

2013 年潍坊市初中学业水平考试

一、**选择题** (本题共 12 小题, 在每小题给出的四个选项中, 只有一个是正确的, 请把正确的选项选出来. 每小题选对得 3 分, 选错、不选或选出的答案超过一个均记 0 分.)

1. 实数 0.5 的算术平方根等于 ().

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

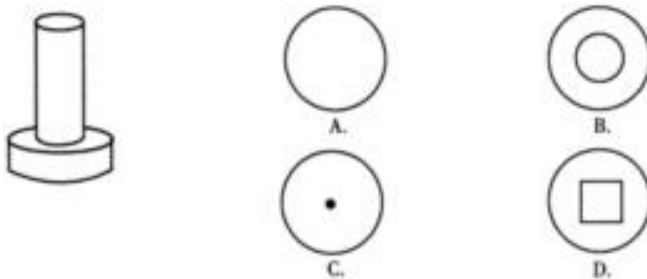
2. 下面的图形是天气预报中的图标, 其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 ().



3. 2012 年, 我国财政性教育经费支出实现了占国内生产总值比例达 4% 的目标. 其中在促进义务教育均衡发展方面, 安排义务教育教育经费保障教育机制改革资金达 865.4 亿元. 数据“865.4 亿元”用科学技术法可表示为 () 元.

- A. 865×10^8 B. 8.65×10^9 C. 8.65×10^{10} D. 0.865×10^{11}

4. 如图是常用的一种圆顶螺杆, 它的俯视图正确的是 ().



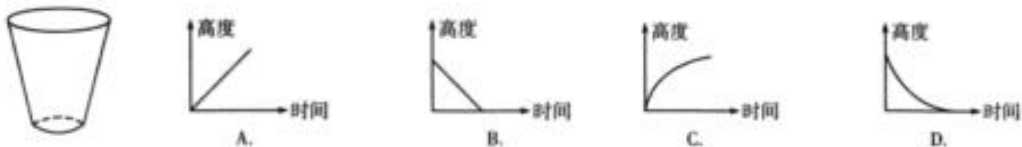
5. 在某校“我的中国梦”演讲比赛中, 有 9 名学生参加决赛, 他们决赛的最终成绩各不相同. 其中的一名学生想要知道自己能否进入前 5 名, 不仅要了解自己的成绩, 还要了解这 9 名学生成绩的 ().

- A. 众数 B. 方差 C. 平均数 D. 中位数

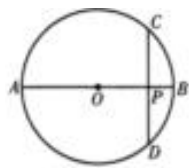
6. 设点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的两个点, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $y_1 < y_2$, 则一次函数 $y = -2x + k$ 的图象不经过的象限是 ().

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

7. 用固定的速度向如图所示形状的杯子里注水, 则能表示杯子里水面的高度和注水时间的关系的大致图象是 ().



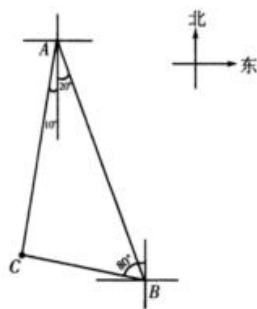
8. 如图, $\odot O$ 的直径 $AB=12$, CD 是 $\odot O$ 的弦, $CD \perp AB$, 垂足为 P , 且 $BP:AP=1:5$, 则 CD 的长为 ().



- A. $4\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$

9. 一渔船在海岛 A 南偏东 20° 方向的 B 处遇险, 测得海岛 A 与 B 的距离为 20 海里, 渔船将险情报告给位于 A 处的救援船后, 沿北偏西 80° 方向向海岛 C 靠近. 同时, 从 A 处出发的救援船沿南偏西 10° 方向匀速航行. 20 分钟后, 救援船在海岛 C 处恰好追上渔船, 那么救援船航行的速度为 () .

- A. $10\sqrt{3}$ 海里/小时
B. 30 海里/小时
C. $20\sqrt{3}$ 海里/小时
D. $30\sqrt{3}$ 海里/小时



10. 已知关于 x 的方程 $kx^2 + (1-k)x - 1 = 0$, 下列说法正确的是 () .

- A. 当 $k = 0$ 时, 方程无解
B. 当 $k = 1$ 时, 方程有一个实数解
C. 当 $k = -1$ 时, 方程有两个相等的实数解
D. 当 $k \neq 0$ 时, 方程总有两个不相等的实数解

11. 为了研究吸烟是否对肺癌有影响, 某肿瘤研究所随机地调查了 10000 人, 并进行统计分析. 结果显示: 在吸烟者中患肺癌的比例是 2.5%, 在不吸烟者中患肺癌的比例是 0.5%, 吸烟者患肺癌的人数比不吸烟者患肺癌的人数多 22 人. 如果设这 10000 人中, 吸烟者患肺癌的人数为 x , 不吸烟者患肺癌的人数为 y , 根据题意, 下面列出的方程组正确的是 () .

- A.
$$\begin{cases} x - y = 22 \\ x \times 2.5\% + y \times 0.5\% = 10000 \end{cases}$$
- B.
$$\begin{cases} x - y = 22 \\ \frac{x}{2.5\%} + \frac{y}{0.5\%} = 10000 \end{cases}$$
- C.
$$\begin{cases} x + y = 10000 \\ x \times 2.5\% - y \times 0.5\% = 22 \end{cases}$$
- D.
$$\begin{cases} x + y = 10000 \\ \frac{x}{2.5\%} - \frac{y}{0.5\%} = 22 \end{cases}$$

12. 对于实数 x , 我们规定 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数, 例如 $[1.2] = 1$, $[3] = 3$, $[-2.5] = -3$, 若

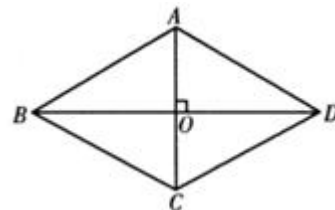
$$\left[\frac{x+4}{10} \right] = 5, \text{ 则 } x \text{ 的取值可以是 () .}$$

- A. 40 B. 45 C. 51 D. 56

二、填空题 (本大题共 6 小题, 共 18 分, 只要求填写最后结果, 每小题填对得 3 分.)

