

天津市 2013 年中考数学试卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (3 分) (2013•天津) 计算 $(-3) + (-9)$ 的结果等于 ()

- A 12 B -12 C 6 D -6

2. (3 分) (2013•天津) $\tan 60^\circ$ 的值等于 ()

- A 1 B $\sqrt{2}$ C $\sqrt{3}$ D 2

3. (3 分) (2013•天津) 下列标志中，可以看作是中心对称图形的是 ()



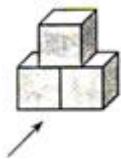
4. (3 分) (2013•天津) 中国园林网 4 月 22 日消息：为建设生态滨海，2013 年天津滨海新区将完成城市绿化面积共 8210 000m²，将 8210 000 用科学记数法表示应为 ()

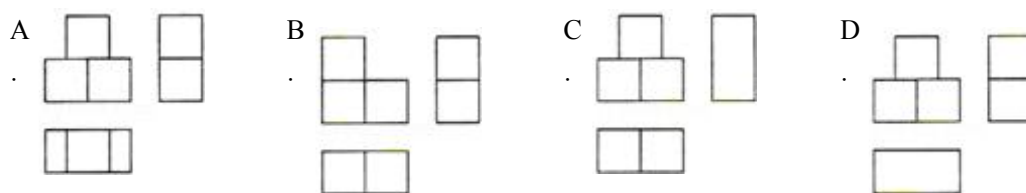
- A 821×10^2 B 82.1×10^5 C 8.21×10^6 D 0.821×10^7

5. (3 分) (2013•天津) 七年级 (1) 班与 (2) 班各选出 20 名学生进行英文打字比赛，通过对参赛学生每分钟输入的单词个数进行统计，两班成绩的平均数相同，(1) 班成绩的方差为 17.5，(2) 班成绩的方差为 15，由此可知 ()

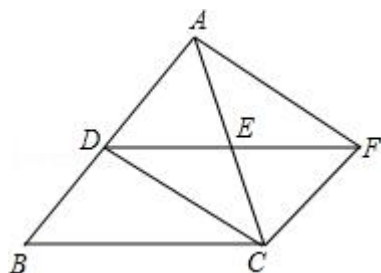
- A (1) 班比 (2) 班的成绩稳定 B (2) 班比 (1) 班的成绩稳定
C 两个班的成绩一样稳定 D 无法确定哪班的成绩更稳定

6. (3 分) (2013•天津) 如图是由 3 个相同的正方体组成的一个立体图形，它的三视图是 ()





7. (3 分) (2013•天津) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AC=BC$ ，点 D 、 E 分别是边 AB 、 AC 的中点，将 $\triangle ADE$ 绕点 E 旋转 180° 得 $\triangle CFE$ ，则四边形 $ADCF$ 一定是 ()



- A 矩形 B 菱形 C 正方形 D 梯形

8. (3 分) (2013•天津) 正六边形的边心距与边长之比为 ()

- A $\sqrt{3}: 3$ B $\sqrt{3}: 2$ C $1: 2$ D $\sqrt{2}: 2$

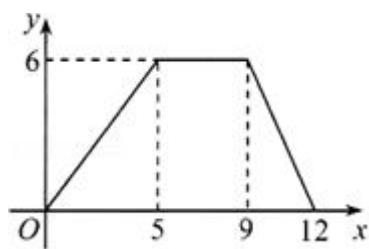
9. (3 分) (2013•天津) 若 $x=-1$ ， $y=2$ ，则 $\frac{2x}{x^2-64y^2}-\frac{1}{x-8y}$ 的值等于 ()

- A $-\frac{1}{17}$ B $\frac{1}{17}$ C $\frac{1}{16}$ D $\frac{1}{15}$

10. (3 分) (2013•天津) 如图，是一对变量满足的函数关系的图象，有下列 3 个不同的问题情境：

- ①小明骑车以 400 米/分的速度匀速骑了 5 分，在原地休息了 4 分，然后以 500 米/分的速度匀速骑回出发地，设时间为 x 分，离出发地的距离为 y 千米；
 ②有一个容积为 6 升的开口空桶，小亮以 1.2 升/分的速度匀速向这个空桶注水，注 5 分后停止，等 4 分后，再以 2 升/分的速度匀速倒空桶中的水，设时间为 x 分，桶内的水量为 y 升；
 ③矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=3$ ，动点 P 从点 A 出发，依次沿对角线 AC 、边 CD 、边 DA 运动至点 A 停止，设点 P 的运动路程为 x ，当点 P 与点 A 不重合时， $y=S_{\triangle ABP}$ ；当点 P 与点 A 重合时， $y=0$ 。

其中，符合图中所示函数关系的问题情境的个数为 ()



A 0

B 1

C 2

D 3

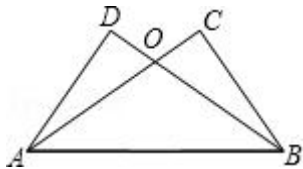
二、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

11. (3 分) (2013•天津) 计算 $a \cdot a^6$ 的结果等于_____.

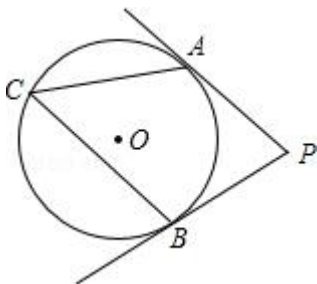
12. (3 分) (2013•天津) 一元二次方程 $x(x-6)=0$ 的两个实数根中较大的根是_____.

13. (3 分) (2013•天津) 若一次函数 $y=kx+1$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象经过第一、二、三象限, 则 k 的取值范围是_____.

14. (3 分) (2013•天津) 如图, 已知 $\angle C = \angle D$, $\angle ABC = \angle BAD$, AC 与 BD 相交于点 O , 请写出图中一组相等的线段_____.

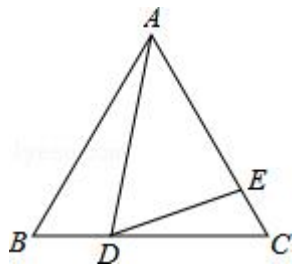


15. (3 分) (2013•天津) 如图, PA 、 PB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B , 若 $\angle P = 70^\circ$, 则 $\angle C$ 的大小为_____ (度).



16. (3 分) (2013•天津) 一个口袋中有四个完全相同的小球, 把它们分别标号为 1、2、3、4, 随机地摸出一个小球, 然后放回, 再随机地摸出一个小球, 则两次摸出的小球标号的和等于 4 的概率是_____.

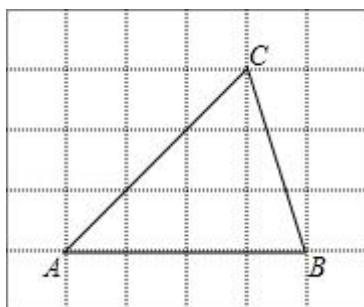
17. (3 分) (2013•天津) 如图, 在边长为 9 的正三角形 ABC 中, $BD=3$, $\angle ADE=60^\circ$, 则 AE 的长为_____.



18. (3 分) (2013•天津) 如图, 将 $\triangle ABC$ 放在每个小正方形的边长为 1 的网格中, 点 A 、 B 、 C 均落在格点上.

(I) $\triangle ABC$ 的面积等于_____;

(II) 若四边形 $DEFG$ 是 $\triangle ABC$ 中所能包含的面积最大的正方形, 请在如图所示的网格中, 用直尺和三角尺画出该正方形, 并简要说明画图方法 (不要求证明) _____.



三、解答题 (共 8 小题, 满分 66 分)

19. (6 分) (2013•天津) 解不等式组
$$\begin{cases} x-1 < 2 \\ 2x+9 > 3 \end{cases}$$
.

20. (8 分) (2013•天津) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 $A(2, 3)$.

