

2013 年山东省德州市中考数学试卷

一、选择题（共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

1.（3 分）下列计算正确的是（ ）

- A. $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$ B. $\sqrt{(-2)^2} = -2$ C. $(-2)^0 = -1$ D. $|-5-3| = 2$

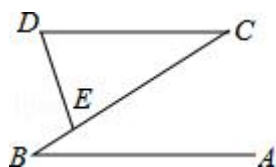
2.（3 分）民族图案是数学文化中的一块瑰宝．下列图案中，既不是中心对称图形也不是轴对称图形的是（ ）



3.（3 分）森林是地球之肺，每年能为人类提供大约 28.3 亿吨的有机物．28.3 亿吨用科学记数法表示为（ ）

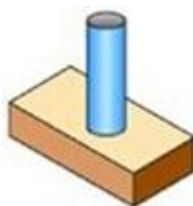
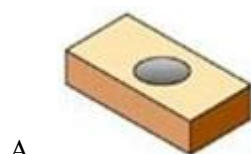
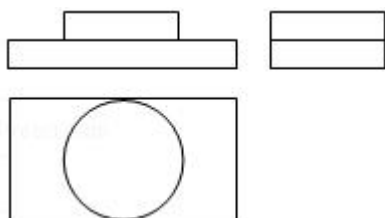
- A. 28.3×10^7 B. 2.83×10^8 C. 0.283×10^{10} D. 2.83×10^9

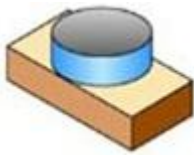
4.（3 分）如图， $AB \parallel CD$ ，点 E 在 BC 上，且 $CD = CE$ ， $\angle D = 74^\circ$ ，则 $\angle B$ 的度数为（ ）



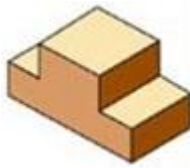
- A. 68° B. 32° C. 22° D. 16°

5.（3 分）图中三视图所对应的直观图是（ ）



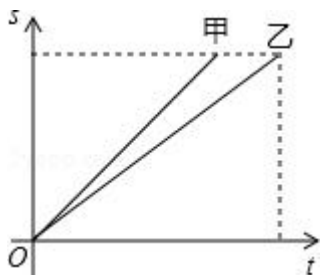


C.

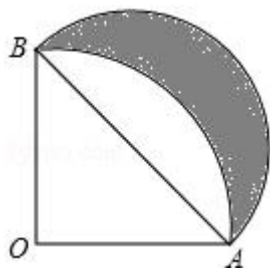


D.

6. (3分) 甲、乙两人在一次百米赛跑中，路程 s (米) 与赛跑时间 t (秒) 的关系如图所示，则下列说法正确的是 ()



- A. 甲、乙两人的速度相同
- B. 甲先到达终点
- C. 乙用的时间短
- D. 乙比甲跑的路程多
7. (3分) 下列命题中，真命题是 ()
- A. 对角线相等的四边形是等腰梯形
- B. 对角线互相垂直平分的四边形是正方形
- C. 对角线互相垂直的四边形是菱形
- D. 四个角相等的四边形是矩形
8. (3分) 下列函数中，当 $x > 0$ 时， y 随 x 的增大而增大的是 ()
- A. $y = -x + 1$
- B. $y = x^2 - 1$
- C. $y = \frac{1}{x}$
- D. $y = -x^2 + 1$
9. (3分) 一项“过关游戏”规定：在过第 n 关时要将一颗质地均匀的骰子（六个面上分别刻有 1 到 6 的点数）抛掷 n 次，若 n 次抛掷所出现的点数之和大于 $\frac{5}{4}n^2$ ，则算过关；否则不算过关，则能过第二关的概率是 ()
- A. $\frac{13}{18}$
- B. $\frac{5}{18}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{9}$
10. (3分) 如图，扇形 AOB 的半径为 1， $\angle AOB = 90^\circ$ ，以 AB 为直径画半圆，则图中阴影部分的面积为 ()

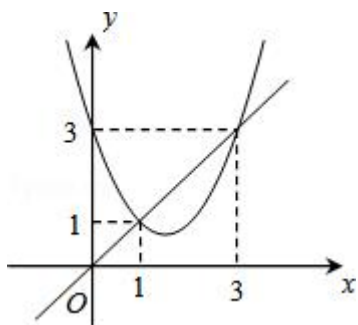


- A. $\frac{1}{4}\pi$ B. $\pi - \frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}$

11. (3分) 函数 $y = x^2 + bx + c$ 与 $y = x$ 的图象如图所示, 有以下结论:

① $b^2 - 4c > 0$; ② $b + c + 1 = 0$; ③ $3b + c + 6 = 0$; ④ 当 $1 < x < 3$ 时, $x^2 + (b - 1)x + c < 0$.

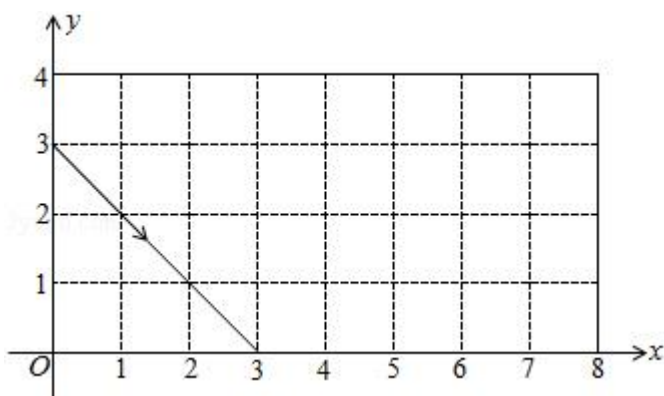
其中正确的个数为 ()



- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

12. (3分) 如图, 动点 P 从 $(0, 3)$ 出发, 沿所示方向运动, 每当碰到矩形的边时反弹,

反弹时反射角等于入射角, 当点 P 第 2013 次碰到矩形的边时, 点 P 的坐标为 ()



- A. $(1, 4)$ B. $(5, 0)$ C. $(6, 4)$ D. $(8, 3)$

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

13. (4分) $\sqrt{2}\cos 30^\circ$ 的值是_____.