13. 方程 $\frac{x^2 + x}{x + 1} = 0$ 的根是_____.

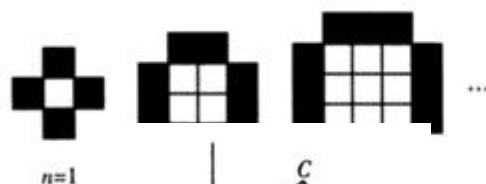
14. 如图, ABCD 是对角线互相垂直的四边形, 且 $OB=OD$, 请你添加一个适当的条件 _____ 使 ABCD 成为菱形. (只需添加一个即可)



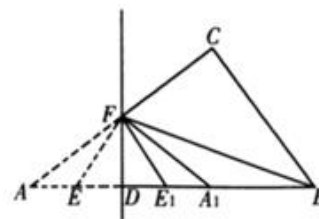
15. 分解因式: $(a + 2)(a - 2) + 3a =$ _____.

16. 一次函数 $y = -2x + b$ 中, 当 $x = 1$ 时, $y < 1$; 当 $x = -1$ 时, $y > 0$ 则 b 的取值范围是_____.

17. 当白色小正方形个数 n 等于 1, 2, 3... 时, 由白色小正方形和黑色小正方形组成的图形分别如图所示. 则第 n 个图形中白色小正方形和黑色小正方形的个数总和等于_____ (用 n 表示, n 是正整数)



18. 如图, 直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 6$, 在线段 AB 上取一点 D , 作 $DF \perp AB$ 交 AC 于点 F . 现将 $\triangle ADF$ 沿 DF 折叠, 使点 A 落在线段 DB 上, 对应点记为 A_1 ; AD 的中点 E 的对应点记为 E_1 . 若 $\triangle E_1FA_1 \sim \triangle E_1BF$, 则 $AD =$ _____.



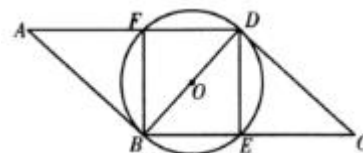
三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 66 分. 解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.)

19. (本题满分 10 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, 以对角线 BD 为直径作 $\odot O$, 分别于 BC 、 AD 相交于点 E 、 F .

(1) 求证四边形 $BEDF$ 为矩形.

(2) 若 $BD^2 = BE \cdot BC$ 试判断直线 CD 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由.



20. (本题满分 10 分)

为增强市民的节能意识, 我市试行阶梯电价. 从 2013 年开始, 按照每户每年的用电量分三个档次计费, 具体规定见右图. 小明统计了自己 2013 年前 5 个月的实际用电量为 1300 度, 请帮助小明分析下面问题.

(1) 若小明家计划 2013 年全年的用电量不超过 2520 度, 则 6 至 12 月份小明家平均每月用电量最多为多少度? (保留整数)

(2) 若小明家 2013 年 6 月至 12 月份平均每月用电量等于前 5 个月的平均每月用电量, 则小明家 2013 年应交总电费多少元?



21. (本题满分 10 分)

随着我国汽车产业的发展, 城市道路拥堵问题日益严峻. 某部门对 15 个城市的交通状况进行了调查, 得到的数据如下表所示:

项目 \ 城市	北京	太原	杭州	沈阳	广州	深圳	上海	桂林	南通	海口	南京	温州	威海	兰州	中山
上班花费时间（分钟）	52	33	34	34	48	46	47	23	24	24	37	25	24	25	18
上班堵车时间（分钟）	14	12	12	12	12	11	11	7	7	6	6	5	5	5	0

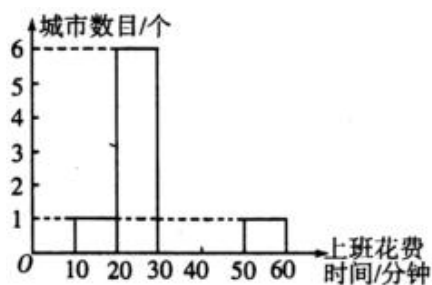
(1) 根据上班花费时间，将下面的频数分布直方图补充完整；

(2) 求 15 个城市的平均上班堵车时间（计算结果保留一位小数）；

(3) 规定：城市堵车率 = $\frac{\text{上班堵车时间}}{\text{上班花费时间} - \text{上班堵车时间}} \times 100\%$ ，比如：北京的堵车率

$$= \frac{14}{52 - 14} \times 100\% = 36.8\%；\text{沈阳的堵车率} = \frac{12}{34 - 12} \times 100\% = 54.5\%。$$

某人欲从北京、沈阳、上海、温州四个城市中任意选取两个作为出发目的地，求选取的两个城市的堵车率都超过 30% 的概率。



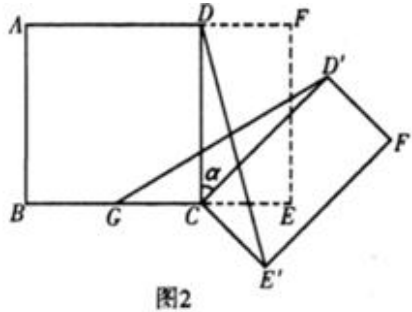
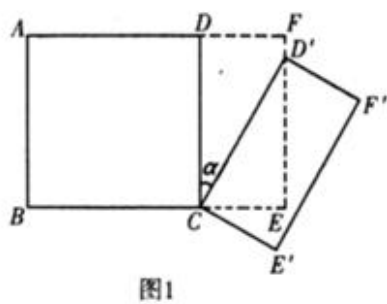
22. (本题满分 11 分)