(I) 求这个函数的解析式;

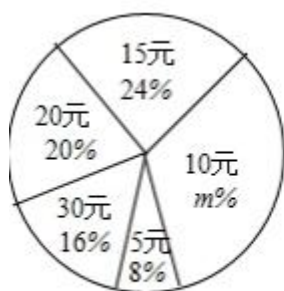
(II) 判断点 $B(-1, 6)$, $C(3, 2)$ 是否在这个函数的图象上, 并说明理由;

(III) 当 $-3 < x < -1$ 时, 求 y 的取值范围.

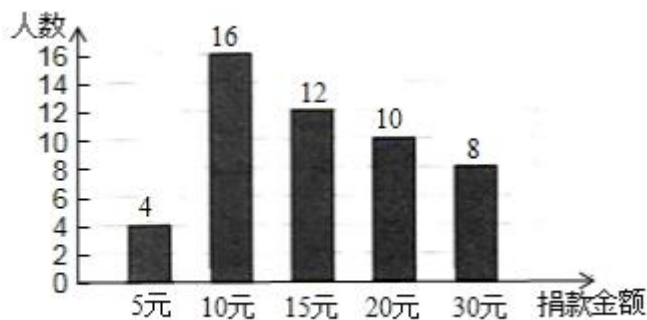
21. (8 分) (2013•天津) 四川雅安发生地震后, 某校学生会向全校 1900 名学生发起了“心系雅安”捐款活动, 为了解捐款情况, 学生会随机调查了部分学生的捐款金额, 并用得到的数据绘制了如下统计图①和图②, 请根据相关信息, 解答下列问题:

(I) 本次接受随机抽样调查的学生人数为_____, 图①中 m 的值是_____;

- (II) 求本次调查获取的样本数据的平均数、众数和中位数；
 (III) 根据样本数据，估计该校本次活动捐款金额为 10 元的学生人数.



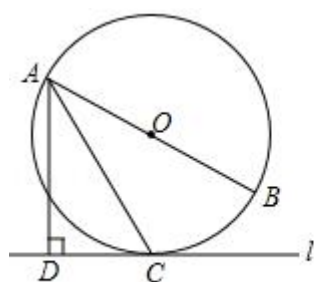
图①



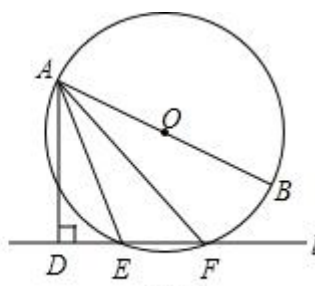
图②

22. (8 分) (2013•天津) 已知直线 l 与 $\odot O$, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AD \perp l$ 于点 D .

- (I) 如图①, 当直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 C 时, 若 $\angle DAC = 30^\circ$, 求 $\angle BAC$ 的大小;
 (II) 如图②, 当直线 l 与 $\odot O$ 相交于点 E, F 时, 若 $\angle DAE = 18^\circ$, 求 $\angle BAF$ 的大小.

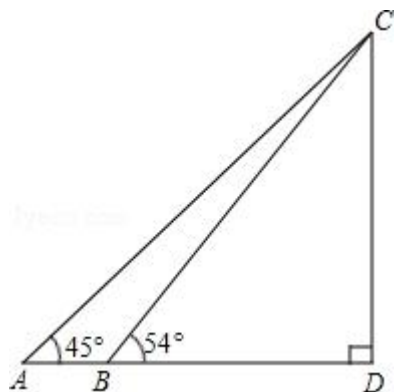


图①



图②

23. (8 分) (2013•天津) 天塔是天津市的标志性建筑之一, 某校数学兴趣小组要测量天塔的高度, 如图, 他们在点 A 处测得天塔最高点 C 的仰角为 45° , 再往天塔方向前进至点 B 处测得最高点 C 的仰角为 54° , $AB = 112\text{m}$, 根据这个兴趣小组测得的数据, 计算天塔的高度 CD ($\tan 36^\circ \approx 0.73$, 结果保留整数).



24. (8分) (2013•天津) 甲、乙两商场以同样价格出售同样的商品, 并且又各自推出不同的优惠方案: 在甲商场累计购物超过 100 元后, 超出 100 元的部分按 90%收费; 在乙商场累计购物超过 50 元后, 超出 50 元的部分按 95%收费, 设小红在同一商场累计购物 x 元, 其中 $x > 100$.

(1) 根据题意, 填写下表 (单位: 元)

累计购物	130	290	...	x
实际花费				
在甲商场	127		...	
在乙商场	126		...	

(2) 当 x 取何值时, 小红在甲、乙两商场的实际花费相同?

(3) 当小红在同一商场累计购物超过 100 元时, 在哪家商场的实际花费少?

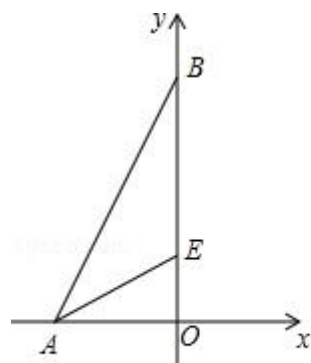
25. (10分) (2013•天津) 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(-2, 0)$, 点 $B(0, 4)$, 点 E 在 OB 上, 且 $\angle OAE = \angle OBA$.

(I) 如图①, 求点 E 的坐标;

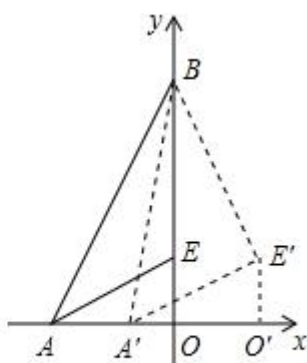
(II) 如图②, 将 $\triangle AEO$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle A'E'O'$, 连接 $A'B$ 、 BE' .

①设 $AA' = m$, 其中 $0 < m < 2$, 试用含 m 的式子表示 $A'B^2 + BE'^2$, 并求出使 $A'B^2 + BE'^2$ 取得最小值时点 E' 的坐标;

②当 $A'B + BE'$ 取得最小值时, 求点 E' 的坐标 (直接写出结果即可).



图①



图②

26. (10分) (2013•天津) 已知抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的对称轴是直线 l , 顶点为点 M . 若自变量 x 和函数值 y_1 的部分对应值如下表所示:

(I) 求 y_1 与 x 之间的函数关系式;

(II) 若经过点 $T(0, t)$ 作垂直于 y 轴的直线 l' , A 为直线 l' 上的动点, 线段 AM 的垂直平分线交直线 l 于点 B , 点 B 关于直线 AM 的对称点为 P , 记 $P(x, y_2)$.

(1) 求 y_2 与 x 之间的函数关系式;

(2) 当 x 取任意实数时, 若对于同一个 x , 有 $y_1 < y_2$ 恒成立, 求 t 的取值范围.

x	...	-1	0	3	...
-----	-----	----	---	---	-----

$y_1=ax^2+bx+c$	...	0	$\frac{9}{4}$	0	...
-----------------	-----	---	---------------	---	-----

天津市 2013 年中考数学试卷

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

1. (3 分) (2013•天津) 计算 $(-3) + (-9)$ 的结果等于 ()

- A 12 B -12 C 6 D -6

考点: 有理数的加法.

分析: 根据有理数的加法法则, 先确定出结果的符号, 再把绝对值相加即可.

解答: 解: $(-3) + (-9) = -12$;

故选 B.

点评: 本题考查了有理数的加法, 用到的知识点是有理数的加法法则, 比较简单, 属于基础题.

2. (3 分) (2013•天津) $\tan 60^\circ$ 的值等于 ()

- A 1 B $\sqrt{2}$ C $\sqrt{3}$ D 2

考点: 特殊角的三角函数值.

分析: 根据记忆的特殊角的三角函数值即可得出答案.