14. (4分) 如图, 为抄近路践踏草坪是一种不文明的现象, 请你用数学知识解释出这一现象的原因_____.



15. (4分) 甲乙两种水稻试验品中连续 5 年的平均单位面积产量如下 (单位: 吨/公顷)

品种	第 1 年	第 2 年	第 3 年	第 4 年	第 5 年
甲	9.8	9.9	10.1	10	10.2
乙	9.4	10.3	10.8	9.7	9.8

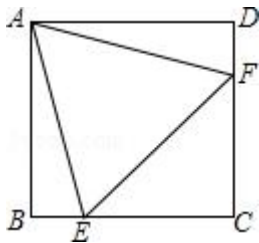
经计算, $\bar{x}_{\text{甲}} = 10$, $\bar{x}_{\text{乙}} = 10$, 试根据这组数据估计_____种水稻品种的产量比较稳定.

16. (4分) 函数 $y = \frac{1}{x}$ 与 $y = x - 2$ 图象交点的横坐标分别为 a , b , 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值为_____.

17. (4分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 边长为 2 的等边三角形 AEF 的顶点 E 、 F 分别在 BC 和 CD 上, 下列结论:

① $CE = CF$; ② $\angle AEB = 75^\circ$; ③ $BE + DF = EF$; ④ $S_{\text{正方形 } ABCD} = 2 + \sqrt{3}$.

其中正确的序号是_____ (把你认为正确的都填上).



三、解答题 (共 7 小题, 满分 64 分)

18. (6分) 先化简, 再求值: $\left(\frac{a-2}{a^2+2a} - \frac{a-1}{a^2+4a+4}\right) \div \frac{a-4}{a+2}$, 其中 $a = \sqrt{2} - 1$.

19. (8分) 某区在实施居民用水额定管理前, 对居民生活用水情况进行了调查, 下表是通过简单随机抽样获得的 50 个家庭去年月平均用水量 (单位: 吨), 并将调查数据进行如下整理:

4.7 2.1 3.1 2.3 5.2 2.8 7.3 4.3 4.8 6.7
 4.5 5.1 6.5 8.9 2.2 4.5 3.2 3.2 4.5 3.5
 3.5 3.5 3.6 4.9 3.7 3.8 5.6 5.5 5.9 6.2
 5.7 3.9 4.0 4.0 7.0 3.7 9.5 4.2 6.4 3.5

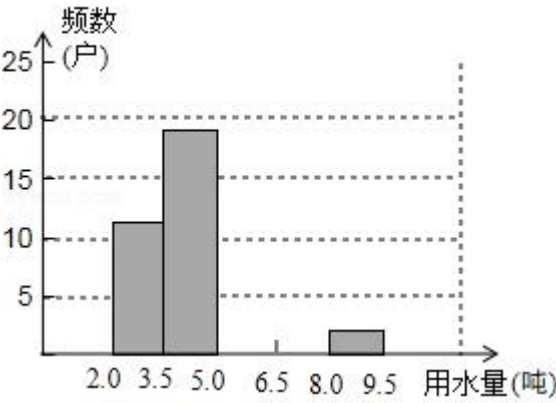
4.5 4.5 4.6 5.4 5.6 6.6 5.8 4.5 6.2 7.5

频数分布表

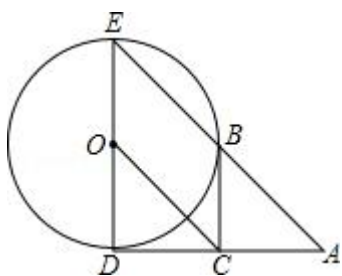
分组	划记	频数
$2.0 < x \leq 3.5$	正正一	11
$3.5 < x \leq 5.0$	正正正正	19
$5.0 < x \leq 6.5$		
$6.5 < x \leq 8.0$		
$8.0 < x \leq 9.5$	丁	2
合计		50

- (1) 把上面频数分布表和频数分布直方图补充完整;
- (2) 从直方图中你能得到什么信息? (写出两条即可);
- (3) 为了鼓励节约用水, 要确定一个用水量的标准, 超出这个标准的部分按 1.5 倍价格收费, 若要使 60% 的家庭收费不受影响, 你觉得家庭月均用水量应该定为多少? 为什么?

频数分布直方图



20. (8 分) 如图, 已知 $\odot O$ 的半径为 1, DE 是 $\odot O$ 的直径, 过点 D 作 $\odot O$ 的切线 AD , C 是 AD 的中点, AE 交 $\odot O$ 于 B 点, 四边形 $BCOE$ 是平行四边形.
- (1) 求 AD 的长;
- (2) BC 是 $\odot O$ 的切线吗? 若是, 给出证明; 若不是, 说明理由.



21. (10分) 某地计划用 120 - 180 天 (含 120 与 180 天) 的时间建设一项水利工程, 工程需要运送的土石方总量为 360 万米^3 .

(1) 写出运输公司完成任务所需的时间 y (单位: 天) 与平均每天的工作量 x (单位: 万米^3) 之间的函数关系式, 并给出自变量 x 的取值范围;

(2) 由于工程进度的需要, 实际平均每天运送土石比原计划多 5000 米^3 , 工期比原计划减少了 24 天, 原计划和实际平均每天运送土石方各是多少 万米^3 ?