如图 1 所示，将一个边长为 2 的正方形 $ABCD$ 和一个长为 2、宽为 1 的长方形 $CEFD$ 拼在一起，构成一个大的长方形 $ABEF$ 。现将小长方形 $CEFD$ 绕点 C 顺时针旋转至 $CE'F'D'$ ，旋转角为 α 。

(1) 当点 D' 恰好落在 EF 边上时，求旋转角 α 的值；

(2) 如图 2， G 为 BC ，且 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，求证： $GD' = E'D$ ；

(3) 小长方形 $CEFD$ 绕点 C 顺时针旋转一周的过程中, $\triangle DCD'$ 与 $\triangle CBD'$ 能否全等? 若能, 直接写出旋转角 α 的值; 若不能, 说明理由.

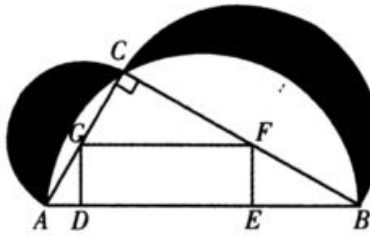


23. (本题满分 12 分)

为了改善市民的生活环境, 我是在某河滨空地处修建一个如图所示的休闲文化广场. 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内修建矩形水池 $DEFG$, 使顶点 D 、 E 在斜边 AB 上, F 、 G 分别在直角边 BC 、 AC 上; 又分别以 AB 、 BC 、 AC 为直径作半圆, 它们交出两弯新月 (图中阴影部分), 两弯新月部分栽植花草; 其余空地铺设地砖. 其中 $AB = 24\sqrt{3}$ 米, $\angle BAC = 60^\circ$. 设 $EF = x$ 米, $DE = y$ 米.

- (1) 求 y 与 x 之间的函数解析式;
- (2) 当 x 为何值时, 矩形 $DEFG$ 的面积最大? 最大面积是多少?

- (3) 求两弯新月（图中阴影部分）的面积，并求当 x 为何值时，矩形 $DEFG$ 的面积等于两弯新月面积的 $\frac{1}{3}$ ？



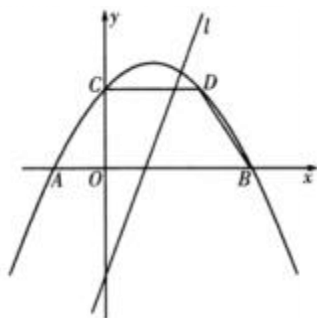
24. (本题满分 13 分)

如图，抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 关于直线 $x = 1$ 对称，与坐标轴交于 A 、 B 、 C 三点，且 $AB = 4$ ，点

$D\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 在抛物线上，直线 l 是一次函数 $y = kx - 2 (k \neq 0)$ 的图象，点 O 是坐标原点.

- (1) 求抛物线的解析式；
- (2) 若直线 l 平分四边形 $OBDC$ 的面积，求 k 的值.
- (3) 把抛物线向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位，所得抛物线与直线 l 交于 M 、 N 两点，问在 y 轴正半轴上

是否存在一定点 P ，使得不论 k 取何值，直线 PM 与 PN 总是关于 y 轴对称？若存在，求出 P 点坐标；若不存在，请说明理由.



2013 年潍坊市初中学业水平考试数学试题

一、选择题 (本题共 12 小题, 在每小题给出的四个选项中, 只有一个是正确的, 请把正确的选项选出来. 每小题选对得 3 分, 选错、不选或选出的答案超过一个均记 0 分.)

1. 实数 0.5 的算术平方根等于 () .

- A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$

答案: C.

考点: 算术平方根.

点评: 理解算术平方根的意义, 把二次根式化成最简形式是解答本题的关键.

2. 下面的图形是天气预报中的图标, 其中既是轴对称图形又是中心对称图形的是 () .



答案: A.

考点: 轴对称图形与中心对称图形的特征.

点评: 此题主要考查了轴对称图形与中心对称图形的概念, 二者既有联系又有区别..

3. 2012 年, 我国财政性教育经费支出实现了占国内生产总值比例达 4% 的目标. 其中在促进义务教育均衡发展方面, 安排义务教育教育经费保障教育机制改革资金达 865.4 亿元. 数据 “865.4 亿元” 用科学记数法可表示为 () 元.

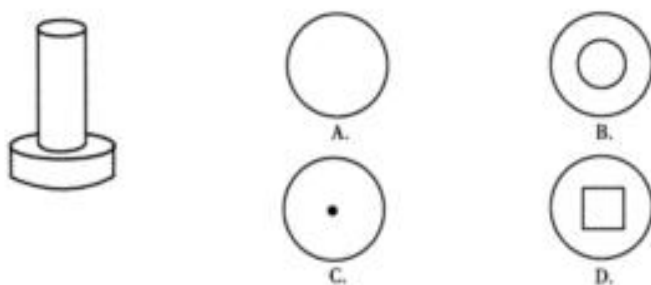
- A. 865×10^8 B. 8.65×10^9 C. 8.65×10^{10} D. 0.865×10^{11}

答案: C.

考点: 科学记数法的表示.

点评: 此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 如图是常用的一种圆顶螺杆, 它的俯视图正确的是 () .



答案: B.

考点: 根据实物原型画出三视图.

点评: 本题考查了俯视图的知识, 注意俯视图是从上往看得到的视图.

5. 在某校 “我的中国梦” 演讲比赛中, 有 9 名学生参加决赛, 他们决赛的最终成绩各不相同. 其中的一名学生想要知道自己能否进入前 5 名, 不仅要了解自己的成绩, 还要了解这 9 名学生成绩的 () .