解答: 解: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$.

故选 C.

点评: 本题考查了特殊角的三角函数值, 一些特殊角的三角函数值是需要我们熟练记忆的内容.

3. (3 分) (2013•天津) 下列标志中, 可以看作是中心对称图形的是 ()



考点: 中心对称图形

分析: 根据中心对称图形的定义, 结合选项所给图形进行判断即可.

解答: 解: A、不是中心对称图形, 故本选项错误;

B、不是中心对称图形, 故本选项错误;

C、不是中心对称图形, 故本选项错误;

D、是中心对称图形, 故本选项正确;

故选 D.

点评: 本题考查了中心对称图形的知识, 判断中心对称图形是要寻找对称中心, 图形旋转 180 度后与原图形重合.

4. (3 分) (2013•天津) 中国园林网 4 月 22 日消息: 为建设生态滨海, 2013 年天津滨海新区将完成城市绿化面积共 8210 000m², 将 8210 000 用科学记数法表示应为 ()

A 821×10^2

B 82.1×10^5

C 8.21×10^6

D 0.821×10^7

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

解答: 解: $8\ 210\ 000 = 8.21 \times 10^6$,

故选: C.

点评: 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

5. (3 分) (2013•天津) 七年级 (1) 班与 (2) 班各选出 20 名学生进行英文打字比赛, 通过对参赛学生每分钟输入的单词个数进行统计, 两班成绩的平均数相同, (1) 班成绩的方差为 17.5, (2) 班成绩的方差为 15, 由此可知 ()

A (1) 班比 (2) 班的成绩稳定

B (2) 班比 (1) 班的成绩稳定

C 两个班的成绩一样稳定

D 无法确定哪班的成绩更稳定

考点: 方差.

分析: 根据方差的意义可作出判断. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量, 方差越小, 表明这组数据分布比较集中, 各数据偏离平均数越小, 即波动越小, 数据越稳定.

解答: 解: $\because$ (1) 班成绩的方差为 17.5, (2) 班成绩的方差为 15,

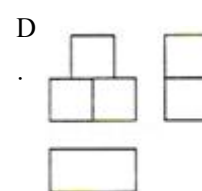
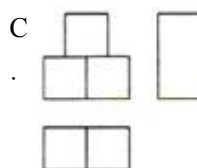
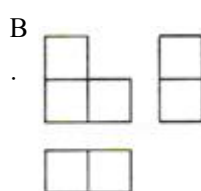
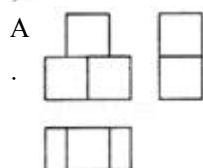
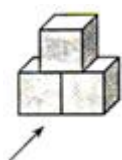
$\therefore$ (1) 班成绩的方差 $>$ (2) 班成绩的方差,

$\therefore$ (2) 班比 (1) 班的成绩稳定.

故选 B.

点评: 本题考查方差的意义. 方差是用来衡量一组数据波动大小的量, 方差越大, 表明这组数据偏离平均数越大, 即波动越大, 数据越不稳定; 反之, 方差越小, 表明这组数据分布比较集中, 各数据偏离平均数越小, 即波动越小, 数据越稳定.

6. (3 分) (2013•天津) 如图是由 3 个相同的正方体组成的一个立体图形, 它的三视图是 ()



考点: 简单组合体的三视图.

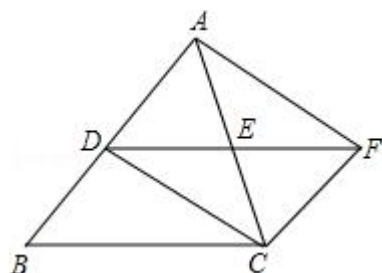
分析: 主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看, 所得到的图形.

解答: 解: 所给图形的三视图是 A 选项所给的三个图形.

故选 A.

点评: 本题考查了几何体的三种视图, 掌握定义是关键.

7. (3 分) (2013•天津) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC=BC$, 点 D、E 分别是边 AB、AC 的中点, 将 $\triangle ADE$ 绕点 E 旋转 180° 得 $\triangle CFE$, 则四边形 ADCF 一定是 ()



A 矩形

B 菱形

C 正方形

D 梯形

考点: 旋转的性质; 矩形的判定.

分析: 根据旋转的性质可得 $AE=CE$, $DE=EF$, 再根据对角线互相平分的四边形是平行四边形判断出四边形 ADCF 是平行四边形, 然后利用等腰三角形三线合一的性质求出 $\angle ADC=90^\circ$, 再利用有一个角是直角的平行四边形是矩形解答.

解答: 解: $\because \triangle ADE$ 绕点 E 旋转 180° 得 $\triangle CFE$,

$\therefore AE=CE$, $DE=EF$,

$\therefore$ 四边形 ADCF 是平行四边形,

$\because AC=BC$, 点 D 是边 AB 的中点,

$\therefore \angle ADC=90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 ADCF 矩形.

故选 A.

点评: 本题考查了旋转的性质, 矩形的判定, 主要利用了对角线互相平分的四边形是平行四边形, 有一个角是直角是平行四边形是矩形的判定方法, 熟练掌握旋转变换只改变图形的位置不改变图形的形状与大小是解题的关键.

8. (3 分) (2013•天津) 正六边形的边心距与边长之比为 ()

A $\sqrt{3}: 3$

B $\sqrt{3}: 2$

C $1: 2$

D $\sqrt{2}: 2$

考点: 正多边形和圆.

分析: 首先根据题意画出图形, 然后设六边形的边长是 a , 由勾股定理即可求得 OC 的长, 继而求得答案.

解答: 解: 如图: 设六边形的边长是 a ,

则半径长也是 a ;

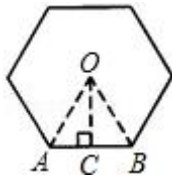
经过正六边形的中心 O 作边 AB 的垂线 OC ,

$$\text{则 } AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a,$$

$$\therefore OC = \sqrt{OA^2 - AC^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a,$$

$$\therefore \text{正六边形的边心距与边长之比为: } \frac{\sqrt{3}}{2}a: a = \sqrt{3}: 2.$$

故选 B.



点评: 此题考查了正多边形和圆的关系. 此题难度不大, 注意掌握数形结合思想的应用.

9. (3 分) (2013•天津) 若 $x = -1$, $y = 2$, 则 $\frac{2x}{x^2 - 64y^2} - \frac{1}{x - 8y}$ 的值等于 ()

A $-\frac{1}{17}$

B $\frac{1}{17}$

C $\frac{1}{16}$

D $\frac{1}{15}$

考点: 分式的化简求值.

分析: 先根据分式混合运算的法则把原式进行化简, 再把 x , y 的值代入进行计算即可.

$$\begin{aligned} \text{解答: 解: 原式} &= \frac{2x}{(x+8y)(x-8y)} - \frac{x+8y}{(x+8y)(x-8y)} \\ &= \frac{2x - x - 8y}{(x+8y)(x-8y)} \\ &= \frac{x - 8y}{(x+8y)(x-8y)} \\ &= \frac{1}{x+8y}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x = -1, y = 2 \text{ 时, 原式} = \frac{1}{-1+16} = \frac{1}{15}.$$

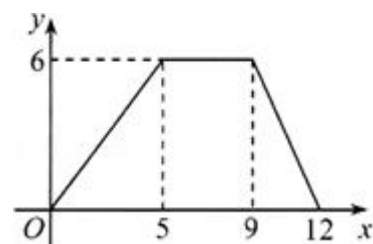
故选 D.

点评: 本题考查的是分式的混合运算，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键.

