

2012 年天津市中考数学试卷

一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

1. (3 分) (2012•天津) $2\cos 60^\circ$ 的值等于 ()

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

2. (3 分) (2012•天津) 下列标志中, 可以看作是中心对称图形的是 ()



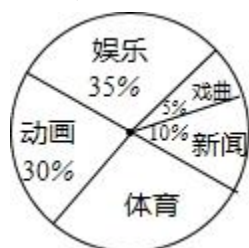
3. (3 分) (2012•天津) 据某域名统计机构公布的数据显示, 截至 2012 年 5 月 21 日, 我国“.NET”域名注册量约为 560000 个, 居全球第三位, 将 560000 用科学记数法表示应为 ()

- A. 560×10^3 B. 56×10^4 C. 5.6×10^5 D. 0.56×10^6

4. (3 分) (2012•天津) 估计 $\sqrt{6}+1$ 的值在 ()

- A. 2 到 3 之间 B. 3 到 4 之间 C. 4 到 5 之间 D. 5 到 6 之间

5. (3 分) (2012•天津) 为调查某校 2000 名学生对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目的喜爱情况, 随机抽取部分学生进行调查, 并结合调查数据作出如图所示的扇形统计图. 根据统计图提供的信息, 可估算出该校喜爱体育节目的学生共有 ()

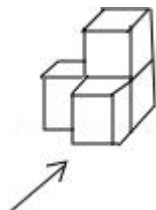


- A. 300 名 B. 400 名 C. 500 名 D. 600 名

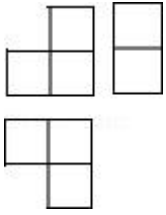
6. (3 分) (2012•天津) 将下列图形绕其对角线的交点逆时针旋转 90° , 所得图形一定与原图形重合的是 ()

- A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 正方形

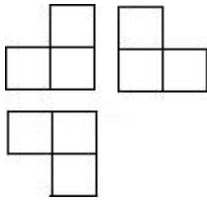
7. (3 分) (2012•天津) 如图是一个由 4 个相同的正方体组成的立体图形, 它的三视图是 ()



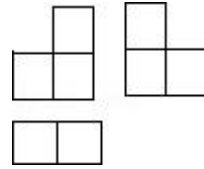
A.



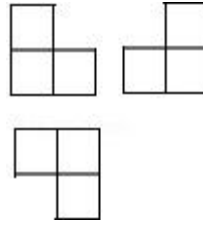
B.



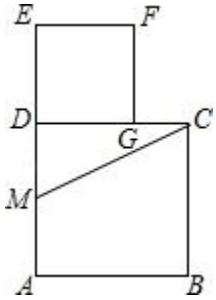
C.



D.



8. (3分) (2012•天津) 如图, 在边长为 2 的正方形 ABCD 中, M 为边 AD 的中点, 延长 MD 至点 E, 使 ME=MC, 以 DE 为边作正方形 DEFG, 点 G 在边 CD 上, 则 DG 的长为 ()



A.

$$\sqrt{3} - 1$$

B.

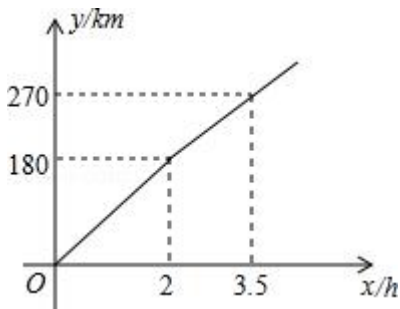
$$3 - \sqrt{5}$$

$$C. \sqrt{5} + 1$$

D.

$$\sqrt{5} - 1$$

9. (3分) (2012•天津) 某电视台“走基层”栏目的一位记者乘汽车赴 360km 外的农村采访, 全程的前一部分为高速公路, 后一部分为乡村公路. 若汽车在高速公路和乡村公路上分别以某一速度匀速行驶, 汽车行驶的路程 y (单位: km) 与时间 x (单位: h) 之间的关系如图所示, 则下列结论正确的是 ()



A. 汽车在高速公路上的行驶速度为 100km/h

B. 乡村公路总长为 90km

C. 汽车在乡村公路上的行驶速度为 60km/h

D. 该记者在出发后 4.5h 到达采访地

10. (3分) (2012•天津) 若关于 x 的一元二次方程 $(x-2)(x-3)=m$ 有实数根 x_1, x_2 , 且 $x_1 \neq x_2$, 有下列结论:

① $x_1=2, x_2=3$; ② $m > -\frac{1}{4}$; ③ 二次函数 $y=(x-x_1)(x-x_2)+m$ 的图象与 x 轴交点的坐标为 (2, 0) 和 (3, 0).

其中, 正确结论的个数是 ()

A.

0

B.

1

C.

2

D.

3

二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

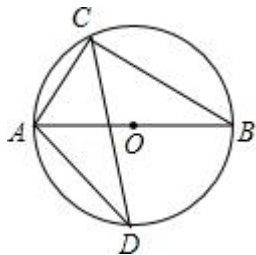
11. (3分) (2011•铜仁地区) $|-3| = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. (3分) (2012•天津) 化简 $\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$ 的结果是_____.

13. (3分) (2012•天津) 袋子中装有 5 个红球和 3 个黑球, 这些球除了颜色外都相同. 从袋子中随机的摸出一个球, 则它是红球的概率是_____.

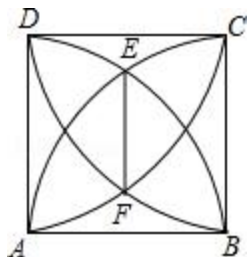
14. (3分) (2012•天津) 将正比例函数 $y = -6x$ 的图象向上平移, 则平移后所得图象对应的函数解析式可以是_____ (写出一个即可).

15. (3分) (2012•天津) 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 D 为 $\odot O$ 上一点, 若 $\angle CAB = 55^\circ$, 则 $\angle ADC$ 的大小为_____ (度).



16. (3分) (2012•天津) 若一个正六边形的周长为 24, 则该六边形的面积为_____.

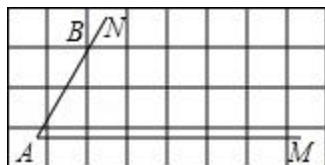
17. (3分) (2012•天津) 如图, 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 以顶点 A 、 B 为圆心, 1 为半径的两弧交于点 E , 以顶点 C 、 D 为圆心, 1 为半径的两弧交于点 F , 则 EF 的长为_____.