- A.众数 B.方差 C.平均数 D.中位数

答案: D.

考点:统计量数的含义.

点评:本题要求学生结合具体情境辨析不同的集中量数各自的意义和作用,从而选择恰当的统计量为给定的题意提供所需的集中量数,进而为现实问题的解决提供理论支撑.与单纯考查统计量数的计算相比较,这样更能考查出学生对统计量数的意义的认识程度.

6.设点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 图象上的两个点, 当 $x_1 < x_2 < 0$ 时, $y_1 < y_2$, 则

一次函数 $y = -2x + k$ 的图象不经过的象限是 ().

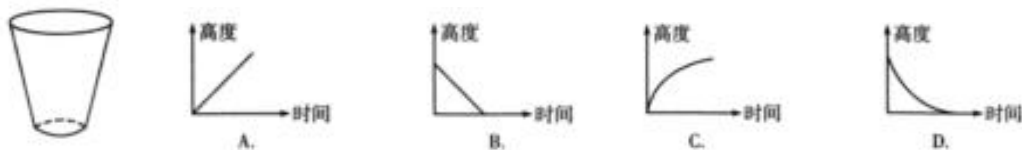
- A.第一象限 B.第二象限 C.第三象限 D.第四象限

答案: A.

考点:反比例函数的性质与一次函数的位置.

点评: 由反比例函数 y 随 x 增大而增大, 可知 $k < 0$, 而一次函数在 $k < 0$, $b < 0$ 时, 经过二三四象限, 从而可得答案.

7.用固定的速度向如图所示形状的杯子里注水, 则能表示杯子里水面的高度和注水时间的关系的大致图象是 ().



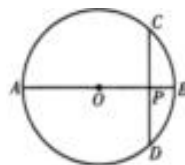
答案: C.

考点:变量间的关系, 函数及其图象.

点评: 容器上粗下细, 杯子里水面的高度上升应是先快后慢.

8.如图, $\odot O$ 的直径 $AB=12$, CD 是 $\odot O$ 的弦, $CD \perp AB$, 垂足为 P , 且 $BP: AP=1:5$, 则 CD 的长为 ().

- A. $4\sqrt{2}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{5}$ D. $4\sqrt{5}$



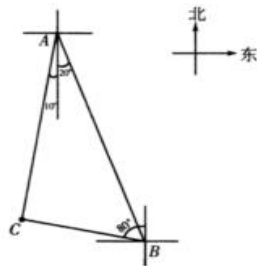
答案: D.

考点:垂径定理与勾股定理.

点评: 连接圆的半径, 构造直角三角形, 再利用勾股定理与垂径定理解决.

9.一渔船在海岛 A 南偏东 20° 方向的 B 处遇险, 测得海岛 A 与 B 的距离为 20 海里, 渔船将险情报告给位于 A 处的救援船后, 沿北偏西 80° 方向向海岛 C 靠近.同时, 从 A 处出发的救援船沿南偏西 10° 方向匀速航行.20 分钟后, 救援船在海岛 C 处恰好追上渔船, 那么救援船航行的速度为 ().

- A. $10\sqrt{3}$ 海里/小时 B. 30 海里/小时
C. $20\sqrt{3}$ 海里/小时 D. $30\sqrt{3}$ 海里/小时



答案: D.

考点:方向角, 直角三角形的判定和勾股定理.

点评:理解方向角的含义, 证明出三角形 ABC 是直角三角形是

10. 已知关于 x 的方程 $kx^2 + (1-k)x - 1 = 0$ ，下列说法正确的是 () .

- A. 当 $k = 0$ 时，方程无解
- B. 当 $k = 1$ 时，方程有一个实数解
- C. 当 $k = -1$ 时，方程有两个相等的实数解
- D. 当 $k \neq 0$ 时，方程总有两个不相等的实数解

答案: C.

考点: 分类思想，一元一次方程与一元二次方程根的情况.

点评: 对于一元一次方程在一次项系数不为 0 时有唯一解，而一元二次方程根的情况由根的判别式确定.

11. 为了研究吸烟是否对肺癌有影响，某肿瘤研究所随机地调查了 10000 人，并进行统计分析. 结果显示：在吸烟者中患肺癌的比例是 2.5%，在不吸烟者中患肺癌的比例是 0.5%，吸烟者患肺癌的人数比不吸烟者患肺癌的人数多 22 人. 如果设这 10000 人中，吸烟者患肺癌的人数为 x ，不吸烟者患肺癌的人数为 y ，根据题意，下面列出的方程组正确的是 () .

- A. $\begin{cases} x - y = 22 \\ x \times 2.5\% + y \times 0.5\% = 10000 \end{cases}$
- B. $\begin{cases} x - y = 22 \\ \frac{x}{2.5\%} + \frac{y}{0.5\%} = 10000 \end{cases}$
- C. $\begin{cases} x + y = 10000 \\ x \times 2.5\% - y \times 0.5\% = 22 \end{cases}$
- D. $\begin{cases} x + y = 10000 \\ \frac{x}{2.5\%} - \frac{y}{0.5\%} = 22 \end{cases}$

答案 B.

考点: 二元一次方程组的应用.

点评: 弄清题意，找出相等关系是解决本题的关键.

12. 对于实数 x ，我们规定 $[x]$ 表示不大于 x 的最大整数，例如 $[1.2] = 1$ ， $[3] = 3$ ， $[-2.5] = -3$ ，若

$\left[\frac{x+4}{10} \right] = 5$ ，则 x 的取值可以是 () .

- A. 40
- B. 45
- C. 51
- D. 56

答案: C.

考点: 新定义问题.