22. (10分) 设 A 是由 2×4 个整数组成的 2 行 4 列的数表, 如果某一行 (或某一列) 各数之和为负数, 则改变该行 (或该列) 中所有数的符号, 称为一次 “操作”.

(1) 数表 A 如表 1 所示, 如果经过两次 “操作”, 使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负整数, 请写出每次 “操作” 后所得的数表; (写出一种方法即可)

表 1

1	2	3	- 7
- 2	- 1	0	1

(2) 数表 A 如表 2 所示, 若经过任意一次 “操作” 以后, 便可使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负整数, 求整数 a 的值.

表 2

a	$a^2 - 1$	$- a$	$- a^2$
$2 - a$	$1 - a^2$	$a - 2$	a^2

23. (10分) (1) 如图 1, 已知 $\triangle ABC$, 以 AB 、 AC 为边向 $\triangle ABC$ 外作等边 $\triangle ABD$ 和等边 $\triangle ACE$, 连接 BE , CD , 请你完成图形, 并证明: $BE = CD$; (尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹);

(2) 如图 2, 已知 $\triangle ABC$, 以 AB 、 AC 为边向外作正方形 $ABFD$ 和正方形 $ACGE$, 连接 BE , CD , BE 与 CD 有什么数量关系? 简单说明理由;

(3) 运用 (1)、(2) 解答中所积累的经验 and 知识, 完成下题:

如图 3, 要测量池塘两岸相对的两点 B, E 的距离, 已经测得 $\angle ABC = 45^\circ$, $\angle CAE = 90^\circ$, $AB = BC = 100$ 米, $AC = AE$, 求 BE 的长.

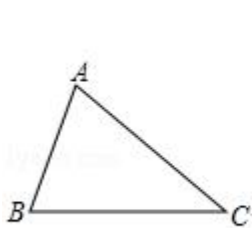


图1

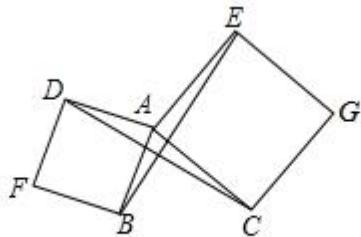


图2

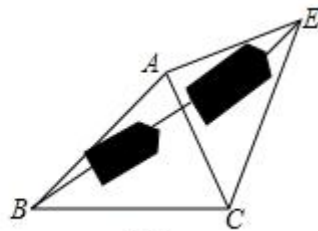


图3

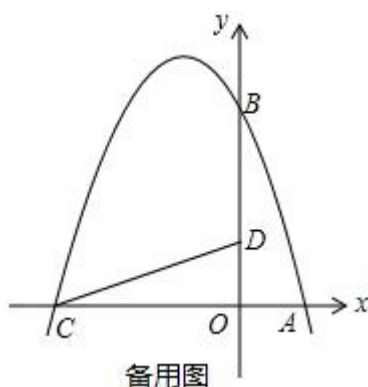
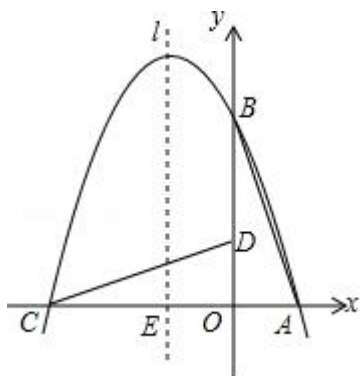
24. (12 分) 如图, 在直角坐标系中有一直角三角形 AOB , O 为坐标原点, $OA = 1$, $\tan \angle BAO = 3$, 将此三角形绕原点 O 逆时针旋转 90° , 得到 $\triangle DOC$, 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 经过点 A, B, C .

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 若点 P 是第二象限内抛物线上的动点, 其横坐标为 t ,

① 设抛物线对称轴 l 与 x 轴交于一点 E , 连接 PE , 交 CD 于 F , 求出当 $\triangle CEF$ 与 $\triangle COD$ 相似时, 点 P 的坐标;

② 是否存在一点 P , 使 $\triangle PCD$ 的面积最大? 若存在, 求出 $\triangle PCD$ 的面积的最大值; 若不存在, 请说明理由.



备用图

2013 年山东省德州市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分）

1. 【分析】对各项分别进行负整数指数幂、算术平方根、零指数幂、绝对值的化简等运算，然后选出正确选项即可．

【解答】解：A、 $(\frac{1}{3})^{-2} = 9$ ，该式计算正确，故本选项正确；

B、 $\sqrt{(-2)^2} = 2$ ，该式计算错误，故本选项错误；

C、 $(-2)^0 = 1$ ，该式计算错误，故本选项错误；

D、 $|-5-3| = 8$ ，该式计算错误，故本选项错误；

故选：A．

【点评】本题考查了负整数指数幂、算术平方根、零指数幂、绝对值的化简等运算，属于基础题，掌握各知识点运算法则是解题的关键．

2. 【分析】根据轴对称图形与中心对称图形的概念求解．

【解答】解：A、不是轴对称图形，是中心对称图形，故本选项错误；

B、是轴对称图形，也是中心对称图形，故本选项错误；

C、旋转角是 $\frac{360^\circ}{7}$ ，只是每旋转 $\frac{360^\circ}{7}$ 与原图重合，而中心对称的定义是绕一定点旋转 180 度，新图形与原图形重合．因此不符合中心对称的定义，不是中心对称图形．

D、是轴对称图形，不是中心对称图形，故本选项错误．

故选：C．

【点评】本题考查了中心对称及轴对称的知识，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合，中心对称图形是要寻找对称中心，旋转 180 度后两部分重合．

3. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数．确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同．当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数．

【解答】解：28.3 亿 $= 28.3 \times 10^8 = 2.83 \times 10^9$ ．

故选：D．

【点评】此题考查科学记数法的表示方法．科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值．

4. 【分析】根据等腰三角形两底角相等求出 $\angle C$ 的度数，再根据两直线平行，内错角相等解答即可.