10. (3 分) (2013•天津) 如图，是一对变量满足的函数关系的图象，有下列 3 个不同的问题情境：

- ①小明骑车以 400 米/分的速度匀速骑了 5 分，在原地休息了 4 分，然后以 500 米/分的速度匀速骑回出发地，设时间为 x 分，离出发地的距离为 y 千米；
- ②有一个容积为 6 升的开口空桶，小亮以 1.2 升/分的速度匀速向这个空桶注水，注 5 分后停止，等 4 分后，再以 2 升/分的速度匀速倒空桶中的水，设时间为 x 分，桶内的水量为 y 升；
- ③矩形 $ABCD$ 中， $AB=4$ ， $BC=3$ ，动点 P 从点 A 出发，依次沿对角线 AC 、边 CD 、边 DA 运动至点 A 停止，设点 P 的运动路程为 x ，当点 P 与点 A 不重合时， $y=S_{\triangle ABP}$ ；当点 P 与点 A 重合时， $y=0$.

其中，符合图中所示函数关系的问题情境的个数为 ()



A 0

B 1

C 2

D 3

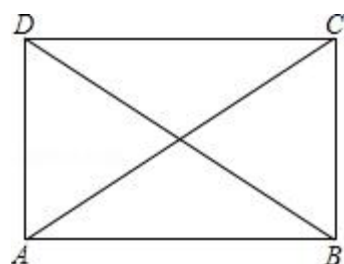
考点: 函数的图象.

- 分析:**
- ①小明骑车以 400 米/分的速度匀速骑了 5 分，所走路程为 2000 米，与图象不符合；
 - ②小亮以 1.2 升/分的速度匀速向这个空桶注水，注 5 分后停止，注水量为 $1.2 \times 5 = 6$ 升，等 4 分钟，这段时间水量不变；再以 2 升/分的速度匀速倒空桶中的水，则 3 分钟后水量为 0，符合函数图象；
 - ③当点 P 在 AC 上运动时， $S_{\triangle ABP}$ 的面积一直增加，当点 P 运动到点 C 时， $S_{\triangle ABP} = 6$ ，这段时间为 5；当点 P 在 CD 上运动时， $S_{\triangle ABP}$ 不变，这段时间为 4；当点 P 在 DA 上运动时， $S_{\triangle ABP}$ 减小，这段时间为 3，符合函数图象；

解答: 解：①小明骑车以 400 米/分的速度匀速骑了 5 分，所走路程为 2000 米，与图象不符合；

②小亮以 1.2 升/分的速度匀速向这个空桶注水，注 5 分后停止，注水量为 $1.2 \times 5 = 6$ 升，等 4 分钟，这段时间水量不变；再以 2 升/分的速度匀速倒空桶中的水，则 3 分钟后水量为 0，符合函数图象；

③如图所示：



当点 P 在 AC 上运动时， $S_{\triangle ABP}$ 的面积一直增加，当点 P 运动到点 C 时， $S_{\triangle ABP} = 6$ ，这段时间为 5；当点 P 在 CD 上运动时， $S_{\triangle ABP}$ 不变，这段时间为 4；当点 P 在 DA

上运动时, $S_{\triangle ABP}$ 减小, 这段时间为 3, 符合函数图象;
综上可得符合图中所示函数关系的问题情境的个数为 2.
故选 C.

点评: 本题考查了函数的图象, 解答本题需要同学们仔细分析所示情景, 判断函数图象是否符合, 要求同学们能将实际问题转化为函数图象, 有一定难度.

二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

11. (3 分) (2013•天津) 计算 $a \cdot a^6$ 的结果等于 a^7 .

考点: 同底数幂的乘法.

专题: 计算题.

分析: 利用同底数幂的法则计算即可得到结果.

解答: 解: $a \cdot a^6 = a^7$.

故答案为: a^7

点评: 此题考查了同底数幂的乘法运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

12. (3 分) (2013•天津) 一元二次方程 $x(x-6)=0$ 的两个实数根中较大的根是 6.

考点: 解一元二次方程-因式分解法.

专题: 计算题.

分析: 原方程转化为 $x=0$ 或 $x-6=0$, 然后解两个一次方程即可得到原方程较大的根.

解答: 解: $\because x=0$ 或 $x-6=0$,

$\therefore x_1=0, x_2=6$,

$\therefore$ 原方程较大的根为 6.

故答案为 6.

点评: 本题考查了解一元二次方程-因式分解法: 先把方程右边变形为 0, 再把方程左边分解为两个一次式的乘积, 这样原方程转化为两个一元一次方程, 然后解一次方程即可得到一元二次方程的解.

13. (3 分) (2013•天津) 若一次函数 $y=kx+1$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象经过第一、二、三象限, 则 k 的取值范围是 $k > 0$.

考点: 一次函数图象与系数的关系.

分析: 根据一次函数图象所经过的象限确定 k 的符号.

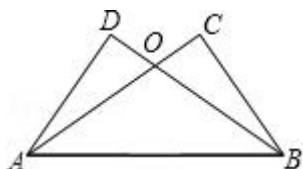
解答: 解: $\because$ 一次函数 $y=kx+1$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象经过第一、二、三象限,

$\therefore k > 0$.

故填: $k > 0$.

点评: 本题主要考查一次函数图象在坐标平面内的位置与 k 、 b 的关系. 解答本题注意理解: 直线 $y=kx+b$ 所在的位置与 k 、 b 的符号有直接的关系. $k > 0$ 时, 直线必经过一、三象限. $k < 0$ 时, 直线必经过二、四象限. $b > 0$ 时, 直线与 y 轴正半轴相交. $b=0$ 时, 直线过原点; $b < 0$ 时, 直线与 y 轴负半轴相交.

14. (3 分) (2013•天津) 如图, 已知 $\angle C = \angle D$, $\angle ABC = \angle BAD$, AC 与 BD 相交于点 O , 请写出图中一组相等的线段 $AC=BD$ (答案不唯一).



考点: 全等三角形的判定与性质.

专题: 开放型.

分析: 利用“角角边”证明 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 全等, 再根据全等三角形对应边相等解答即可.

解答: 解: $\because$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BAD$ 中,

$$\begin{cases} \angle C = \angle D \\ \angle ABC = \angle BAD, \\ AB = BA \end{cases}$$

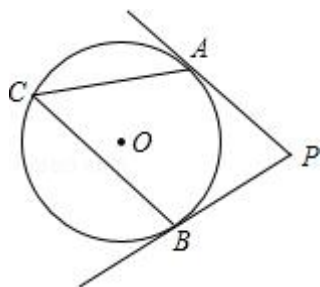
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle BAD$ (AAS),

$\therefore AC = BD, AD = BC.$

故答案为: $AC = BD$ (答案不唯一).

点评: 本题考查了全等三角形的判定与性质, 是基础题, 关键在于公共边 AB 的应用, 开放型题目, 答案不唯一.

15. (3分) (2013•天津) 如图, PA 、 PB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B , 若 $\angle P = 70^\circ$, 则 $\angle C$ 的大小为 55 (度).



考点: 切线的性质.

分析: 首先连接 OA , OB , 由 PA 、 PB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B , 根据切线的性质可得: $OA \perp PA$, $OB \perp PB$, 然后由四边形的内角和等于 360° , 求得 $\angle AOB$ 的度数, 又由圆周角定理, 即可求得答案.

解答: 解: 连接 OA , OB ,

$\because PA$ 、 PB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B ,

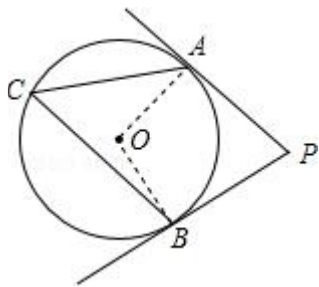
$\therefore OA \perp PA, OB \perp PB$,

即 $\angle PAO = \angle PBO = 90^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 360^\circ - \angle PAO - \angle P - \angle PBO = 360^\circ - 90^\circ - 70^\circ - 90^\circ = 110^\circ$,

$\therefore \angle C = \frac{1}{2} \angle AOB = 55^\circ$.