18. (3分) (2012•天津) “三等分任意角”是数学史上一个著名问题. 已知一个角 $\angle MAN$, 设 $\angle \alpha = \frac{1}{3} \angle MAN$.

(I) 当 $\angle MAN = 69^\circ$ 时, $\angle \alpha$ 的大小为_____ (度);

(II) 如图, 将 $\angle MAN$ 放置在每个小正方形的边长为 1cm 的网格中, 角的一边 AM 与水平方向的网格线平行, 另一边 AN 经过格点 B , 且 $AB = 2.5\text{cm}$. 现要求只能使用带刻度的直尺, 请在图中作出 $\angle \alpha$, 并简要说明做法 (不要证明) _____.



三、解答题 (共 8 小题, 满分 66 分)

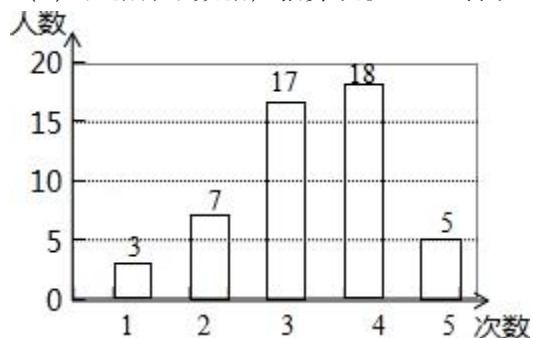
19. (6分) (2012•天津) 解不等式组 $\begin{cases} 3x+1 > x+3 \\ 2x-1 < x+1 \end{cases}$.

20. (8分) (2012•天津) 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ (k 为常数, $k \neq 1$).

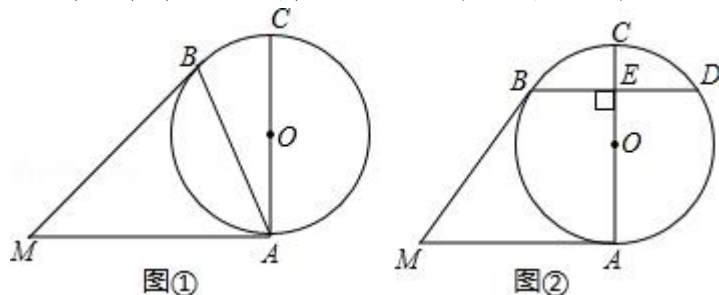
- (I) 其图象与正比例函数 $y=x$ 的图象的一个交点为 P ，若点 P 的纵坐标是 2，求 k 的值；
- (II) 若在其图象的每一支上， y 随 x 的增大而减小，求 k 的取值范围；
- (III) 若其图象的一直位于第二象限，在这一支上任取两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，当 $y_1 > y_2$ 时，试比较 x_1 与 x_2 的大小。

21. (8分) (2012•天津) 在开展“学雷锋社会实践”活动中，某校为了解全校 1200 名学生参加活动的情况，随机调查了 50 名学生每人参加活动的次数，并根据数据绘成条形统计图如图。

- (I) 求这 50 个样本数据的平均数、众数和中位数；
- (II) 根据样本数据，估算该校 1200 名学生共参加了多少次活动？

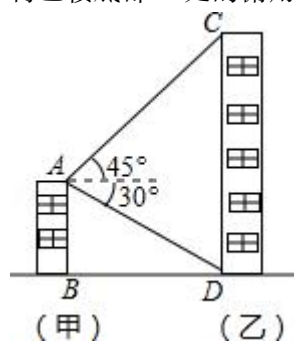


22. (8分) (2012•天津) 已知 $\odot O$ 中， AC 为直径， MA 、 MB 分别切 $\odot O$ 于点 A 、 B 。



- (I) 如图①，若 $\angle BAC=25^\circ$ ，求 $\angle AMB$ 的大小；
- (II) 如图②，过点 B 作 $BD \perp AC$ 于 E ，交 $\odot O$ 于点 D ，若 $BD=MA$ ，求 $\angle AMB$ 的大小。

23. (8分) (2012•天津) 如图，甲楼 AB 的高度为 123m，自甲楼楼顶 A 处，测得乙楼顶端 C 处的仰角为 45° ，测得乙楼底部 D 处的俯角为 30° ，求乙楼 CD 的高度 (结果精确到 0.1m, $\sqrt{3}$ 取 1.73)。



24. (8分) (2012•天津) 某通讯公司推出了移动电话的两种计费方式 (详情见下表)。

	月使用费/元	主叫限定时间/分	主叫超时费/(元/分)	被叫
方式一	58	150	0.25	免费
方式二	88	350	0.19	免费

设一个月内使用移动电话主叫的时间为 t 分 (t 为正整数)，请根据表中提供的信息回答下列问题：

- (I) 用含有 t 的式子填写下表：

	$t \leq 150$	$150 < t < 350$	$t = 350$	$t > 350$
方式一计费/元	58	_____	108	_____
方式二计费/元	88	88	88	_____

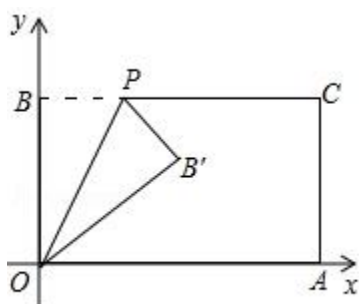
(II) 当 t 为何值时, 两种计费方式的费用相等?

(III) 当 $330 < t < 360$ 时, 你认为选用哪种计费方式省钱 (直接写出结果即可).

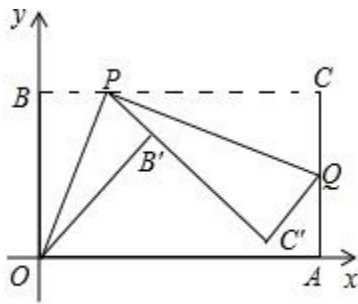
温馨提示:

若选用方式一,
每月固定交费 58 元,
当主动打出电话月累
计时间不超过 150 分,
不再额外交费; 当超
过 150 分, 超过部分
每分加收 0.25 元.

25. (10 分) (2012•天津) 已知一个矩形纸片 $OACB$, 将该纸片放置在平面直角坐标系中, 点 $A(11, 0)$, 点 $B(0, 6)$, 点 P 为 BC 边上的动点 (点 P 不与点 B 、 C 重合), 经过点 O 、 P 折叠该纸片, 得点 B' 和折痕 OP . 设 $BP=t$.