【解答】解： $\because CD = CE$,

$$\therefore \angle D = \angle DEC,$$

$$\because \angle D = 74^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - 74^\circ \times 2 = 32^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle B = \angle C = 32^\circ.$$

故选： B .

【点评】本题考查了两直线平行，内错角相等的性质，等腰三角形两底角相等的性质，熟记性质是解题的关键.

5. 【分析】主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形.

【解答】解：从俯视图可以看出直观图的下面部分为长方体，上面部分为圆柱，且与下面的长方体的顶面的两边相切高度相同.

只有 C 满足这两点.

故选： C .

【点评】本题考查了三视图的概念. 易错易混点：学生易忽略圆柱的高与长方体的高的大小关系，错选 B .

6. 【分析】利用图象可得出，甲，乙的速度，以及所行路程等，注意利用所给数据结合图形逐个分析.

【解答】解：结合图象可知：两人同时出发，甲比乙先到达终点，甲的速度比乙的速度快，

故选： B .

【点评】本题考查了函数的图象，关键是会看函数图象，要求同学们能从图象中得到正确信息.

7. 【分析】根据矩形、菱形、正方形的判定与性质分别判断得出答案即可.

【解答】解： A 、根据对角线相等的四边形也可能是矩形，故此选项错误；

B 、根据对角线互相垂直平分的四边形是菱形，故此选项错误；

C 、根据对角线互相垂直平分的四边形是菱形，故此选项错误；

D 、根据四个角相等的四边形是矩形，是真命题，故此选项正确.

故选：D.

【点评】此题主要考查了命题与定理，熟练掌握矩形、菱形、正方形的判定与性质是解题关键.

8. 【分析】根据二次函数、一次函数、反比例函数的增减性，结合自变量的取值范围，逐一判断.

【解答】解：A、 $y = -x + 1$ ，一次函数， $k < 0$ ，故 y 随着 x 增大而减小，故 A 错误；

B、 $y = x^2 - 1$ ($x > 0$)，故当图象在对称轴右侧， y 随着 x 的增大而增大；而在对称轴左侧 ($x < 0$)， y 随着 x 的增大而减小，故 B 正确.

C、 $y = \frac{1}{x}$ ， $k = 1 > 0$ ，在每个象限里， y 随 x 的增大而减小，故 C 错误；

D、 $y = -x^2 + 1$ ($x > 0$)，故当图象在对称轴右侧， y 随着 x 的增大而减小；而在对称轴左侧 ($x < 0$)， y 随着 x 的增大而增大，故 D 错误；

故选：B.

【点评】本题综合考查二次函数、一次函数、反比例函数的增减性（单调性），是一道难度中等的题目.

9. 【分析】由在过第 n 关时要将一颗质地均匀的骰子（六个面上分别刻有 1 到 6 的点数）抛掷 n 次， n 次抛掷所出现的点数之和大于 $\frac{5}{4}n^2$ ，则算过关；可得能过第二关的抛掷所出现的点数之和需要大于 5，然后根据题意列出表格，由表格求得所有等可能的结果与能过第二关的情况，再利用概率公式求解即可求得答案.

【解答】解：∵ 在过第 n 关时要将一颗质地均匀的骰子（六个面上分别刻有 1 到 6 的点数）抛掷 n 次， n 次抛掷所出现的点数之和大于 $\frac{5}{4}n^2$ ，则算过关；

∴ 能过第二关的抛掷所出现的点数之和需要大于 5，

列表得：

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

∴共有 36 种等可能的结果，能过第二关的有 26 种情况，

∴能过第二关的概率是： $\frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.

故选：A.

【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．注意概率 = 所求情况数与总情况数之比．

10. **【分析】** 首先利用扇形公式计算出半圆的面积和扇形 AOB 的面积，然后求出 $\triangle AOB$ 的面积，用 $S_{\text{半圆}} + S_{\triangle AOB} - S_{\text{扇形 } AOB}$ 可求出阴影部分的面积．

【解答】 解：在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $AB = \sqrt{AO^2 + OB^2} = \sqrt{2}$ ，

$$S_{\text{半圆}} = \frac{1}{2}\pi \times \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\pi,$$

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}OB \times OA = \frac{1}{2},$$

$$S_{\text{扇形 } OBA} = \frac{90\pi \times 1^2}{360} = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{故 } S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} + S_{\triangle AOB} - S_{\text{扇形 } AOB} = \frac{1}{2}.$$

故选：C.

【点评】 本题考查了扇形的面积计算，解答本题的关键是熟练掌握扇形的面积公式，仔细观察图形，得出阴影部分面积的表达式．

11. **【分析】** 由函数 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴无交点，可得 $b^2 - 4c < 0$ ；当 $x = 1$ 时， $y = 1 + b + c = 1$ ；当 $x = 3$ 时， $y = 9 + 3b + c = 3$ ；当 $1 < x < 3$ 时，二次函数值小于一次函数值，可得 $x^2 + bx + c < x$ ，继而可求得答案．

【解答】 解：∵函数 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴无交点，

$$\therefore b^2 - 4c < 0;$$

故①错误；

$$\text{当 } x = 1 \text{ 时, } y = 1 + b + c = 1,$$

故②错误；

$$\therefore \text{当 } x = 3 \text{ 时, } y = 9 + 3b + c = 3,$$

$$\therefore 3b+c+6=0;$$

③正确;

$\therefore$ 当 $1 < x < 3$ 时, 二次函数值小于一次函数值,

$$\therefore x^2+bx+c < x,$$

$$\therefore x^2+(b-1)x+c < 0.$$

故④正确.