点评: 本题需要学生先通过阅读掌握新定义公式，再利用类似方法解决问题. 考查了学生观察问题，分析问题，解决问题的能力.

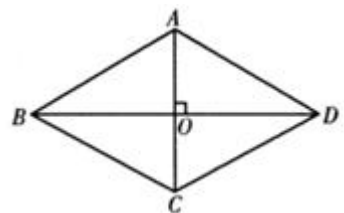
二、填空题 (本大题共 6 小题，共 18 分，只要求填写最后结果，每小题填对得 3 分.)

13. 方程 $\frac{x^2 + x}{x+1} = 0$ 的根是_____.

答案: $x=0$

考点: 分式方程与一元二次方程的解法.

点评: 此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，



把分式方程转化为整式方程求解. 解分式方程一定要注意验根.

14.如图, ABCD 是对角线互相垂直的四边形, 且 $OB=OD$, 请你添加一个适当的条件 _____, 使 ABCD 成为菱形. (只需添加一个即可)

答案: $OA=OC$ 或 $AD=BC$ 或 $AD \parallel BC$ 或 $AB=BC$ 等

考点: 菱形的判别方法.

点评: 此题属于开放题型, 答案不唯一. 主要考查了菱形的判定, 关键是掌握菱形的判定定理.

15.分解因式: $(a+2)(a-2)+3a =$ _____.

答案: $(a-1)(a+4)$

考点: 因式分解-十字相乘法等.

点评: 本题主要考查了整式的因式分解, 在解题时要注意因式分解的方法和公式的应用是本题的关键.

16.一次函数 $y = -2x + b$ 中, 当 $x = 1$ 时, $y < 1$; 当 $x = -1$ 时, $y > 0$ 则 b 的取值范围是_____.

答案: $-2 < b < 3$

考点: 一次函数与不等式的关系和不等式组的解法.

点评: 把 $x = 1$ 和 $x = -1$ 代入, 然后根据题意再列出不等式组是解决问题的关键.

17.当白色小正方形个数 n 等于 1, 2, 3... 时, 由白色小正方形和黑色小正方形组成的图形分别如图所示. 则第 n 个图形

中白色小正方形和黑色小正方形的个数总和等于_____. (用 n 表示, n 是正整数)

答案: $n^2 + 4n$

考点: 本题是一道规律探索题, 考查了学生分析探索规律的能力.

点评: 解决此类问题是应先观察图案的变化趋势, 然后从第一个图形进行分析, 运用从特殊到一般的探索方式, 分析归纳找出黑白正方形个数增加的变化规律, 最后含有 n 的代数式进行表示.

18.如图, 直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 6$,

在线段 AB 上取一点 D , 作 $DF \perp AB$ 交 AC 于点 F . 现将 $\triangle ADF$

沿 DF 折叠, 使点 A 落在线段 DB 上, 对应点记为 A_1 ; AD 的中点 E

的对应点记为 E_1 . 若 $\triangle E_1FA_1 \sim \triangle E_1BF$, 则 $AD =$ _____.

答案: 3.2

解: $\because \angle ACB = 90^\circ$, $AB = 10$, $BC = 6$, $\therefore AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$, 设 $AD = 2x$,

$\because$ 点 E 为 AD 的中点, 将 $\triangle ADF$ 沿 DF 折叠, 点 A 对应点记为 A_1 , 点 E 的对应点为 E_1 ,

$\therefore AE = DE = DE_1 = A_1E_1 = x$,

$\because DF \perp AB$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle A = \angle A$, $\therefore \triangle ABC \sim \triangle AFD$, $\therefore AD : AC = DF : BC$,

即 $2x : 8 = DF : 6$, 解得 $DF = 1.5x$,

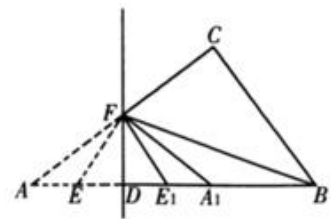
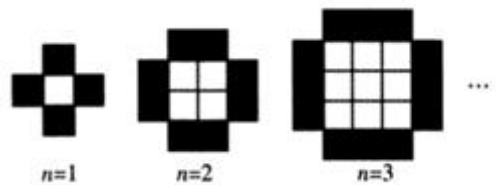
在 $Rt\triangle DE_1F$ 中, $E_1F^2 = DF^2 + DE_1^2 = 3.25x^2$,

又 $\because BE_1 = AB - AE_1 = 10 - 3x$, $\triangle E_1FA_1 \sim \triangle E_1BF$, $\therefore E_1F : A_1E_1 = BE_1 : E_1F$, $\therefore E_1F^2 = A_1E_1 \cdot BE_1$,

即 $3.25x^2 = x(10 - 3x)$, 解得 $x = 1.6$, $\therefore AD$ 的长为 $2 \times 1.6 = 3.2$.

考点: 本题是一道综合性难题, 主要考查轴对称变换, 折叠, 勾股定理, 相似三角形的对应边成比例.

点评: 利用勾股定理列式求出 AC , 设 $AD = 2x$, 得到 $AE = DE = DE_1 = A_1E_1 = x$, 然后求出 BE_1 , 再利用相似三角形对应边成比例列式求出 DF , 然后利用勾股定理列式求出 E_1F , 然后根据相似三角形对应边成比例列式



求解得到 x 的值，从而可得 AD 的值.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 66 分.解答要写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.）

19.（本题满分 10 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，以对角线 BD 为直径作 $\odot O$ ，分别于 BC 、 AD 相交于点 E 、 F .

(1) 求证四边形 $BEDF$ 为矩形.

(2) 若 $BD^2 = BE \cdot BC$ 试判断直线 CD 与 $\odot O$ 的位置关系，

并说明理由.