图①



图②

(I) 如图①, 当 $\angle BOP=30^\circ$ 时, 求点 P 的坐标;

(II) 如图②, 经过点 P 再次折叠纸片, 使点 C 落在直线 PB' 上, 得点 C' 和折痕 PQ , 若 $AQ=m$, 试用含有 t 的式子表示 m ;

(III) 在 (II) 的条件下, 当点 C' 恰好落在边 OA 上时, 求点 P 的坐标 (直接写出结果即可).

26. (10 分) (2012•天津) 已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ ($0 < 2a < b$) 的顶点为 $P(x_0, y_0)$, 点 $A(1, y_A)$ 、 $B(0, y_B)$ 、 $C(-1, y_C)$ 在该抛物线上.

(I) 当 $a=1$, $b=4$, $c=10$ 时,

①求顶点 P 的坐标;

②求 $\frac{y_A}{y_B - y_C}$ 的值;

(II) 当 $y_0 \geq 0$ 恒成立时, 求 $\frac{y_A}{y_B - y_C}$ 的最小值.

2012 年天津市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. (3 分) (2012•天津) $2\cos 60^\circ$ 的值等于 ()

- A. () 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2
- 故选 A.

点评: 本题考查了特殊角的三角函数值, 熟记 30° 、 45° 、 60° 角的三角函数值是解题的关键.

2. (3 分) (2012•天津) 下列标志中, 可以看作是中心对称图形的是 ()



考点: 中心对称图形.

分析: 根据中心对称图形的概念: 把一个图形绕某一点旋转 180° , 如果旋转后的图形能够与原来的图形重合, 那么这个图形就叫做中心对称图形, 由此结合各图形的特点求解.

解答: 解: 根据中心对称的定义可得: A、C、D 都不符合中心对称的定义.

故选 B.

点评: 本题考查中心对称的定义, 属于基础题, 注意掌握基本概念.

3. (3 分) (2012•天津) 据某域名统计机构公布的数据显示, 截至 2012 年 5 月 21 日, 我国“.NET”域名注册量约为 560000 个, 居全球第三位, 将 560000 用科学记数法表示应为 ()

- A. 560×10^3 B. 56×10^4 C. 5.6×10^5 D. 0.56×10^6

考点: 科学记数法—表示较大的数.

分析: 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值是易错点, 由于 560000 有 6 位, 所以可以确定 $n = 6 - 1 = 5$.

解答: 解: $560\ 000 = 5.6 \times 10^5$.

故选 C.

点评: 此题考查科学记数法表示较大的数的方法, 准确确定 n 值是关键.

4. (3 分) (2012•天津) 估计 $\sqrt{6} + 1$ 的值在 ()

- A. 2 到 3 之间 B. 3 到 4 之间 C. 4 到 5 之间 D. 5 到 6 之间

考点: 估算无理数的大小.

专题: 计算题.

分析: 利用“夹逼法”得出 $\sqrt{6}$ 的范围, 继而也可得出 $\sqrt{6} + 1$ 的范围.

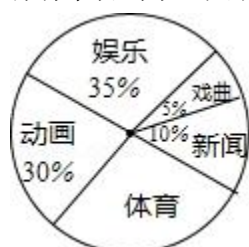
解答: 解: $\because 2=\sqrt{4}<\sqrt{6}<\sqrt{9}=3$,

$\therefore 3<\sqrt{6}+1<4$,

故选 B.

点评: 此题考查了估算无理数的大小的知识, 属于基础题, 解答本题的关键是掌握夹逼法的运用.

5. (3 分) (2012•天津) 为调查某校 2000 名学生对新闻、体育、动画、娱乐、戏曲五类电视节目的喜爱情况, 随机抽取部分学生进行调查, 并结合调查数据作出如图所示的扇形统计图. 根据统计图提供的信息, 可估算出该校喜爱体育节目的学生共有 ()



- A. 300 名 B. 400 名 C. 500 名 D. 600 名

考点: 扇形统计图; 用样本估计总体.

分析: 根据扇形图可以得出该校喜爱体育节目的学生所占比例, 进而得出该校喜爱体育节目的学生数目.

解答: 解: 根据扇形图可得:

该校喜爱体育节目的学生所占比例为: $1 - 5\% - 35\% - 30\% - 10\% = 20\%$,

故该校喜爱体育节目的学生共有: $2000 \times 20\% = 400$,

故选: B.

点评: 此题主要考查了扇形图的应用, 该校喜爱体育节目的学生所占比例进而求出具体人数是解题关键.

6. (3 分) (2012•天津) 将下列图形绕其对角线的交点逆时针旋转 90° , 所得图形一定与原图形重合的是 ()

- A. 平行四边形 B. 矩形 C. 菱形 D. 正方形

考点: 旋转对称图形.

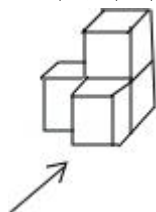
分析: 根据旋转对称图形的性质, 可得出四边形需要满足的条件, 结合选项即可得出答案.

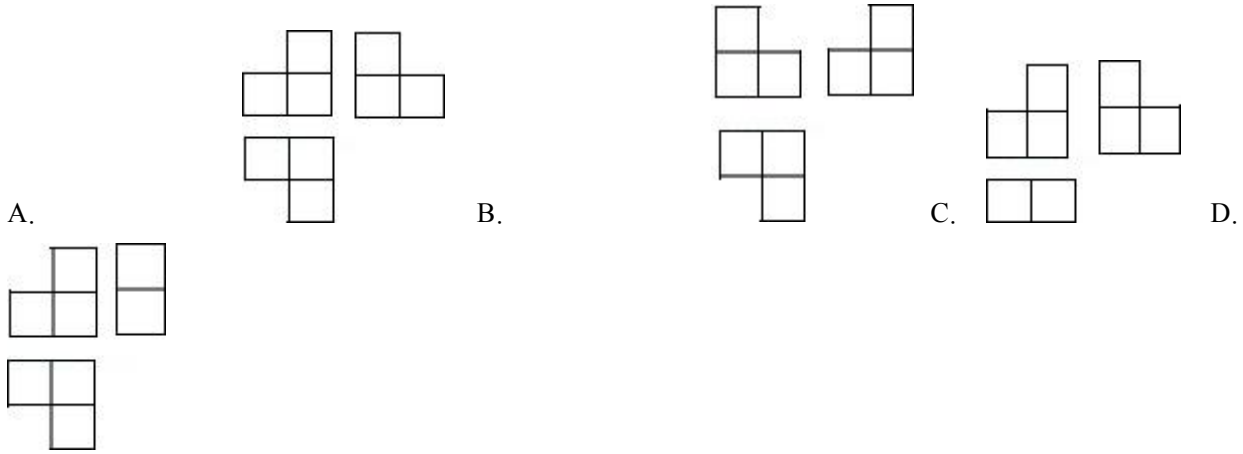
解答: 解: 由题意可得, 此四边形的对角线互相垂直、平分且相等, 则这个四边形是正方形.