故选: B.

【点评】 主要考查图象与二次函数系数之间的关系. 此题难度适中, 注意掌握数形结合思想的应用.

12. **【分析】** 根据反射角与入射角的定义作出图形, 可知每 6 次反弹为一个循环组依次循环, 用 2013 除以 6, 根据商和余数的情况确定所对应的点的坐标即可.

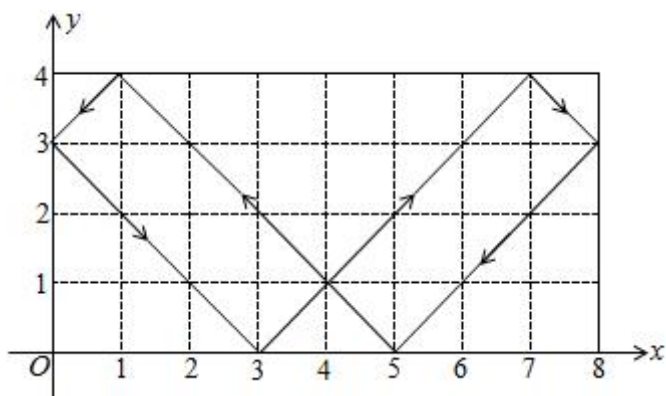
【解答】 解: 如图, 经过 6 次反弹后动点回到出发点 $(0, 3)$,

$$\therefore 2013 \div 6 = 335 \cdots 3,$$

$\therefore$ 当点 P 第 2013 次碰到矩形的边时为第 336 个循环组的第 3 次反弹,

点 P 的坐标为 $(8, 3)$.

故选: D.



【点评】 本题考查了对点的坐标的规律变化的认识, 作出图形, 观察出每 6 次反弹为一个循环组依次循环是解题的关键.

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 4 分, 满分 20 分)

13. **【分析】** 将特殊角的三角函数值代入计算即可.

$$\text{【解答】解: } \sqrt{2} \cos 30^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

故答案为: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

【点评】 本题考查了特殊角的三角函数值，属于基础题，掌握几个特殊角的三角函数值是解题的关键.

14. 【分析】 根据线段的性质解答即可.

【解答】 解：为抄近路践踏草坪原因是：两点之间线段最短.

故答案为：两点之间线段最短.

【点评】 本题考查了线段的性质，是基础题，主要利用了两点之间线段最短.

15. 【分析】 根据方差公式 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$ 分别求出两种水稻的产量的方差，再进行比较即可.

【解答】 解：甲种水稻产量的方差是：

$$\frac{1}{5}[(9.8 - 10)^2 + (9.9 - 10)^2 + (10.1 - 10)^2 + (10 - 10)^2 + (10.2 - 10)^2] = 0.02,$$

乙种水稻产量的方差是：

$$\frac{1}{5}[(9.4 - 10)^2 + (10.3 - 10)^2 + (10.8 - 10)^2 + (9.7 - 10)^2 + (9.8 - 10)^2] = 0.244.$$

$$\therefore 0.02 < 0.244,$$

$\therefore$ 产量比较稳定的水稻品种是甲，

故答案为：甲

【点评】 此题考查了方差，用到的知识点是方差和平均数的计算公式，一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，则方差 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，它反映了一组数据的波动大小，方差越大，波动性越大，反之也成立.

16. 【分析】 先根据反比例函数与一次函数的交点坐标满足两函数的解析式得到 $\frac{1}{x} = x - 2$ ，

去分母化为一元二次方程得到 $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，根据根与系数的关系得到 $a + b = 2$ ， $ab = -1$ ，

然后变形 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 得 $\frac{a+b}{ab}$ ，再利用整体思想计算即可.

【解答】 解：根据题意得 $\frac{1}{x} = x - 2$ ，

化为整式方程，整理得 $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，

$\therefore$ 函数 $y = \frac{1}{x}$ 与 $y = x - 2$ 图象交点的横坐标分别为 a, b ，

$\therefore a, b$ 为方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ 的两根，

$$\therefore a + b = 2, ab = -1,$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{2}{-1} = -2.$$

故答案为：-2.

【点评】本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题：反比例函数与一次函数的交点坐标满足两函数的解析式，也考查了一元二次方程根与系数的关系.

17. 【分析】根据三角形全等的知识可以判断①的正误；根据角角之间的数量关系，以及三角形内角和为 180° 判断②的正误；根据线段垂直平分线的知识可以判断③的正误，利用解三角形求正方形的面积等知识可以判断④的正误.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AB = AD,$$

$\because \triangle AEF$ 是等边三角形，

$$\therefore AE = AF,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中，

$$\begin{cases} AB=AD \\ AE=AF \end{cases},$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ADF \text{ (HL)},$$

$$\therefore BE = DF,$$

$$\because BC = DC,$$

$$\therefore BC - BE = CD - DF,$$

$$\therefore CE = CF,$$

$\therefore$ ①说法正确；

$$\because CE = CF,$$

$\therefore \triangle ECF$ 是等腰直角三角形，

$$\therefore \angle CEF = 45^\circ,$$

$$\because \angle AEF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle AEB = 75^\circ,$$

$\therefore$ ②说法正确；

如图，连接 AC ，交 EF 于 G 点，

$$\therefore AC \perp EF, \text{ 且 } AC \text{ 平分 } EF,$$

$$\because \angle CAF \neq \angle DAF,$$

$$\therefore DF \neq FG,$$

$$\therefore BE+DF \neq EF,$$

$\therefore$ ③说法错误;

$$\because EF = 2,$$

$$\therefore CE = CF = \sqrt{2},$$

设正方形的边长为 a ,

在 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中,

$$AD^2 + DF^2 = AF^2, \text{ 即 } a^2 + (a - \sqrt{2})^2 = 4,$$

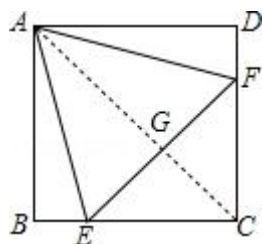
$$\text{解得 } a = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2},$$

$$\text{则 } a^2 = 2 + \sqrt{3},$$

$$S_{\text{正方形 } ABCD} = 2 + \sqrt{3}.$$

④说法正确,

故答案为: ①②④.



