 是 AC 的中点，则 $DF = \frac{1}{2}OC$ ，即可求得 P 的纵坐标，代入二次函数的解析式，即可求得横坐标，得到 P 的坐标.

解答：解：（1）由 $A(4, 0)$ ，可知 $OA=4$ ，

$$\therefore OA=OC=4OB,$$

$$\therefore OA=OC=4, OB=1,$$

$$\therefore C(0, 4), B(-1, 0).$$

设抛物线的解析式是 $y=ax^2+bx+c$ ，

$$\text{则} \begin{cases} a-b+c=0 \\ 16a+4b+c=0 \\ c=4 \end{cases}$$

$$\text{解得:} \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ c=4 \end{cases},$$

则抛物线的解析式是： $y=-x^2+3x+4$ ；

（2）存在.

第一种情况，当以 C 为直角顶点时，过点 C 作 $CP_1 \perp AC$ ，交抛物线于点 P_1 . 过点 P_1 作 y 轴的垂线，垂足是 M .

$$\because \angle ACP_1=90^\circ,$$

$$\therefore \angle MCP_1+\angle ACO=90^\circ.$$

$$\because \angle ACO+\angle OAC=90^\circ,$$

$$\therefore \angle MCP_1=\angle OAC.$$

$$\because OA=OC,$$

$$\therefore \angle MCP_1=\angle OAC=45^\circ,$$

$$\therefore \angle MCP_1=\angle MP_1C,$$

$$\therefore MC=MP_1,$$

$$\text{设 } P(m, -m^2+3m+4), \text{ 则 } m=-m^2+3m+4-4,$$

$$\text{解得: } m_1=0 \text{ (舍去)}, m_2=2.$$

$$\therefore -m^2+3m+4=6,$$

$$\text{即 } P(2, 6).$$

第二种情况, 当点 A 为直角顶点时, 过 A 作 AP_2 , AC 交抛物线于点 P_2 , 过点 P_2 作 y 轴的垂线, 垂足是 N , AP 交 y 轴于点 F .

$$\therefore P_2N \parallel x \text{ 轴},$$

$$\text{由 } \angle CAO=45^\circ,$$

$$\therefore \angle OAP=45^\circ,$$

$$\therefore \angle FP_2N=45^\circ, AO=OF.$$

$$\therefore P_2N=NF,$$

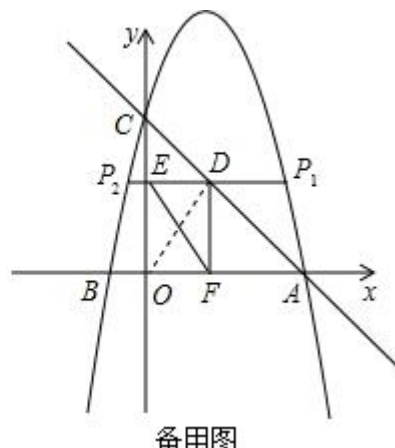
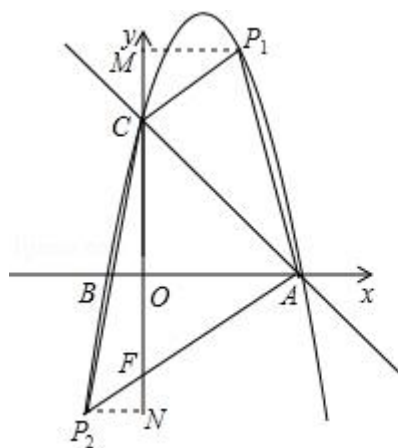
$$\text{设 } P_2(n, -n^2+3n+4), \text{ 则 } n=(-n^2+3n+4)-1,$$

$$\text{解得: } n_1=-2, n_2=4 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore -n^2+3n+4=-6,$$

$$\text{则 } P_2 \text{ 的坐标是 } (-2, -6).$$

综上所述, P 的坐标是 $(2, 6)$ 或 $(-2, -6)$;



备用图

(3) 连接 OD ，由题意可知，四边形 $OFDE$ 是矩形，则 $OD=EF$ 。

根据垂线段最短，可得当 $OD \perp AC$ 时， OD 最短，即 EF 最短。

由 (1) 可知，在直角 $\triangle AOC$ 中， $OC=OA=4$ ，

$$\text{则 } AC = \sqrt{OC^2 + OA^2} = 4\sqrt{2}.$$

根据等腰三角形的性质， D 是 AC 的中点。

又 $\because DF \parallel OC$ ，

$$\therefore DF = \frac{1}{2}OC = 2,$$

$\therefore$ 点 P 的纵坐标是 2。

$$\text{则 } -x^2 + 3x + 1 = 2,$$

$$\text{解得: } x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2},$$

$$\therefore \text{当 } EF \text{ 最短时, 点 } P \text{ 的坐标是: } \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, 0\right) \text{ 或 } \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 0\right).$$

点评: 本题是二次函数的综合题型，其中涉及到的知识点有待定系数法求抛物线的解析式，以及等腰三角形的性质。在求有关动点问题时要注意分析题意分情况讨论结果。