故选 D.

点评: 本题主要考查了旋转对称图形旋转的最小的度数的计算方法, 把一个图形绕着一个定点旋转一个角度后, 与初始图形重合, 这种图形叫做旋转对称图形, 这个定点叫做旋转对称中心, 旋转的角度叫做旋转角.

7. (3 分) (2012•天津) 如图是一个由 4 个相同的正方体组成的立体图形, 它的三视图是 ()





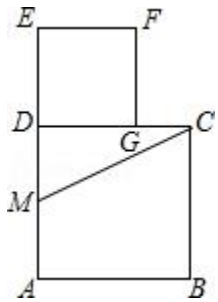
考点: 简单组合体的三视图。

分析: 主视图、左视图、俯视图是分别从物体正面、左面和上面看，所得到的图形。

解答: 解：从正面看可得从左往右 2 列正方形的个数依次为 1，2；从左面看可得到从左往右 2 列正方形的个数依次为 2，1；从上面看可得从上到下 2 行正方形的个数依次为 1，2，故选 A.

点评: 本题考查了三视图的知识，左视图是从物体的左面看得到的视图。

8. (3 分) (2012•天津) 如图，在边长为 2 的正方形 ABCD 中，M 为边 AD 的中点，延长 MD 至点 E，使 ME=MC，以 DE 为边作正方形 DEFG，点 G 在边 CD 上，则 DG 的长为 ()



- A. $\sqrt{3}-1$ B. $3-\sqrt{5}$ C. $\sqrt{5}+1$ D. $\sqrt{5}-1$

考点: 正方形的性质；勾股定理。

分析: 利用勾股定理求出 CM 的长，即 ME 的长，有 DM=DE=DG，所以可以求出 DE，进而得到 DG 的长。

解答: 解：∵ 四边形 ABCD 是正方形，M 为边 DA 的中点，

$$\therefore DM = \frac{1}{2}DC = 1,$$

$$\therefore CM = \sqrt{DC^2 + DM^2} = \sqrt{5},$$

$$\therefore ME = MC = \sqrt{5},$$

$$\therefore ED = EM - DM = \sqrt{5} - 1,$$

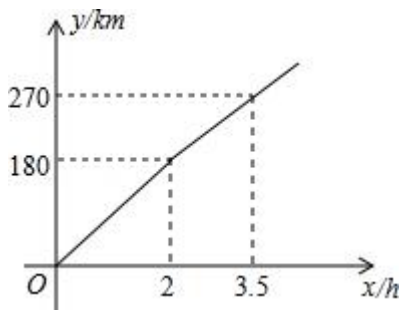
∵ 四边形 EDGF 是正方形，

$$\therefore DG = DE = \sqrt{5} - 1.$$

故选 D.

点评: 本题考查了正方形的性质和勾股定理的运用，属于基础题目。

9. (3 分) (2012•天津) 某电视台“走基层”栏目的一位记者乘汽车赴 360km 外的农村采访，全程的前一部分为高速公路，后一部分为乡村公路。若汽车在高速公路和乡村公路上分别以某一速度匀速行驶，汽车行驶的路程 y (单位：km) 与时间 x (单位：h) 之间的关系如图所示，则下列结论正确的是 ()



- A. 汽车在高速公路上的行驶速度为 100km/h
- B. 乡村公路总长为 90km
- C. 汽车在乡村公路上的行驶速度为 60km/h
- D. 该记者在出发后 4.5h 到达采访地

考点： 函数的图象。

分析： 根据函数的图象和已知条件对每一项分别进行分析，即可得出正确答案.

解答： 解：A、汽车在高速公路上的行驶速度为 $180 \div 2 = 90$ (km/h)，故本选项错误；

B、乡村公路总长为 $360 - 180 = 180$ (km)，故本选项错误；

C、汽车在乡村公路上的行驶速度为 $180 \div 3 = 60$ (km/h)，故本选项正确；

D、 $2 + (360 - 180) \div [(270 - 180) \div 1.5] = 2 + 3 = 5$ h，故该记者在出发后 5h 到达采访地，故本选项错误.

故选 C.

点评： 本题考查利用函数的图象解决实际问题，正确理解函数图象横纵坐标表示的意义，理解问题的过程，就能够通过图象得到函数问题的相应解决.

10. (3 分) (2012•天津) 若关于 x 的一元二次方程 $(x - 2)(x - 3) = m$ 有实数根 x_1, x_2 ，且 $x_1 \neq x_2$ ，有下列结论：

① $x_1 = 2, x_2 = 3$ ；② $m > -\frac{1}{4}$ ；③ 二次函数 $y = (x - x_1)(x - x_2) + m$ 的图象与 x 轴交点的坐标为 $(2, 0)$ 和 $(3, 0)$ 。

其中，正确结论的个数是 ()

- A. 0
- B. 1
- C. 2
- D. 3

考点： 抛物线与 x 轴的交点；一元二次方程的解；根的判别式；根与系数的关系。

专题： 计算题。

分析： 将已知的一元二次方程整理为一般形式，根据方程有两个不相等的实数根，得到根的判别式大于 0，列出关于 m 的不等式，求出不等式的解集即可对选项②进行判断；再利用根与系数的关系求出两根之积为 $6 - m$ ，这只有在 $m = 0$ 时才能成立，故选项①错误；将选项③中的二次函数解析式整理后，利用根与系数关系得出的两根之和与两根之积代入，整理得到确定出二次函数解析式，令 $y = 0$ ，得到关于 x 的方程，求出方程的解得到 x 的值，确定出二次函数图象与 x 轴的交点坐标，即可对选项③进行判断.