【点评】 本题主要考查正方形的性质的知识点, 解答本题的关键是熟练掌握全等三角形的证明以及辅助线的正确作法, 此题难度不大, 但是有一点麻烦.

三、解答题 (共 7 小题, 满分 64 分)

18. **【分析】** 将括号内的部分通分后相减, 再将除法转化为乘法后代入求值.

$$\begin{aligned} \text{【解答】解: 原式} &= \left[\frac{a-2}{a(a+2)} - \frac{a-1}{(a+2)^2} \right] \cdot \frac{a+2}{a-4} \\ &= \frac{a^2-4-a^2+a}{a(a+2)^2} \cdot \frac{a+2}{a-4} \\ &= \frac{a-4}{a(a+2)^2} \cdot \frac{a+2}{a-4} \\ &= \frac{1}{a(a+2)}. \end{aligned}$$

$$\text{当 } a = \sqrt{2} - 1 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1+2)} = 1.$$

【点评】 本题考查了分式的化简求值, 熟悉通分、约分及因式分解是解题的关键.

19. **【分析】** (1) 根据题中给出的 50 个数据, 从中分别找出 $5.0 < x \leq 6.5$ 与 $6.5 < x \leq 8.0$ 的

个数，进行划记，得到对应的频数，进而完成频数分布表和频数分布直方图；

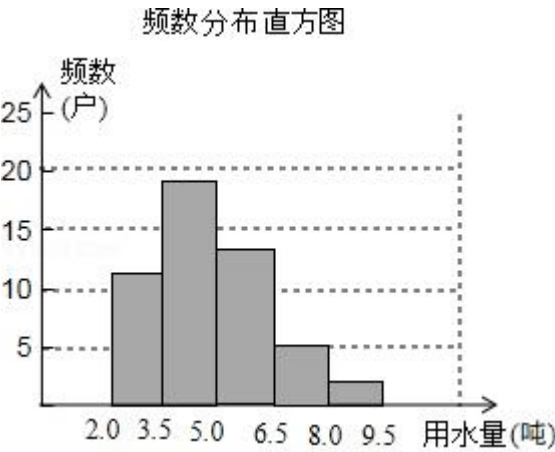
(2) 本题答案不唯一．例如：从直方图可以看出：①居民月平均用水量大部分在 2.0 至 6.5 之间；②居民月平均用水量在 $3.5 < x \leq 5.0$ 范围内的最多，有 19 户；

(3) 由于 $50 \times 60\% = 30$ ，所以为了鼓励节约用水，要使 60% 的家庭收费不受影响，即使 30 户的家庭收费不受影响，而 $11 + 19 = 30$ ，故家庭月均用水量应该定为 5 吨．

【解答】解：(1) 频数分布表如下：

分组	划记	频数
$2.0 < x \leq 3.5$	正正一	11
$3.5 < x \leq 5.0$	正正正正	19
$5.0 < x \leq 6.5$	正正下	13
$6.5 < x \leq 8.0$	正	5
$8.0 < x \leq 9.5$	丁	2
合计		50

频数分布直方图如下：



(2) 从直方图可以看出：①居民月平均用水量大部分在 2.0 至 6.5 之间；②居民月平均用水量在 $3.5 < x \leq 5.0$ 范围内的最多，有 19 户；

(3) 要使 60% 的家庭收费不受影响，你觉得家庭月均用水量应该定为 5 吨，因为月平均用水量不超过 5 吨的有 30 户， $30 \div 50 = 60\%$ ．

20. 【分析】(1) 连接 BD , 由 ED 为圆 O 的直径, 利用直径所对的圆周角为直角得到 $\angle DBE$ 为直角, 由 $BCOE$ 为平行四边形, 得到 BC 与 OE 平行, 且 $BC = OE = 1$, 在直角三角形 ABD 中, C 为 AD 的中点, 利用斜边上的中线等于斜边的一半求出 AD 的长即可;

【解答】 解：(1) 连接 BD ， $\because DE$ 是直径， $\therefore \angle DBE = 90^\circ$ ，

$$\therefore BC \parallel OE, \quad BC = OE = 1,$$
$$\therefore BC = \frac{1}{2}AD = 1,$$

(2) 是, 理由如下:

$\therefore$ 四边形 $BCDO$ 为平行四边形.