故答案为: 55.



点评: 此题考查了切线的性质以及圆周角定理. 此题难度不大, 注意掌握辅助线的作法, 注意掌握数形结合思想的应用.

16. (3 分) (2013•天津) 一个口袋中有四个完全相同的小球, 把它们分别标号为 1、2、3、4, 随机地摸出一个小球, 然后放回, 再随机地摸出一个小球, 则两次摸出的小球标号的和等于 4 的概率是 $\frac{3}{16}$.

考点: 列表法与树状图法.

专题: 计算题.

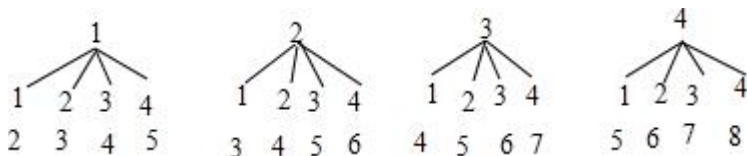
分析: 先画树状图展示所有 16 种等可能的结果数, 其中两次摸出的小球标号的和等于 4 的占 3 种, 然后根据概率的概念计算即可.

解答: 解: 如图,

随机地摸出一个小球, 然后放回, 再随机地摸出一个小球, 共有 16 种等可能的结果数, 其中两次摸出的小球标号的和等于 4 的占 3 种,

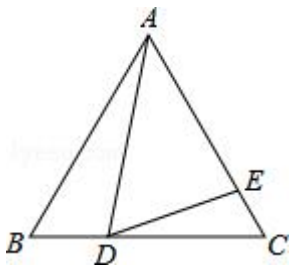
所有两次摸出的小球标号的和等于 4 的概率 $= \frac{3}{16}$.

故答案为 $\frac{3}{16}$.



点评: 本题考查了列表法或树状图法: 利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果数 n , 再找出某事件所占有的结果数 m , 然后利用概率的概念求得这个事件的概率 $= \frac{m}{n}$.

17. (3 分) (2013•天津) 如图, 在边长为 9 的正三角形 ABC 中, $BD=3$, $\angle ADE=60^\circ$, 则 AE 的长为 7.



考点：相似三角形的判定与性质；等边三角形的性质.

分析：先根据边长为 9, $BD=3$, 求出 CD 的长度, 然后根据 $\angle ADE=60^\circ$ 和等边三角形的性质, 证明 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$, 进而根据相似三角形的对应边成比例, 求得 CE 的长度, 即可求出 AE 的长度.

解答：解: $\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$$\therefore \angle B = \angle C = 60^\circ, AB = BC;$$

$$\therefore CD = BC - BD = 9 - 3 = 6;$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ADB = 120^\circ$$

$$\because \angle ADE = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle ADB + \angle EDC = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle DAB = \angle EDC,$$

$$\text{又} \because \angle B = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle DCE,$$

$$\text{则} \frac{AB}{BD} = \frac{DC}{CE},$$

$$\text{即} \frac{9}{3} = \frac{6}{CE},$$

$$\text{解得: } CE = 2,$$

$$\text{故 } AE = AC - CE = 9 - 2 = 7.$$

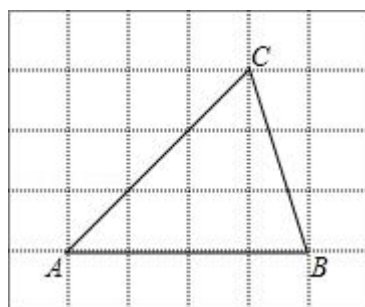
故答案为: 7.

点评：此题主要考查了相似三角形的判定和性质以及等边三角形的性质, 根据等边三角形的性质证得 $\triangle ABD \sim \triangle DCE$ 是解答此题的关键.

18. (3 分) (2013•天津) 如图, 将 $\triangle ABC$ 放在每个小正方形的边长为 1 的网格中, 点 A、B、C 均落在格点上.

(I) $\triangle ABC$ 的面积等于 6;

(II) 若四边形 DEFG 是 $\triangle ABC$ 中所能包含的面积最大的正方形, 请在如图所示的网格中, 用直尺和三角尺画出该正方形, 并简要说明画图方法 (不要求证明) 取格点 P, 连接 PC, 过点 A 画 PC 的平行线, 与 BC 交于点 Q, 连接 PQ 与 AC 相交得点 D, 过点 D 画 CB 的平行线, 与 AB 相交得点 E, 分别过点 D、E 画 PC 的平行线, 与 CB 相交得点 G、F, 则四边形 DEFG 即为所求.



考点：作图—相似变换；三角形的面积；正方形的性质.

专题：计算题.

分析：(I) $\triangle ABC$ 以 AB 为底, 高为 3 个单位, 求出面积即可;

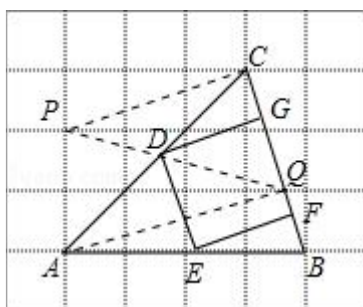
(II) 作出所求的正方形, 如图所示, 画图方法为: 取格点 P, 连接 PC, 过点 A 画

PC 的平行线，与 BC 交于点 Q，连接 PQ 与 AC 相交得点 D，过点 D 画 CB 的平行线，与 AB 相交得点 E，分别过点 D、E 画 PC 的平行线，与 CB 相交得点 G，F，则四边形 DEFG 即为所求

解答: 解: (I) $\triangle ABC$ 的面积为: $\frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$;

(II) 如图，取格点 P，连接 PC，过点 A 画 PC 的平行线，与 BC 交于点 Q，连接 PQ 与 AC 相交得点 D，过点 D 画 CB 的平行线，与 AB 相交得点 E，分别过点 D、E 画 PC 的平行线，与 CB 相交得点 G，F，则四边形 DEFG 即为所求.

故答案为: (I) 6; (II) 取格点 P，连接 PC，过点 A 画 PC 的平行线，与 BC 交于点 Q，连接 PQ 与 AC 相交得点 D，过点 D 画 CB 的平行线，与 AB 相交得点 E，分别过点 D、E 画 PC 的平行线，与 CB 相交得点 G，F，则四边形 DEFG 即为所求



点评: 此题考查了作图 - 位似变换，三角形的面积，以及正方形的性质，作出正确的图形是解本题的关键.

三、解答题 (共 8 小题, 满分 66 分)

19. (6 分) (2013•天津) 解不等式组 $\begin{cases} x-1 < 2 \\ 2x+9 > 3 \end{cases}$.

考点: 解一元一次不等式组.

专题: 计算题.

分析: 分别解两个不等式得到 $x < 3$ 和 $x > -3$ ，然后根据大于小的小于大的取中间确定不等式组的解集.

解答: 解: $\begin{cases} x-1 < 2 \text{ ①} \\ 2x+9 > 3 \text{ ②} \end{cases}$,

解①得 $x < 3$,

解②得 $x > -3$,

所以不等式组的解集为 $-3 < x < 3$.

点评: 本题考查了解一元一次不等式组: 求解出两个不等式的解集，然后按照“同大取大，同小取小，大于小的小于大的取中间，小于小的大于大的无解”确定不等式组的解集.

20. (8 分) (2013•天津) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 A (2, 3).

(I) 求这个函数的解析式;

- (II) 判断点 B (- 1, 6), C (3, 2) 是否在这个函数的图象上, 并说明理由;
 (III) 当 $-3 < x < -1$ 时, 求 y 的取值范围.

考点: 待定系数法求反比例函数解析式; 反比例函数的性质; 反比例函数图象上点的坐标特征.