解答： 解：一元二次方程 $(x - 2)(x - 3) = m$ 化为一般形式得： $x^2 - 5x + 6 - m = 0$ ，

$\because$ 方程有两个不相等的实数根 x_1, x_2 ，

$\therefore b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4(6 - m) = 4m + 1 > 0$ ，

解得： $m > -\frac{1}{4}$ ，故选项②正确；

$\because$ 一元二次方程实数根分别为 x_1, x_2 ，

$\therefore x_1 + x_2 = 5, x_1 x_2 = 6 - m$ ，

而选项①中 $x_1 = 2, x_2 = 3$ ，只有在 $m = 0$ 时才能成立，故选项①错误；

二次函数 $y = (x - x_1)(x - x_2) + m = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 + m = x^2 - 5x + (6 - m) + m = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$ ，

令 $y = 0$ ，可得 $(x - 2)(x - 3) = 0$ ，

解得： $x = 2$ 或 3 ，

$\therefore$ 抛物线与 x 轴的交点为 $(2, 0)$ 或 $(3, 0)$ ，故选项③正确.

综上所述，正确的结论有 2 个：②③.

故选 C.

点评: 此题考查了抛物线与 x 轴的交点, 一元二次方程的解, 根与系数的关系, 以及根的判别式的运用, 是中考中常考的综合题.

二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

11. (3 分) (2011•铜仁地区) $|-3| = \underline{3}$.

考点: 绝对值.

分析: 根据负数的绝对值等于这个数的相反数, 即可得出答案.

解答: 解: $|-3|=3$.

故答案为: 3.

点评: 此题主要考查了绝对值的性质, 正确记忆绝对值的性质是解决问题的关键.

12. (3 分) (2012•天津) 化简 $\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$ 的结果是 $\underline{\frac{1}{x-1}}$.

考点: 分式的加减法.

专题: 计算题.

分析: 根据同分母分式相加减, 分母不变, 只把分子相加减计算, 然后约分即可得解.

解答: 解: $\frac{x}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2}$,

$$= \frac{x-1}{(x-1)^2},$$

$$= \frac{1}{x-1}.$$

故答案为: $\frac{1}{x-1}$.

点评: 本题主要考查了同分母分式的加减运算, 是基础题, 比较简单, 注意要约分.

13. (3 分) (2012•天津) 袋子中装有 5 个红球和 3 个黑球, 这些球除了颜色外都相同. 从袋子中随机的摸出一个球, 则它是红球的概率是 $\underline{\frac{5}{8}}$.

考点: 概率公式.

分析: 根据概率的求法, 找准两点: ①全部情况的总数; ②符合条件的情况数目; 二者的比值就是其发生的概率.

解答: 解: 袋中球的总数为: $5+3=8$,

取到红球的概率为: $\frac{5}{8}$;

故答案为: $\frac{5}{8}$.

点评: 此题主要考查了概率的求法, 如果一个事件有 n 种可能, 而且这些事件的可能性相同, 其中事件 A 出现 m 种结果, 那么事件 A 的概率 $P(A) = \frac{m}{n}$.

14. (3分) (2012•天津) 将正比例函数 $y = -6x$ 的图象向上平移, 则平移后所得图象对应的函数解析式可以是 $y = -6x + 1$ (答案不唯一) (写出一个即可).

考点: 一次函数图象上点的坐标特征.

专题: 开放型.

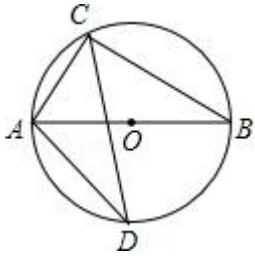
分析: 根据“上加下减”的原则在函数解析式后加一个大于 0 的数即可.

解答: 解: “上加下减”的原则可知该函数的解析式可以是: $y = -6x + 1$ (答案不唯一).

故答案为: $y = -6x + 1$ (答案不唯一).

点评: 本题考查了一次函数的性质, 只要比例系数 k 相同, 则直线平行, 保证 k 不变的条件下, b 的正负决定平移的方向.

15. (3分) (2012•天津) 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 D 为 $\odot O$ 上一点, 若 $\angle CAB = 55^\circ$, 则 $\angle ADC$ 的大小为 35 (度).



考点: 圆周角定理.

分析: 由 AB 为 $\odot O$ 的直径, 根据直径所对的圆周角是直角, $\angle ACB = 90^\circ$, 又由直角三角形的两锐角互余, 即可求得 $\angle B$ 的度数, 然后根据在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 即可求得答案.

解答: 解: $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because \angle CAB = 55^\circ,$$

$$\therefore \angle B = 90^\circ - \angle CAB = 35^\circ,$$

$$\therefore \angle ADC = \angle B = 35^\circ.$$

故答案为: 35° .

点评: 此题考查了圆周角定理与直角三角形的性质. 此题难度不大, 注意直径所对的圆周角是直角与在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等定理的应用, 注意数形结合思想的应用.

16. (3分) (2012•天津) 若一个正六边形的周长为 24, 则该六边形的面积为 $24\sqrt{3}$.

考点: 正多边形和圆.

分析: 首先根据题意画出图形, 即可得 $\triangle OBC$ 是等边三角形, 又由正六边形 $ABCDEF$ 的周长为 24, 即可求得 BC 的长, 继而求得 $\triangle OBC$ 的面积, 则可求得该六边形的面积.

解答: 解: 如图, 连接 OB , OC , 过 O 作 $OM \perp BC$ 于 M ,

$$\therefore \angle BOC = \frac{1}{6} \times 360^\circ = 60^\circ,$$

$$\because OB = OC,$$

$$\therefore \triangle OBC \text{ 是等边三角形},$$

$$\because \text{正六边形 } ABCDEF \text{ 的周长为 } 24,$$

$$\therefore BC = 24 \div 6 = 4,$$

$$\therefore OB = BC = 4,$$

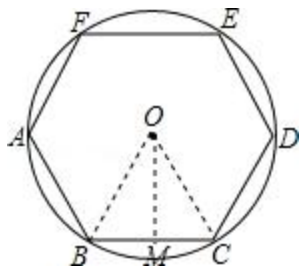
$$\therefore BM = \frac{1}{2} BC = 2,$$

$$\therefore OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times BC \times OM = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3},$$

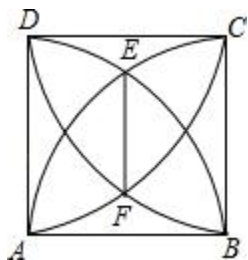
$$\therefore \text{该六边形的面积为: } 4\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}.$$

故答案为: $24\sqrt{3}$.



点评: 此题考查了圆的内接六边形的性质与等边三角形的判定与性质. 此题难度不大, 注意掌握数形结合思想的应用.