$\therefore AD$ 为圆 O 的切线,

$$\therefore OD \perp AD,$$

$\therefore$ 四边形 $BCDO$ 为矩形,

$$\therefore OB \perp BC,$$

第 17 页 (共 23 页)

形的判定与性质，熟练掌握切线的判定与性质是解本题的关键．

21. 【分析】（1）利用“每天的工作量 $\times$ 天数=土方总量”可以得到两个变量之间的函数关系；

（2）根据“工期比原计划减少了24天”找到等量关系并列方程求解即可；

【解答】解：（1）由题意得， $y = \frac{360}{x}$

把 $y = 120$ 代入 $y = \frac{360}{x}$ ，得 $x = 3$

把 $y = 180$ 代入 $y = \frac{360}{x}$ ，得 $x = 2$ ，

$\therefore$ 自变量的取值范围为： $2 \leq x \leq 3$ ，

$\therefore y = \frac{360}{x} (2 \leq x \leq 3)$ ；

（2）设原计划平均每天运送土石方 x 万米³，则实际平均每天运送土石方 $(x+0.5)$ 万米³，

根据题意得： $\frac{360}{x} - \frac{360}{x+0.5} = 24$ ，

解得： $x = 2.5$ 或 $x = -3$

经检验 $x = 2.5$ 或 $x = -3$ 均为原方程的根，但 $x = -3$ 不符合题意，故舍去，

答：原计划每天运送2.5万米³，实际每天运送3万米³．

【点评】本题考查了反比例函数的应用及分式方程的应用，现实生活中存在大量成反比例函数的两个变量，解答该类问题的关键是确定两个变量之间的函数关系，然后利用待定系数法求出它们的关系式．

22. 【分析】（1）根据某一行（或某一列）各数之和为负数，则改变该行（或该列）中所有数的符号，称为一次“操作”，先改变表1的第4列，再改变第2行即可；

（2）根据每一列所有数之和分别为2，0，-2，0，每一行所有数之和分别为-1，1，然后分别根据如果操作第三列或第一行，根据每行的各数之和与每列的各数之和均为非负整数，列出不等式组，求出不等式组的解集，即可得出答案．

【解答】解：（1）根据题意得：原数表改变第4列得：

1	2	3	7
-2	-1	0	-1

再改变第2行得：

1	2	3	7
2	1	0	1

(2) $\because$ 每一列所有数之和分别为 2, 0, -2, 0, 每一行所有数之和分别为 -1, 1, 则:

①如果操作第三列,

a	$a^2 - 1$	a	$-a^2$
$2 - a$	$1 - a^2$	$2 - a$	a^2

第一行之和为 $2a - 1$, 第二行之和为 $5 - 2a$,

$$\begin{cases} 2a - 1 \geq 0 \\ 5 - 2a \geq 0 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \frac{1}{2} \leq a \leq \frac{5}{2},$$

又 $\because a$ 为整数,

$$\therefore a = 1 \text{ 或 } a = 2,$$

②如果操作第一行,

$-a$	$1 - a^2$	a	a^2
$2 - a$	$1 - a^2$	$a - 2$	a^2

则每一列之和分别为 $2 - 2a$, $2 - 2a^2$, $2a - 2$, $2a^2$,

已知 $2a^2 \geq 0$, 则:

$$\begin{cases} 2 - 2a \geq 0 \\ 2 - 2a^2 \geq 0, \\ 2a - 2 \geq 0 \end{cases}$$

解得 $a = 1$,

验证当 $a = 1$ 时, 满足不等式,

综上所述: $a = 1$.

【点评】 此题考查了一元一次不等式组的应用, 关键是读懂题意, 根据题目中的操作要求, 列出不等式组, 注意 a 为整数.

23. **【分析】** (1) 分别以 A 、 B 为圆心, AB 长为半径画弧, 两弧交于点 D , 连接 AD , BD , 同理连接 AE , CE , 如图所示, 由 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 都是等边三角形, 得到三对边相等, 两个角相等, 都为 60° 度, 利用等式的性质得到夹角相等, 利用 SAS 得到 $\triangle CAD$ 与 $\triangle EAB$ 全等, 利用全等三角形的对应边相等即可得证;

(2) $BE = CD$, 理由与 (1) 同理;

(3) 根据 (1)、(2) 的经验, 过 A 作等腰直角 $\triangle ABD$, 连接 CD , 由 $AB = AD = 100$, 利用勾股定理求出 BD 的长, 由题意得到 $\triangle DBC$ 为直角三角形, 利用勾股定理求出 CD 的长, 即为 BE 的长.

【解答】解: (1) 完成图形, 如图所示:

证明: $\because \triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 都是等边三角形,

$$\therefore AD = AB, AC = AE, \angle BAD = \angle CAE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle BAC = \angle CAE + \angle BAC, \text{ 即 } \angle CAD = \angle EAB,$$

$\because$ 在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AD=AB \\ \angle CAD=\angle EAB, \\ AC=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle EAB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BE = CD;$$

(2) $BE = CD$, 理由同 (1),

$\because$ 四边形 $ABFD$ 和 $ACGE$ 均为正方形,

$$\therefore AD = AB, AC = AE, \angle BAD = \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle EAB,$$

$\because$ 在 $\triangle CAD$ 和 $\triangle EAB$ 中,

$$\begin{cases} AD=AB \\ \angle CAD=\angle EAB, \\ AC=AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle CAD \cong \triangle EAB \text{ (SAS)},$$

$$\therefore BE = CD;$$

(3) 由 (1)、(2) 的解题经验可知, 过 A 作等腰直角 $\triangle ABD$, $\angle BAD = 90^\circ$,

则 $AD = AB = 100$ 米, $\angle ABD = 45^\circ$,

$$\therefore BD = 100\sqrt{2} \text{ 米},$$

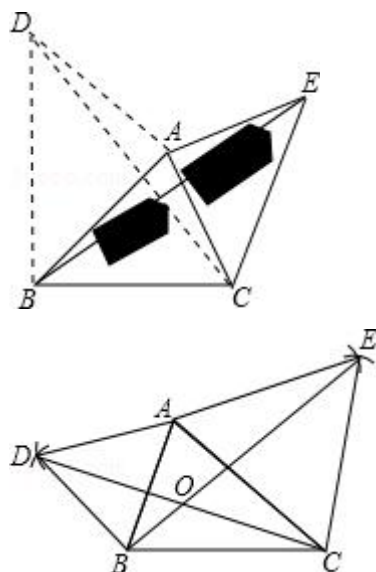
连接 CD , BD , 则由 (2) 可得 $BE = CD$,

$$\because \angle ABC = 45^\circ, \therefore \angle DBC = 90^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle DBC$ 中, $BC = 100$ 米, $BD = 100\sqrt{2}$ 米,