分析: (I) 把点 A 的坐标代入已知函数解析式, 通过方程即可求得 k 的值.
 (II) 只要把点 B、C 的坐标分别代入函数解析式, 横纵坐标坐标之积等于 6 时, 即该点在函数图象上;
 (III) 根据反比例函数图象的增减性解答问题.

解答: 解: (I) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ (k 为常数, $k \neq 0$) 的图象经过点 A (2, 3),

$\therefore$ 把点 A 的坐标代入解析式, 得

$$3 = \frac{k}{2},$$

解得, $k = 6$,

$\therefore$ 这个函数的解析式为: $y = \frac{6}{x}$;

(II) $\because$ 反比例函数解析式 $y = \frac{6}{x}$,

$\therefore 6 = xy$.

分别把点 B、C 的坐标代入, 得

$(-1) \times 6 = -6 \neq 6$, 则点 B 不在该函数图象上.

$3 \times 2 = 6$, 则点 C 在该函数图象上;

(III) $\because$ 当 $x = -3$ 时, $y = -2$, 当 $x = -1$ 时, $y = -6$,

又 $\because k > 0$,

$\therefore$ 当 $x < 0$ 时, y 随 x 的增大而减小,

$\therefore$ 当 $-3 < x < -1$ 时, $-6 < y < -2$.

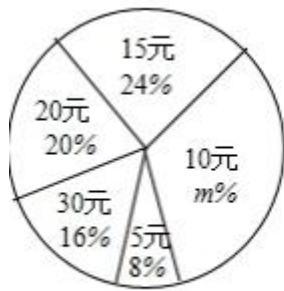
点评: 本题考查了反比例函数图象的性质、待定系数法求反比例函数解析式以及反比例函数图象上点的坐标特征. 用待定系数法求反比例函数的解析式, 是中学阶段的重点.

21. (8 分) (2013•天津) 四川雅安发生地震后, 某校学生会向全校 1900 名学生发起了“心系雅安”捐款活动, 为了解捐款情况, 学生会随机调查了部分学生的捐款金额, 并用得到的数据绘制了如下统计图①和图②, 请根据相关信息, 解答下列问题:

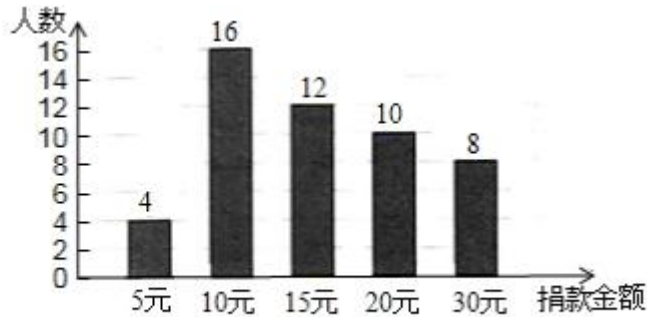
(I) 本次接受随机抽样调查的学生人数为 50, 图①中 m 的值是 32;

(II) 求本次调查获取的样本数据的平均数、众数和中位数;

(III) 根据样本数据, 估计该校本次活动捐款金额为 10 元的学生人数.



图①



图②

考点: 条形统计图; 用样本估计总体; 扇形统计图; 加权平均数; 中位数; 众数.

分析: (1) 根据条形统计图即可得出样本容量根据扇形统计图得出 m 的值即可;
 (2) 利用平均数、中位数、众数的定义分别求出即可;
 (3) 根据样本中捐款 10 元的人数, 进而得出该校本次活动捐款金额为 10 元的学生人数.

解答: 解: (1) 根据条形图 $4+16+12+10+8=50$ (人),
 $m=100-20-24-16-8=32$;

$$(2) \because \bar{x} = \frac{1}{50} (5 \times 4 + 10 \times 16 + 15 \times 12 + 20 \times 10 + 30 \times 8) = 16,$$

$\therefore$ 这组数据的平均数为: 16,

$\therefore$ 在这组样本数据中, 10 出现次数最多为 16 次,

$\therefore$ 这组数据的众数为: 10,

$\therefore$ 将这组样本数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个数都是 15,

$\therefore$ 这组数据的中位数为: $\frac{1}{2} (15+15) = 15$;

(3) $\therefore$ 在 50 名学生中, 捐款金额为 10 元的学生人数比例为 32%,

$\therefore$ 由样本数据, 估计该校 1900 名学生中捐款金额为 10 元的学生人数比例为 32%, 有 $1900 \times 32\% = 608$,

$\therefore$ 该校本次活动捐款金额为 10 元的学生约有 608 名.

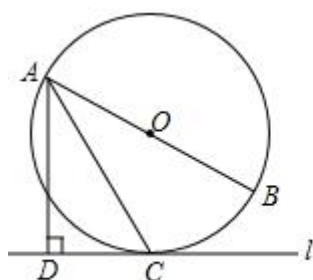
故答案为: 50, 32.

点评: 此题主要考查了平均数、众数、中位数的统计意义以及利用样本估计总体等知识. 找中位数要把数据按从小到大的顺序排列, 位于最中间的一个数或两个数的平均数为中位数; 众数是一组数据中出现次数最多的数据, 注意众数可以不止一个; 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数.

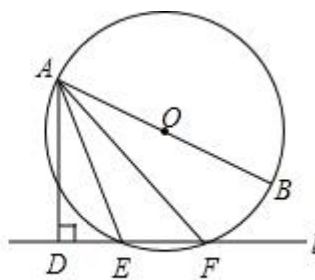
22. (8 分) (2013•天津) 已知直线 l 与 $\odot O$, AB 是 $\odot O$ 的直径, $AD \perp l$ 于点 D .

(I) 如图①, 当直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 C 时, 若 $\angle DAC = 30^\circ$, 求 $\angle BAC$ 的大小;

(II) 如图②, 当直线 l 与 $\odot O$ 相交于点 E, F 时, 若 $\angle DAE = 18^\circ$, 求 $\angle BAF$ 的大小.



图①



图②

考点: 切线的性质；圆周角定理；直线与圆的位置关系.

分析: (I) 如图①, 首先连接 OC , 根据当直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 C , $AD \perp l$ 于点 D . 易证得 $OC \parallel AD$, 继而可求得 $\angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$;

(II) 如图②, 连接 BF , 由 AB 是 $\odot O$ 的直径, 根据直径所对的圆周角是直角, 可得 $\angle AFB = 90^\circ$, 由三角形外角的性质, 可求得 $\angle AEF$ 的度数, 又由圆的内接四边形的性质, 求得 $\angle B$ 的度数, 继而求得答案.

解答: 解: (I) 如图①, 连接 OC ,

$\because$ 直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 C ,

$\therefore OC \perp l$,

$\because AD \perp l$,

$\therefore OC \parallel AD$,

$\therefore \angle OCA = \angle DAC$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle BAC = \angle OCA$,

$\therefore \angle BAC = \angle DAC = 30^\circ$;

(II) 如图②, 连接 BF ,

$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle AFB = 90^\circ$,

$\therefore \angle BAF = 90^\circ - \angle B$,

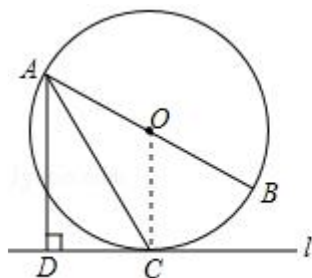
$\therefore \angle AEF = \angle ADE + \angle DAE = 90^\circ + 18^\circ = 108^\circ$,

在 $\odot O$ 中, 四边形 $ABFE$ 是圆的内接四边形,

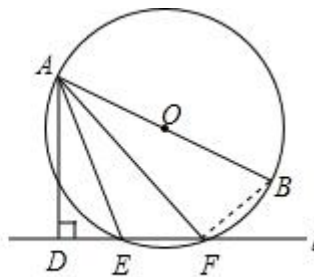
$\therefore \angle AEF + \angle B = 180^\circ$,

$\therefore \angle B = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$,

$\therefore \angle BAF = 90^\circ - \angle B = 180^\circ - 72^\circ = 18^\circ$.