答案:

(1) 证明: $\because BD$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle DEB = \angle DFB = 90^\circ$

又 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形, $\therefore AD \parallel BC$.

$\therefore \angle FBC = \angle DFB = 90^\circ, \angle EDA = \angle BED = 90^\circ \therefore$ 四边形 $BEDF$ 为矩形.

(2) 直线 CD 与 $\odot O$ 的位置关系为相切.

理由如下: $\because BD^2 = BE \cdot BC, \therefore \frac{BD}{BE} = \frac{BC}{BD}$

$\because \angle DBC = \angle CBD, \therefore \triangle BED \sim \triangle BDC \therefore \angle BDC = \angle BED = 90^\circ$, 即 $BD \perp CD$.

$\therefore CD$ 与 $\odot O$ 相切.

考点: 平行四边形的性质, 矩形的判定, 相似三角形的判定, 直径对的圆周角是直角, 圆的切线的判定等知识的综合运用.

点评: 关键是掌握矩形的判定方法, 三角形相似的判定方法, 圆的切线的判定方法.

20.（本题满分 10 分）

为增强市民的节能意识, 我市试行阶梯电价. 从 2013 年开始, 按照每户每年的用电量分三个档次计费, 具体规定见右图. 小明统计了自己 2013 年前 5 个月的实际用电量为 1300 度, 请帮助小明分析下面问题.

(1) 若小明家计划 2013 年全年的用电量不超过 2520 度, 则 6 至 12 月份小明家平均每月用电量最多为多少度? (保留整数)

(2) 若小明家 2013 年 6 月至 12 月份平均每月用电量等于前 5 个月的平均每月用电量, 则小明家 2013 年应交总电费多少元?

答案: (1) 设小明家 6 月至 12 月份平均每月用电量为 x 度, 根据题意的:

$$1300 + 7x \leq 2520, \text{解得 } x \leq \frac{1220}{7} \approx 174.3$$

所以小明家 6 至 12 月份平均每月用电量最多为 174 度.

(2) 小明家前 5 个月平均每月用电量为 $1300 \div 5 = 260$ (度).

全年用电量为 $260 \times 12 = 3120$ (度).

因为 $2520 < 3120 < 4800$.



所以总电费为 $2520 \times 0.55 + (3120 - 2520) \times 0.6 = 1386 + 360 = 1746$ (元) .

所以小明家 2013 年应交总电费为 1746 元.

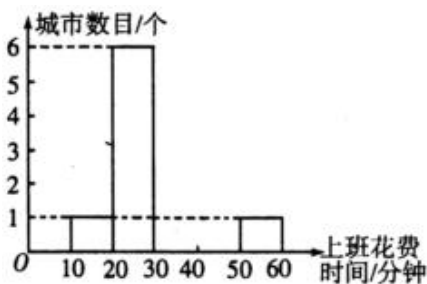
考点：不等式的应用与分段计费问题

点评：根据题意弄清关系，列出不等式，求出整数解是解第一小题的关键. 解决第二小题则需要找出正确的计量电费的档位，分段算出全年应缴总电费.

21. (本题满分 10 分)

随着我国汽车产业的发展，城市道路拥堵问题日益严峻.某部门对 15 个城市的交通状况进行了调查，得到的数据如下表所示：

项目 \ 城市	北京	太原	杭州	沈阳	广州	深圳	上海	桂林	南通	海口	南京	温州	威海	兰州	中山
上班花费时间 (分钟)	52	33	34	34	48	46	47	23	24	24	37	25	24	25	18
上班堵车时间 (分钟)	14	12	12	12	12	11	11	7	7	6	6	5	5	5	0

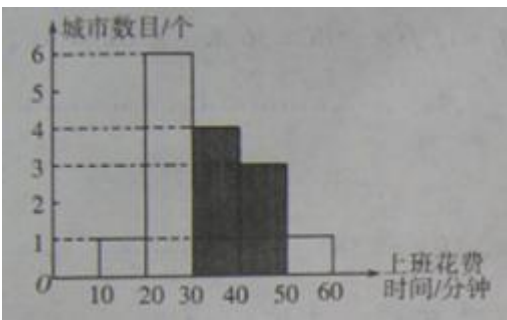


- (1) 根据上班花费时间，将下面的频数分布直方图补充完整；
(2) 求 15 个城市的平均上班堵车时间 (计算结果保留一位小数)；

(3) 规定： $\text{城市堵车率} = \frac{\text{上班堵车时间}}{\text{上班花费时间} - \text{上班堵车时间}} \times 100\%$ ，比如：北京的堵车

率 $= \frac{14}{52 - 14} \times 100\% = 36.8\%$ ；沈阳的堵车率 $= \frac{12}{34 - 12} \times 100\% = 54.5\%$.某人欲从北京、沈阳、上海、温州四个城市中任意选取两个作为出发目的地，求选取的两个城市的堵车率都超过 30% 的概率.

答案：(1) 补全的统计图如图所示



(2) 平均上班堵车时间 $= (14 + 12 \times 4 + 11 \times 2 + 7 \times 2 + 6 \times 2 + 5 \times 3 + 0) \div 15 \approx 8.3$ (分钟) .

(3) 上海的堵车率 $=11 \div (47-11) = 30.6\%$, 温州的堵车率 $=5 \div (25-5) = 25\%$,
堵车率超过 30%的城市有北京、沈阳和上海.

从四个城市中选两个的方法共有 6 种 (北京, 沈阳), (北京, 上海), (北京, 温州), (沈阳, 上海), (沈阳, 温州), (上海, 温州).

其中两个城市堵车率均超过 30%的情况有 3 种: (北京, 沈阳), (北京, 上海), (沈阳, 上海)

所以选取的两个城市堵车率都超过 30%的概率 $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

考点: 频数分布表、频数分布直方图、平均数、概率.