17. (3分) (2012•天津) 如图, 已知正方形 ABCD 的边长为 1, 以顶点 A、B 为圆心, 1 为半径的两弧交于点 E, 以顶点 C、D 为圆心, 1 为半径的两弧交于点 F, 则 EF 的长为 $\sqrt{3} - 1$.



考点: 正方形的性质; 全等三角形的判定与性质; 勾股定理.

分析: 连接 AE, BE, DF, CF, 可证明三角形 AEB 是等边三角形, 利用等边三角形的性质和勾股定理即可求出边 AB 上的高线, 同理可求出 CD 边上的高线, 进而求出 EF 的长.

解答: 解: 连接 AE, BE, DF, CF.

$\because$ 以顶点 A、B 为圆心, 1 为半径的两弧交于点 E, $AB=1$,

$\therefore AB=AE=BE$,

$\therefore \triangle AEB$ 是等边三角形,

$\therefore$ 边 AB 上的高线为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

同理: CD 边上的高线为: $\frac{\sqrt{3}}{2}$,

延长 EF 交 AB 于 N, 并反向延长 EF 交 DC 于 M, 则 E、F、M、N 共线,

$\because AE=BE$,

$\therefore$ 点 E 在 AB 的垂直平分线上,

同理: 点 F 在 DC 的垂直平分线上,

$\because$ 四边形 ABCD 是正方形,

$\therefore AB \parallel DC$,

$\therefore MN \perp AB$, $MN \perp DC$,

设 F 到 AB 到距离为 x, E 到 DC 的距离为 x' , $EF=y$,

由题意可知: $x=x'$,

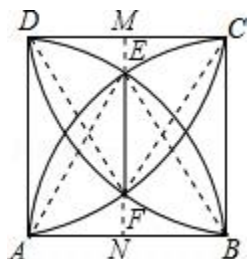
则 $x+y+x=1$,

$\therefore x+y=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\therefore x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore EF = 1 - 2x = \sqrt{3} - 1.$$

故答案为 $\sqrt{3} - 1$.

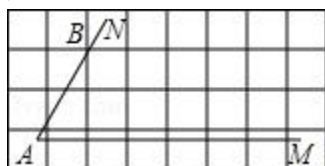


点评: 本题考查了正方形的性质和等边三角形的判定和性质以及勾股定理的运用，解题的关键是添加辅助线构造等边三角形，利用等边三角形的性质解答即可。

18. (3 分) (2012•天津) “三等分任意角”是数学史上一个著名问题. 已知一个角 $\angle MAN$, 设 $\angle \alpha = \frac{1}{3} \angle MAN$.

(I) 当 $\angle MAN = 69^\circ$ 时, $\angle \alpha$ 的大小为 23 (度);

(II) 如图, 将 $\angle MAN$ 放置在每个小正方形的边长为 1cm 的网格中, 角的一边 AM 与水平方向的网格线平行, 另一边 AN 经过格点 B, 且 $AB = 2.5\text{cm}$. 现要求只能使用带刻度的直尺, 请在图中作出 $\angle \alpha$, 并简要说明做法 (不要证明) 如图, 让直尺有刻度一边过点 A, 设该边与过点 B 的竖直方向的网格线交于点 C, 与过点 B 水平方向的网格线交于点 D, 保持直尺有刻度的一边过点 A, 调整点 C、D 的位置, 使 $CD = 5\text{cm}$, 画射线 AD, 此时 $\angle MAD$ 即为所求的 $\angle \alpha$.



考点: 作图—应用与设计作图。

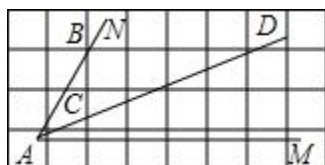
专题: 作图题。

分析: (I) 根据题意, 用 69° 乘以 $\frac{1}{3}$, 计算即可得解;

(II) 利用网格结构, 作以点 B 为直角顶点的直角三角形, 并且使斜边所在的直线过点 A, 且斜边的长度为 5, 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可得斜边上的中线等于 AB 的长度, 再结合三角形的外角性质可知, $\angle BAD = 2 \angle BDC$, 再根据两直线平行, 内错角相等可得 $\angle BDC = \angle MAD$, 从而得到 $\angle MAD = \frac{1}{3} \angle MAN$.

解答: 解: (I) $\frac{1}{3} \times 69^\circ = 23^\circ$;

(II) 如图, 让直尺有刻度一边过点 A, 设该边与过点 B 的竖直方向的网格线交于点 C, 与过点 B 水平方向的网格线交于点 D, 保持直尺有刻度的一边过点 A, 调整点 C、D 的位置, 使 $CD = 5\text{cm}$, 画射线 AD, 此时 $\angle MAD$ 即为所求的 $\angle \alpha$.



点评: 本题考查了应用与设计作图, 主要利用了直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半的性质, 使作出的直角三角形斜边上的中线恰好把三角形分成两个等腰三角形是解题的关键。

三、解答题 (共 8 小题, 满分 66 分)

19. (6分) (2012•天津) 解不等式组 $\begin{cases} 3x+1 > x+3 \\ 2x-1 < x+1 \end{cases}$.

考点: 解一元一次不等式组。

分析: 分别求出各不等式的解集，再求出其公共解集即可。

解答: 解: $\begin{cases} 3x+1 > x+3 \text{①} \\ 2x-1 < x+1 \text{②} \end{cases}$

解不等式①，得 $x > 1$.

解不等式②，得 $x < 2$.

故不等式组的解集为: $1 < x < 2$.

点评: 本题考查的是解一元一次不等式组，熟知“同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到”的原则是解答此题的关键。

20. (8分) (2012•天津) 已知反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ (k 为常数， $k \neq 1$).

(I) 其图象与正比例函数 $y=x$ 的图象的一个交点为 P ，若点 P 的纵坐标是 2，求 k 的值；

(II) 若在其图象的每一支上， y 随 x 的增大而减小，求 k 的取值范围；

(III) 若其图象的一直位于第二象限，在这一支上任取两点 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，当 $y_1 > y_2$ 时，试比较 x_1 与 x_2 的大小.

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题；反比例函数的性质；反比例函数图象上点的坐标特征。

专题: 探究型。

分析: (1) 设点 P 的坐标为 $(m, 2)$ ，由点 P 在正比例函数 $y=x$ 的图象上可求出 m 的值，进而得出 P 点坐标，再根据点 P 在反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象上，所以 $2 = \frac{k-1}{2}$ ，解得 $k=5$ ；

(2) 由于在反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 图象的每一支上， y 随 x 的增大而减小，故 $k-1 > 0$ ，求出 k 的取值范围即可；

(3) 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 图象的一支位于第二象限，故在该函数图象的每一支上， y 随 x 的增大而增大，所以 $A(x_1, y_1)$ 与点 $B(x_2, y_2)$ 在该函数的第二象限的图象上，且 $y_1 > y_2$ ，故可知 $x_1 > x_2$.