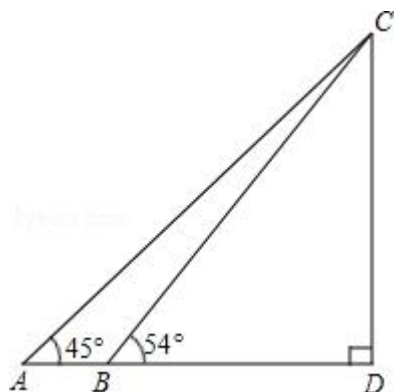
图①



图②

点评: 此题考查了切线的性质、圆周角定理以及圆的内接四边形的性质. 此题难度适中, 注意掌握辅助线的作法, 注意数形结合思想的应用.

23. (8分) (2013•天津) 天塔是天津市的标志性建筑之一, 某校数学兴趣小组要测量天塔的高度, 如图, 他们在点 A 处测得天塔最高点 C 的仰角为 45° , 再往天塔方向前进至点 B 处测得最高点 C 的仰角为 54° , $AB=112\text{m}$, 根据这个兴趣小组测得的数据, 计算天塔的高度 CD ($\tan 36^\circ \approx 0.73$, 结果保留整数).



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析: 首先根据题意得: $\angle CAD=45^\circ$, $\angle CBD=54^\circ$, $AB=112\text{m}$, 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, 易求得 $BD=AD-AB=CD-112$; 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, 可得 $BD=CD \cdot \tan 36^\circ$, 即可得 $CD \cdot \tan 36^\circ = CD - 112$, 继而求得答案.

解答: 解: 根据题意得: $\angle CAD=45^\circ$, $\angle CBD=54^\circ$, $AB=112\text{m}$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中, $\angle ACD = \angle CAD = 45^\circ$,

$\therefore AD = CD$,

$\therefore AD = AB + BD$,

$\therefore BD = AD - AB = CD - 112 \text{ (m)}$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\tan \angle BCD = \frac{BD}{CD}$, $\angle BCD = 90^\circ - \angle CBD = 36^\circ$,

$\therefore \tan 36^\circ = \frac{BD}{CD}$,

$\therefore BD = CD \cdot \tan 36^\circ$,

$\therefore CD \cdot \tan 36^\circ = CD - 112$,

$\therefore CD = \frac{112}{1 - \tan 36^\circ} \approx \frac{112}{1 - 0.73} \approx 415 \text{ (m)}$.

答: 天塔的高度 CD 为: 415m.

点评: 本题考查了仰角的知识. 此题难度适中, 注意能借助仰角构造直角三角形并解直角三角形是解此题的关键, 注意掌握数形结合思想与方程思想的应用.

24. (8分) (2013•天津) 甲、乙两商场以同样价格出售同样的商品, 并且又各自推出不同的优惠方案: 在甲商场累计购物超过 100 元后, 超出 100 元的部分按 90% 收费; 在乙商场累计购物超过 50 元后, 超出 50 元的部分按 95% 收费, 设小红在同一商场累计购物 x 元, 其中 $x > 100$.

(1) 根据题意, 填写下表 (单位: 元)

累计购物	130	290	...	x
实际花费				

在甲商场	127		...	
在乙商场	126		...	

- (2) 当 x 取何值时, 小红在甲、乙两商场的实际花费相同?
- (3) 当小红在同一商场累计购物超过 100 元时, 在哪家商场的实际花费少?

考点: 一元一次不等式的应用; 一元一次方程的应用.

分析: (1) 根据已知得出 $100 + (290 - 100) \times 0.9$ 以及 $50 + (290 - 50) \times 0.95$ 进而得出答案, 同理即可得出累计购物 x 元的实际花费;

(2) 根据题中已知条件, 求出 $0.95x + 2.5$, $0.9x + 10$ 相等, 从而得出正确结论;

(3) 根据 $0.95x + 2.5$ 与 $0.9x + 10$ 相比较, 从而得出正确结论.

解答: 解: (1) 在甲商场: $100 + (290 - 100) \times 0.9 = 271$,

$$100 + (290 - 100) \times 0.9x = 0.9x + 10;$$

$$\text{在乙商场: } 50 + (290 - 50) \times 0.95 = 278,$$

$$50 + (290 - 50) \times 0.95x = 0.95x + 2.5;$$

(2) 根据题意得出:

$$0.9x + 10 = 0.95x + 2.5,$$

$$\text{解得: } x = 150,$$

$\therefore$ 当 $x = 150$ 时, 小红在甲、乙两商场的实际花费相同,

(3) 由 $0.9x + 10 < 0.95x + 2.5$,

$$\text{解得: } x > 150,$$

$$0.9x + 10 > 0.95x + 2.5,$$

$$\text{解得: } x < 150,$$

$$y_B = 0.95x + 50 (1 - 95\%) = 0.95x + 2.5, \text{ 正确;}$$

$\therefore$ 当小红累计购物大于 150 时上没封顶, 选择甲商场实际花费少;

当小红累计购物超过 100 元而不到 150 元时, 在乙商场实际花费少.

点评: 此题主要考查了一元一次不等式的应用和一元一次方程的应用, 此题问题较多且不是很简单, 有一定难度. 涉及方案选择时应与方程或不等式联系起来.

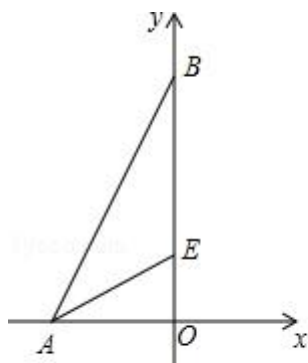
25. (10 分) (2013•天津) 在平面直角坐标系中, 已知点 A (-2, 0), 点 B (0, 4), 点 E 在 OB 上, 且 $\angle OAE = \angle OBA$.

(I) 如图①, 求点 E 的坐标;

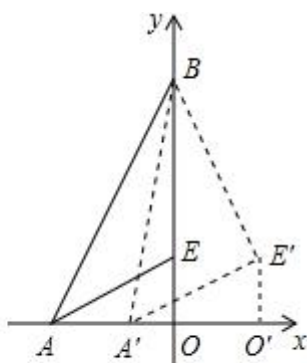
(II) 如图②, 将 $\triangle AEO$ 沿 x 轴向右平移得到 $\triangle A'E'O'$, 连接 $A'B$ 、 BE' .

①设 $AA' = m$, 其中 $0 < m < 2$, 试用含 m 的式子表示 $A'B^2 + BE'^2$, 并求出使 $A'B^2 + BE'^2$ 取得最小值时点 E' 的坐标;

②当 $A'B + BE'$ 取得最小值时, 求点 E' 的坐标 (直接写出结果即可).



图①



图②

考点: 相似形综合题.

分析: (I) 根据相似三角形 $\triangle OAE \sim \triangle OBA$ 的对应边成比例得到 $\frac{OA}{OB} = \frac{OE}{OA}$, 则易求 $OE=1$,

所以 $E(0, 1)$;

(II) 如图②, 连接 EE' . 在 $Rt\triangle A'BO$ 中, 勾股定理得到 $A'B^2 = (2-m)^2 + 4^2 = m^2 - 4m + 20$, 在 $Rt\triangle BE'E$ 中, 利用勾股定理得到 $BE'^2 = E'E^2 + BE^2 = m^2 + 9$, 则 $A'B^2 + BE'^2 = 2m^2 - 4m + 29 = 2(m-1)^2 + 27$. 所以由二次函数最值的求法知, 当 $m=1$ 即点 E' 的坐标是 $(1, 1)$ 时, $A'B^2 + BE'^2$ 取得最小值.