点评: 从统计图表得到正确信息是解题关键, 第三问先确定堵车率超过 30%的城市, 再根据概率的意义, 用列表或树形图表示出所有可能出现的结果, 找出关注的结果, 从而求出它的概率.

22. (本题满分 11 分)

如图 1 所示, 将一个边长为 2 的正方形 $ABCD$ 和一个长为 2、宽为 1 的长方形 $CEFD$ 拼在一起, 构成一个大的长方形 $ABEF$. 现将小长方形 $CEFD$ 绕点 C 顺时针旋转至 $CE'F'D'$, 旋转角为 α .

(1) 当点 D' 恰好落在 EF 边上时, 求旋转角 α 的值;

(2) 如图 2, G 为 BC 的中点, 且 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, 求证: $GD' = E'D$;

(3) 小长方形 $CEFD$ 绕点 C 顺时针旋转一周的过程中, $\triangle DCD'$ 与 $\triangle CBD'$ 能否全等? 若能, 直接写出旋转角 α 的值; 若不能, 说明理由.

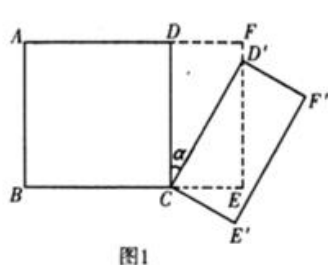


图1

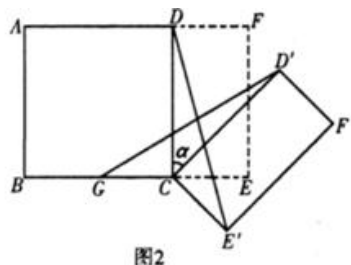


图2

答案: (1) $\because DC \parallel EF, \therefore \angle DCD' = \angle CD'E = \angle CD'E = \alpha. \therefore \sin \alpha = \frac{CE}{CD'} = \frac{CE}{CD} = \frac{1}{2}, \therefore \alpha = 30^\circ$

(2) $\because G$ 为 BC 中点, $\therefore GC = CE' = CE = 1$,

$\because \angle D'CG = \angle DCG + \angle DCD' = 90^\circ + \alpha, \angle DCE' = \angle D'CE' + \angle DCD' = 90^\circ + \alpha,$

$\therefore \angle D'CG = \angle DCE'$ 又 $\because CD' = CD, \therefore \triangle GCD' \cong \triangle E'CD, \therefore GD' = E'D$

(3) 能. $\alpha = 135^\circ$ 或 $\alpha = 315^\circ$

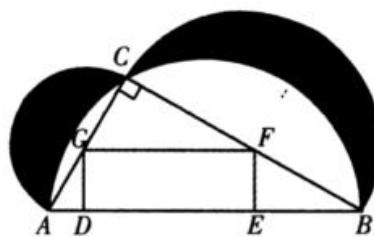
考点: 图形的旋转、三角函数、解直角三角形、全等三角形的判定

点评: 本题依据学生的认知规律, 从简单特殊的问题入手, 将问题向一般进行拓展、变式, 通过操作、观察、计算、猜想等获得结论. 此类问题综合性较强, 要完成本题学生需要有较强的类比、迁移、分析、变形应用、综合、推理和探究能力.

23. (本题满分 12 分)

为了改善市民的生活环境，我是在某河滨空地修建一个如图所示的休闲文化广场.在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 内修建矩形水池 $DEFG$ ，使顶点 D 、 E 在斜边 AB 上， F 、 G 分别在直角边 BC 、 AC 上；又分别以 AB 、 BC 、 AC 为直径作半圆，它们交出两弯新月（图中阴影部分），两弯新月部分栽植花草；其余空地铺设地砖.其中 $AB = 24\sqrt{3}$ 米， $\angle BAC = 60^\circ$. 设 $EF = x$ 米， $DE = y$ 米.

- (1) 求 y 与 x 之间的函数解析式；
- (2) 当 x 为何值时，矩形 $DEFG$ 的面积最大？最大面积是多少？
- (3) 求两弯新月（图中阴影部分）的面积，并求当 x 为何值时，矩形 $DEFG$ 的面积等于两弯新月面积的 $\frac{1}{3}$ ？



答案：(1) 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中，由题意得 $AC = 12\sqrt{3}$ 米， $BC = 36$ 米， $\angle ABC = 30^\circ$ ，

$$\text{所以 } AD = \frac{DG}{\tan 60^\circ} = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}x, \quad BE = \frac{EF}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}x,$$

又 $AD + DE + BE = AB$,

$$\text{所以 } y = 24\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}x = 24\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3}x, \quad (0 < x < 8).$$

(2) 矩形 $DEFG$ 的面积

$$S = xy = x(24\sqrt{3} - \frac{4}{3}\sqrt{3}x) = -\frac{4}{3}\sqrt{3}x^2 + 24\sqrt{3}x = -\frac{4}{3}\sqrt{3}(x-9)^2 + 108\sqrt{3}.$$

所以当 $x=9$ 时，矩形 $DEFG$ 的面积最大，最大面积为 $108\sqrt{3}$ 平方米.

(3) 记 AC 为直径的半圆、 BC 为直径的半圆、 AB 为直径的半圆面积分别为 S_1 、 S_2 、 S_3 ，两弯新月面积为 S ，则 $S_1 = \frac{1}{8}\pi AC^2$ ， $S_2 = \frac{1}{8}\pi BC^2$ ， $S_3 = \frac{1}{8}\pi AB^2$ ，

由 $AC^2 + BC^2 = AB^2$ 可知 $S_1 + S_2 = S_3$ ， $\therefore S_1 + S_2 - S = S_3 - S_{\triangle ABC}$ ，故 $S = S_{\triangle ABC}$

$$\text{所以两弯新月的面积 } S = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} \times 36 = 216\sqrt{3} \text{ (平方米)}$$

$$\text{由 } -\frac{4}{3}\sqrt{3}(x-9) + 108\sqrt{3} = \frac{1}{3} \times 216\sqrt{3}, \quad \text{即 } (x-9)^2 = 27, \text{ 解得 } x = 9 \pm 3\sqrt{3}, \text{ 符合题意,}$$

所以当 $x = 9 \pm 3\sqrt{3}$ 米时，矩形 $DEFG$ 的面积等于两弯新月面积的 $\frac{1}{3}$.