根据勾股定理得： $CD = \sqrt{100^2 + (100\sqrt{2})^2} = 100\sqrt{3}$ 米，

则 $BE = CD = 100\sqrt{3}$ 米。



【点评】 此题考查了四边形综合题，涉及的知识有：全等三角形的判定与性质，等边三角形，等腰直角三角形，以及正方形的性质，勾股定理，熟练掌握全等三角形的判定与性质是解本题的关键。

24. **【分析】** (1) 先求出 A 、 B 、 C 的坐标，再运用待定系数法就可以直接求出二次函数的解析式；

(2) ①由 (1) 的解析式可以求出抛物线的对称轴，分类讨论当 $\angle CEF = 90^\circ$ 时，此种情形不存在。当 $\angle CFE = 90^\circ$ 时，根据相似三角形的性质就可以求出 P 点的坐标；

②先运用待定系数法求出直线 CD 的解析式，设 PM 与 CD 的交点为 N ，根据 CD 的解析式表示出点 N 的坐标，再根据 $S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PCN} + S_{\triangle PDN}$ 就可以表示出三角形 PCD 的面积，运用顶点式就可以求出结论。

【解答】 解：(1) 在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $OA = 1$ ， $\tan \angle BAO = \frac{OB}{OA} = 3$ ，

$\therefore OB = 3OA = 3$ 。

$\because \triangle DOC$ 是由 $\triangle AOB$ 绕点 O 逆时针旋转 90° 而得到的，

$\therefore \triangle DOC \cong \triangle AOB$ ，

$\therefore OC = OB = 3$ ， $OD = OA = 1$ ，

$\therefore A$ 、 B 、 C 的坐标分别为 $(1, 0)$ ， $(0, 3)$ ， $(-3, 0)$ 。

代入解析式为

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ 9a-3b+c=0, \\ c=3 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2. \\ c=3 \end{cases}$$

∴ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$;

(2) ① ∵ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 - 2x + 3$,

$$\therefore \text{对称轴 } l = -\frac{b}{2a} = -1,$$

∴ E 点的坐标为 $(-1, 0)$.

如图, 当 $\angle CEF = 90^\circ$ 时, $PE:CE = 2:1$, $CO:OD = 3:1$, 此时 $\triangle CEF$ 与 $\triangle COD$ 不相似.

当 $\angle CFE = 90^\circ$ 时, $\triangle CFE \sim \triangle COD$, 过点 P 作 $PM \perp x$ 轴于点 M , 则 $\triangle EFC \sim \triangle EMP$.

$$\therefore \frac{EM}{MP} = \frac{EF}{FC} = \frac{DO}{OC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore MP = 3EM.$$

∵ P 的横坐标为 t ,

$$\therefore P(t, -t^2 - 2t + 3).$$

∵ P 在第二象限,

$$\therefore PM = -t^2 - 2t + 3, EM = -1 - t,$$

$$\therefore -t^2 - 2t + 3 = -(t-1)(t+3),$$

解得: $t_1 = -2$, $t_2 = -3$ (因为 P 与 C 重合, 所以舍去),

$$\therefore t = -2 \text{ 时, } y = -(-2)^2 - 2 \times (-2) + 3 = 3.$$

$$\therefore P(-2, 3).$$

∴ 当 $\triangle CEF$ 与 $\triangle COD$ 相似时, P 点的坐标为: $(-1, 4)$ 或 $(-2, 3)$;

② 设直线 CD 的解析式为 $y = kx + b$, 由题意, 得

$$\begin{cases} -3k + b = 0 \\ b = 1 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ b = 1 \end{cases}$$

∴ 直线 CD 的解析式为: $y = \frac{1}{3}x + 1$.

设 PM 与 CD 的交点为 N ，则点 N 的坐标为 $(t, \frac{1}{3}t+1)$ ，

$$\therefore NM = \frac{1}{3}t+1.$$

$$\therefore PN = PM - NM = -t^2 - 2t + 3 - (\frac{1}{3}t+1) = -t^2 - \frac{7}{3}t + 2.$$

$$\therefore S_{\triangle PCD} = S_{\triangle PCN} + S_{\triangle PDN},$$

$$\therefore S_{\triangle PCD} = \frac{1}{2}PN \cdot CM + \frac{1}{2}PN \cdot OM$$

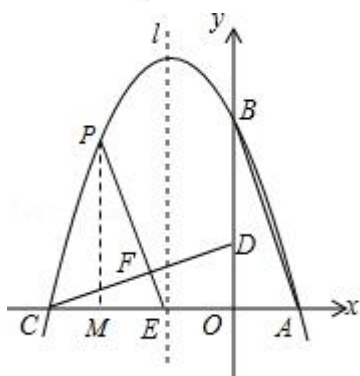
$$= \frac{1}{2}PN (CM + OM)$$

$$= \frac{1}{2}PN \cdot OC$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 (-t^2 - \frac{7}{3}t + 2)$$

$$= -\frac{3}{2}(t + \frac{7}{6})^2 + \frac{121}{24},$$

$$\therefore \text{当 } t = -\frac{7}{6} \text{ 时, } S_{\triangle PCD} \text{ 的最大值为 } \frac{121}{24}.$$



【点评】 本题考查了相似三角形的判定及性质的运用，待定系数法求函数的解析式的运用，三角形的面积公式的运用，二次函数的顶点式的运用，解答本题时，先求出二次函数的解析式是关键，用函数关系式表示出 $\triangle PCD$ 的面积由顶点式求最大值是难点．