解答: 解: (I) 由题意，设点 P 的坐标为 $(m, 2)$

$\because$ 点 P 在正比例函数 $y=x$ 的图象上，

$\therefore 2=m$ ，即 $m=2$.

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2, 2)$.

$\because$ 点 P 在反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 的图象上，

$\therefore 2 = \frac{k-1}{2}$ ，解得 $k=5$.

(II) $\because$ 在反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 图象的每一支上， y 随 x 的增大而减小，

$\therefore k-1 > 0$ ，解得 $k > 1$.

(III) $\because$ 反比例函数 $y = \frac{k-1}{x}$ 图象的一支位于第二象限，

$\therefore$ 在该函数图象的每一支上， y 随 x 的增大而增大.

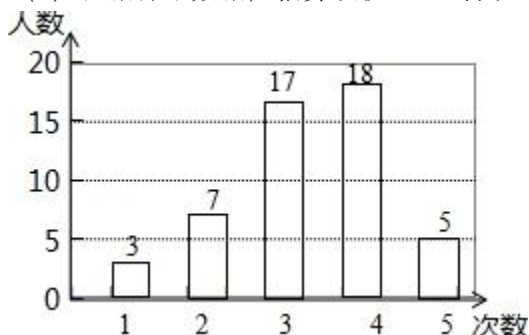
$\because$ 点 $A(x_1, y_1)$ 与点 $B(x_2, y_2)$ 在该函数的第二象限的图象上，且 $y_1 > y_2$ ， $\therefore x_1 > x_2$.

点评: 本题考查的是反比例函数与一次函数的交点问题及反比例函数的性质，熟知反比例函数的增减性是解答此题的关键.

21. (8分) (2012•天津) 在开展“学雷锋社会实践”活动中，某校为了解全校 1200 名学生参加活动的情况，随机调查了 50 名学生每人参加活动的次数，并根据数据绘成条形统计图如图.

(I) 求这 50 个样本数据的平均数、众数和中位数;

(II) 根据样本数据，估算该校 1200 名学生共参加了多少次活动?



考点: 条形统计图; 用样本估计总体; 加权平均数; 中位数; 众数.

分析: (I) 根据加权平均数的公式可以计算出平均数; 根据众数的定义: 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数, 中位数: 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数, 即可求出众数与中位数;

(II) 利用样本估计总体的方法, 用样本中的平均数 $\times 1200$ 即可.

解答: 解: (I) 观察条形统计图, 可知这组样本数据的平均数是: $\bar{x} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 7 + 3 \times 17 + 4 \times 18 + 5 \times 5}{50} = 3.3$,

则这组样本数据的平均数是 3.3.

$\because$ 在这组样本数据中, 4 出现了 18 次, 出现的次数最多,

$\therefore$ 这组数据的众数是 4.

$\because$ 将这组样本数据按从小到大的顺序排列, 其中处在中间的两个数都是 3,

有 $\frac{3+3}{2} = 3$,

$\therefore$ 这组数据的中位数是 3;

(II) $\because$ 这组样本数据的平均数是 3.3,

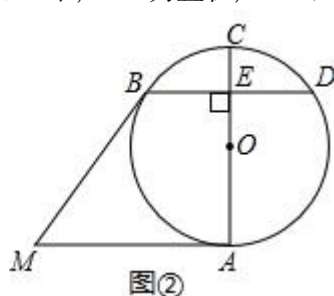
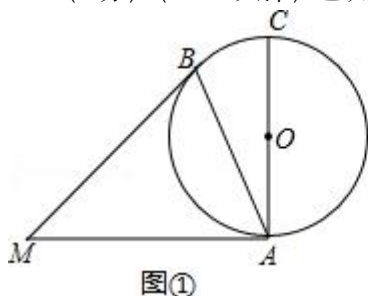
$\therefore$ 估计全校 1200 人参加活动次数的总体平均数是 3.3,

$3.3 \times 1200 = 3960$.

$\therefore$ 该校学生共参加活动约为 3960 次.

点评: 本题考查的是条形统计图, 平均数, 众数, 中位数, 以及样本估计总体. 读懂统计图, 从统计图中得到必要的信息, 掌握众数、中位数的定义是解决问题的关键, 条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据.

22. (8分) (2012•天津) 已知 $\odot O$ 中, AC 为直径, MA、MB 分别切 $\odot O$ 于点 A、B.



(I) 如图①, 若 $\angle BAC = 25^\circ$, 求 $\angle AMB$ 的大小;

(II) 如图②, 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于 E, 交 $\odot O$ 于点 D, 若 $BD = MA$, 求 $\angle AMB$ 的大小.

考点：切线的性质；菱形的判定与性质；圆周角定理。

专题：计算题。

分析：(I) 由 AM 与圆 O 相切，根据切线的性质得到 AM 垂直于 AC，可得出 $\angle MAC$ 为直角，再由 $\angle BAC$ 的度数，用 $\angle MAC - \angle BAC$ 求出 $\angle MAB$ 的度数，又 MA，MB 为圆 O 的切线，根据切线长定理得到 $MA=MB$ ，利用等边对等角可得出 $\angle MAB=\angle MBA$ ，由底角的度数，利用三角形的内角和定理即可求出 $\angle AMB$ 的度数；

(II) 连接 AB，AD，由直径 AC 垂直于弦 BD，根据垂径定理得到 A 为优弧 $\widehat{BAD}$ 的中点，根据等弧对等弦可得出 $AB=AD$ ，由 AM 为圆 O 的切线，得到 AM 垂直于 AC，又 BD 垂直于 AC，根据垂直于同一条直线的两直线平行可得出 BD 平行于 AM，又 $BD=AM$ ，利用一组对边平行且相等的四边形为平行四边形得到 ADBM 为平行四边形，再由邻边 $MA=MB$ ，得到 ADBM 为菱形，根据菱形的邻边相等可得出 $BD=AD$ ，进而得到 $AB=AD=BD$ ，即 $\triangle ABD$ 为等边三角形，根据等边三角形的性质得到 $\angle D$ 为 60° ，再利用菱形的对角相等可得出 $\angle AMB=\angle D=60^\circ$ 。