考点：考查了解直角三角形，二次函数最值求法以及一元二次方程的解法。

点评：本题是二次函数的实际问题。解题的关键是对于实际问题能够灵活地构建恰当的数学模型，并综合

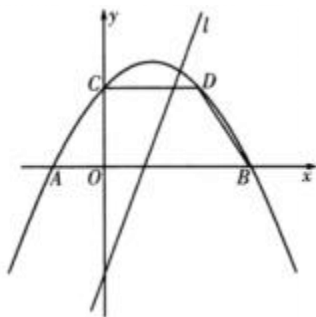
应用其相关性质加以解答.

24. (本题满分 13 分)

如图, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 关于直线 $x = 1$ 对称, 与坐标轴交于 A 、 B 、 C 三点, 且 $AB = 4$, 点

$D\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 在抛物线上, 直线 l 是一次函数 $y = kx - 2 (k \neq 0)$ 的图象, 点 O 是坐标原点.

- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 若直线 l 平分四边形 $OBDC$ 的面积, 求 k 的值.
- (3) 把抛物线向左平移 1 个单位, 再向下平移 2 个单位, 所得抛物线与直线 l 交于 M 、 N 两点, 问在 y 轴正半轴上是否存在一定点 P , 使得不论 k 取何值, 直线 PM 与 PN 总是关于 y 轴对称? 若存在, 求出 P 点坐标; 若不存在, 请说明理由.



答案: (1) 因为抛物线关于直线 $x=1$ 对称, $AB=4$, 所以 $A(-1, 0), B(3, 0)$,

由点 $D(2, 1.5)$ 在抛物线上, 所以 $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1.5 \end{cases}$, 所以 $3a + 3b = 1.5$, 即 $a + b = 0.5$,

又 $-\frac{b}{2a} = 1$, 即 $b = -2a$, 代入上式解得 $a = -0.5, b = 1$, 从而 $c = 1.5$, 所以 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$.

(2) 由 (1) 知 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$, 令 $x=0$, 得 $c(0, 1.5)$, 所以 $CD \parallel AB$,

令 $kx - 2 = 1.5$, 得 l 与 CD 的交点 $F\left(\frac{7}{2k}, \frac{3}{2}\right)$,

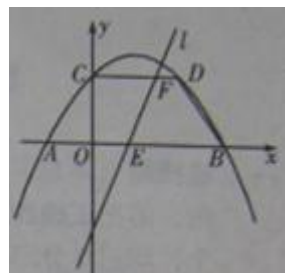
令 $kx - 2 = 0$, 得 l 与 x 轴的交点 $E\left(\frac{2}{k}, 0\right)$,

根据 $S_{\text{四边形 OEFC}} = S_{\text{四边形 EBD F}}$ 得: $OE + CF = DF + BE$,

即: $\frac{2}{k} + \frac{7}{2k} = \left(3 - \frac{2}{k}\right) + \left(2 - \frac{7}{2k}\right)$, 解得 $k = \frac{11}{5}$,

(3) 由 (1) 知 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$,

所以把抛物线向左平移 1 个单位, 再向下平移 2 个单位, 所得抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2$



假设在 y 轴上存在一点 $P(0, t)$, $t > 0$, 使直线 PM 与 PN 关于 y 轴对称, 过点 M 、 N 分别向 y 轴作垂线 MM_1 、 NN_1 , 垂足分别为 M_1 、 N_1 , 因为 $\angle MPO = \angle NPO$, 所以 $Rt\triangle MPM_1 \sim Rt\triangle NPN_1$,

$$\text{所以 } \frac{MM_1}{NN_1} = \frac{PM_1}{PN_1}, \dots\dots\dots(1)$$

不妨设 $M(x_M, y_M)$ 在点 $N(x_N, y_N)$ 的左侧, 因为 P 点在 y 轴正半轴上,

$$\text{则 (1) 式变为 } \frac{-x_M}{x_N} = \frac{t - y_M}{t - y_N}, \text{ 又 } y_M = kx_M - 2, y_N = kx_N - 2,$$

$$\text{所以 } (t+2)(x_M + x_N) = 2kx_Mx_N, \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{把 } y = kx - 2 (k \neq 0) \text{ 代入 } y = -\frac{1}{2}x^2 \text{ 中, 整理得 } x^2 + 2kx - 4 = 0,$$

所以 $x_M + x_N = -2k$, $x_Mx_N = -4$, 代入 (2) 得 $t = 2$, 符合条件,

故在 y 轴上存在一点 $P(0, 2)$, 使直线 PM 与 PN 总是关于 y 轴对称.

考点: 本题是一道与二次函数相关的压轴题, 综合考查了二次函数解析式的确定, 函数图象交点及图形面积的求法, 三角形的相似, 函数图象的平移, 一元二次方程的解法等知识, 难度较大.

点评: 本题是一道集一元二次方程、二次函数解析式的求法、相似三角形的条件与性质以及质点运动问题、分类讨论思想于一体的综合题, 能够较好地考查了同学们灵活应用所学知识, 解决实际问题的能力. 问题设计富有梯度、由易到难层层推进, 既考查了知识掌握, 也考查了方法的灵活应用和数学思想的形成.