解答: 解: (I) 如图①, $\because$ 点 $A(-2, 0)$, 点 $B(0, 4)$,

$\therefore OA=2, OB=4$.

$\because \angle OAE = \angle OBA, \angle EOA = \angle AOB = 90^\circ$,

$\therefore \triangle OAE \sim \triangle OBA$,

$\therefore \frac{OA}{OB} = \frac{OE}{OA}$, 即 $\frac{2}{4} = \frac{OE}{2}$,

解得, $OE=1$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(0, 1)$;

(II) ①如图②, 连接 EE' .

由题设知 $AA'=m$ ($0 < m < 2$), 则 $A'O=2-m$.

在 $Rt\triangle A'BO$ 中, 由 $A'B^2 = A'O^2 + BO^2$, 得 $A'B^2 = (2-m)^2 + 4^2 = m^2 - 4m + 20$.

$\because \triangle A'E'O'$ 是 $\triangle AEO$ 沿 x 轴向右平移得到的,

$\therefore EE' \parallel AA'$, 且 $EE'=AA'$.

$\therefore \angle BEE'=90^\circ, EE'=m$.

又 $BE=OB-OE=3$,

$\therefore$ 在 $Rt\triangle BE'E$ 中, $BE'^2 = E'E^2 + BE^2 = m^2 + 9$,

$\therefore A'B^2 + BE'^2 = 2m^2 - 4m + 29 = 2(m-1)^2 + 27$.

当 $m=1$ 时, $A'B^2 + BE'^2$ 可以取得最小值, 此时, 点 E' 的坐标是 $(1, 1)$.

②如图②, 过点 A 作 $AB' \perp x$, 并使 $AB'=BE=3$.

易证 $\triangle AB'A' \cong \triangle EBE'$,

$\therefore B'A=BE'$,

$\therefore A'B + BE' = A'B + B'A'$.

①记直线 l 与直线 l' 交于点 $C(1, t)$, 当点 A' 与点 C 不重合时, 由已知得, AM 与 BP 互相垂直平分, 故可得出四边形 $ANMP$ 为菱形, 所以 $PA \parallel l$, 再由点 $P(x, y_2)$ 可知点 $A(x, t) (x \neq 1)$, 所以 $PM=PA=|y_2-t|$, 过点 P 作 $PQ \perp l$ 于点 Q , 则点 $Q(1, y_2)$, 故 $QM=|y_2-3|$, $PQ=AC=|x-1|$, 在 $Rt\triangle PQM$ 中, 根据勾股定理即可得出 y_2 与 x 之间的函数关系式, 再由当点 A 与点 C 重合时, 点 B 与点 P 重合可得出 P 点坐标, 故可得出 y_2 与 x 之间的函数关系式;

②据题意, 借助函数图象: 当抛物线 y_2 开口方向向上时, 可知 $6-2t > 0$, 即 $t < 3$ 时, 抛物线 y_1 的顶点 $M(1, 3)$, 抛物线 y_2 的顶点 $(1, \frac{t+3}{2})$, 由于 $3 > \frac{t+3}{2}$, 所以不合题意, 当抛物线 y_2 开口方向向下时, $6-2t < 0$, 即 $t > 3$ 时, 求出 $y_1 - y_2$ 的值; 若 $3t - 11 \neq 0$, 要使 $y_1 < y_2$ 恒成立, 只要抛物线方向及且顶点 $(1, \frac{3-t}{2})$ 在 x 轴下方, 因为 $3-t < 0$, 只要 $3t - 11 > 0$, 解得 $t > \frac{11}{3}$, 符合题意; 若 $3t - 11 = 0$, $y_1 - y_2 = -\frac{1}{3} < 0$, 即 $t = \frac{11}{3}$ 也符合题意.

解答: 解: (I) $\because$ 抛物线经过点 $(0, \frac{9}{4})$,

$$\therefore c = \frac{9}{4}.$$

$$\therefore y_1 = ax^2 + bx + \frac{9}{4}.$$

$\because$ 点 $(-1, 0)$ 、 $(3, 0)$ 在抛物线 $y_1 = ax^2 + bx + \frac{9}{4}$ 上,

$$\therefore \begin{cases} a - b + \frac{9}{4} = 0 \\ 9a + 3b + \frac{9}{4} = 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases},$$

$\therefore y_1$ 与 x 之间的函数关系式为: $y_1 = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$;

$$(II) \because y_1 = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4},$$

$$\therefore y_1 = -\frac{3}{4}(x-1)^2 + 3,$$

$\therefore$ 直线 l 为 $x=1$, 顶点 $M(1, 3)$.

①由题意得, $t \neq 3$,

如图, 记直线 l 与直线 l' 交于点 $C(1, t)$, 当点 A' 与点 C 不重合时,

$\because$ 由已知得, AM 与 BP 互相垂直平分,

$\therefore$ 四边形 $ANMP$ 为菱形,

$\therefore PA \parallel l$,

又 $\because$ 点 $P(x, y_2)$,

$\therefore$ 点 $A(x, t) (x \neq 1)$,

$\therefore PM=PA=|y_2-t|$,

过点 P 作 $PQ \perp l$ 于点 Q, 则点 Q $(1, y_2)$,

$$\therefore QM = |y_2 - 3|, PQ = AC = |x - 1|,$$

在 $Rt\triangle PQM$ 中,

$$\therefore PM^2 = QM^2 + PQ^2, \text{ 即 } (y_2 - t)^2 = (y_2 - 3)^2 + (x - 1)^2, \text{ 整理得, } y_2 = \frac{1}{6 - 2t} (x - 1)$$

$$^2 + \frac{t+3}{2},$$

$$\text{即 } y_2 = \frac{1}{6 - 2t} x^3 - \frac{1}{3 - t} x + \frac{10 - t^2}{6 - 2t},$$

$\therefore$ 当点 A 与点 C 重合时, 点 B 与点 P 重合,

$$\therefore P \left(1, \frac{t+3}{2} \right),$$

$\therefore$ P 点坐标也满足上式,

$$\therefore y_2 \text{ 与 } x \text{ 之间的函数关系式为 } y_2 = \frac{1}{6 - 2t} x^3 - \frac{1}{3 - t} x + \frac{10 - t^2}{6 - 2t} \quad (t \neq 3);$$

②根据题意, 借助函数图象:

当抛物线 y_2 开口方向向上时, $6 - 2t > 0$, 即 $t < 3$ 时, 抛物线 y_1 的顶点 M $(1, 3)$,

抛物线 y_2 的顶点 $\left(1, \frac{t+3}{2} \right)$,

$$\therefore 3 > \frac{t+3}{2},$$

$\therefore$ 不合题意,

当抛物线 y_2 开口方向向下时, $6 - 2t < 0$, 即 $t > 3$ 时,

$$y_1 - y_2 = -\frac{3}{4} (x - 1)^2 + 3 - \left[\frac{1}{6 - 2t} (x - 1)^2 + \frac{t+3}{2} \right]$$

$$= \frac{3t - 11}{4(3 - t)} (x - 1)^2 + \frac{3 - t}{2},$$

若 $3t - 11 \neq 0$, 要使 $y_1 < y_2$ 恒成立,

只要抛物线 $y = \frac{3t - 11}{4(3 - t)} (x - 1)^2 + \frac{3 - t}{2}$ 开口方向向下, 且顶点 $\left(1, \frac{3 - t}{2} \right)$ 在 x

轴下方,

$\therefore 3 - t < 0$, 只要 $3t - 11 > 0$, 解得 $t > \frac{11}{3}$, 符合题意;

若 $3t - 11 = 0$, $y_1 - y_2 = -\frac{1}{3} < 0$, 即 $t = \frac{11}{3}$ 也符合题意.

综上, 可以使 $y_1 < y_2$ 恒成立的 t 的取值范围是 $t \geq \frac{11}{3}$.