解答：解：(I) $\because MA$ 切 $\odot O$ 于点 A，

$\therefore \angle MAC=90^\circ$ ，又 $\angle BAC=25^\circ$ ，

$\therefore \angle MAB=\angle MAC - \angle BAC=65^\circ$ ，

$\because MA、MB$ 分别切 $\odot O$ 于点 A、B，

$\therefore MA=MB$ ，

$\therefore \angle MAB=\angle MBA$ ，

$\therefore \angle M=180^\circ - (\angle MAB+\angle MBA) =50^\circ$ ；

(II) 如图，连接 AD、AB，

$\because MA \perp AC$ ，又 $BD \perp AC$ ，

$\therefore BD \parallel MA$ ，又 $BD=MA$ ，

$\therefore$ 四边形 MADB 是平行四边形，又 $MA=MB$ ，

$\therefore$ 四边形 MADB 是菱形，

$\therefore AD=BD$ 。

又 $\because AC$ 为直径， $AC \perp BD$ ，

$\therefore \widehat{AB}=\widehat{AD}$ ，

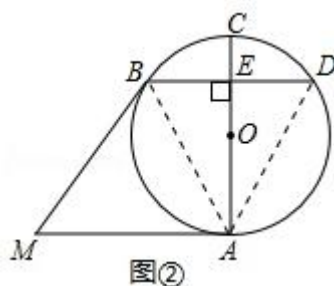
$\therefore AB=AD$ ，又 $AD=BD$ ，

$\therefore AB=AD=BD$ ，

$\therefore \triangle ABD$ 是等边三角形，

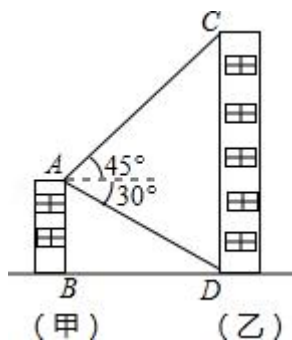
$\therefore \angle D=60^\circ$ ，

$\therefore$ 在菱形 MADB 中， $\angle AMB=\angle D=60^\circ$ 。



点评：此题考查了切线的性质，圆周角定理，弦、弧及圆心角之间的关系，菱形的判定与性质，等腰三角形的判定与性质，切线长定理，以及等边三角形的判定与性质，熟练掌握性质及定理是解本题的关键。

23. (8分) (2012•天津) 如图，甲楼 AB 的高度为 123m，自甲楼楼顶 A 处，测得乙楼顶端 C 处的仰角为 45° ，测得乙楼底部 D 处的俯角为 30° ，求乙楼 CD 的高度 (结果精确到 0.1m， $\sqrt{3}$ 取 1.73)。



考点: 解直角三角形的应用-仰角俯角问题。

分析: 首先分析图形，根据题意构造直角三角形。本题涉及多个直角三角形，应利用其公共边构造关系式求解。

解答: 解：如图，过点 A 作 $AE \perp CD$ 于点 E，
根据题意， $\angle CAE = 45^\circ$ ， $\angle DAE = 30^\circ$ 。

$\because AB \perp BD$ ， $CD \perp BD$ ，

$\therefore$ 四边形 ABDE 为矩形。

$\therefore DE = AB = 123$ 。

在 $Rt\triangle ADE$ 中， $\tan \angle DAE = \frac{DE}{AE}$ ，

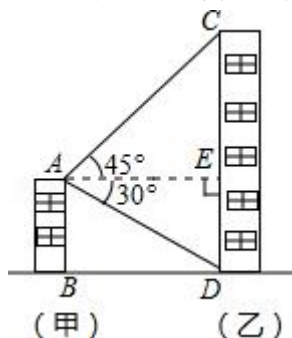
$$\therefore AE = \frac{DE}{\tan \angle DAE} = \frac{123}{\tan 30^\circ} = \frac{123}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 123\sqrt{3}.$$

在 $Rt\triangle ACE$ 中，由 $\angle CAE = 45^\circ$ ，

得 $CE = AE = 123\sqrt{3}$ 。

$$\therefore CD = CE + DE = 123(\sqrt{3} + 1) \approx 335.8.$$

答：乙楼 CD 的高度约为 335.8m。



点评: 考查了解直角三角形的应用 - 仰角俯角问题，本题要求学生借助俯角构造直角三角形，并结合图形利用三角函数解直角三角形。

24. (8 分) (2012•天津) 某通讯公司推出了移动电话的两种计费方式 (详情见下表)。

	月使用费/元	主叫限定时间/分	主叫超时费/(元/分)	被叫
方式一	58	150	0.25	免费
方式二	88	350	0.19	免费

设一个月内使用移动电话主叫的时间为 t 分 (t 为正整数)，请根据表中提供的信息回答下列问题：

(I) 用含有 t 的式子填写下表：

	$t \leq 150$	$150 < t < 350$	$t = 350$	$t > 350$
方式一计费/元	58	$0.25t + 20.5$	108	$0.25t + 20.5$
方式二计费/元	88	88	88	$0.19t + 21.5$

(II) 当 t 为何值时，两种计费方式的费用相等？

(III) 当 $330 < t < 360$ 时，你认为选用哪种计费方式省钱 (直接写出结果即可)。

温馨提示:

若选用方式一,
每月固定交费 58 元,
当主动打出电话月累
计时间不超过 150 分,
不再额外交费;当超
过 150 分,超过部分
每分加收 0.25 元.

考点: 一元一次方程的应用; 列代数式.

专题: 应用题; 图表型.

分析: (I) 根据两种方式的收费标准进行计算即可;

(II) 先判断出两种方式相等时 t 的大致范围, 继而建立方程即可得出答案.

(III) 计算出两种方式在此区间的收费情况, 然后比较即可得出答案.

解答: 解: (I) ①当 $150 < t < 350$ 时, 方式一收费: $58 + 0.25(x - 150) = 0.25t + 20.5$;

②当 $t > 350$ 时, 方式一收费: $58 + 0.25(x - 150) = 0.25t + 20.5$;

③方式二当 $t > 350$ 时收费: $88 + 0.19(x - 350) = 0.19t + 21.5$.

(II) $\because$ 当 $t > 350$ 时, $(0.25t + 20.5) - (0.19t + 21.5) = 0.06t - 1 > 0$,

$\therefore$ 当两种计费方式的费用相等时, t 的值在 $150 < t < 350$ 取得.

$\therefore$ 列方程 $0.25t + 20.5 = 88$,

解得 $t = 270$.

即当主叫时间为 270 分时, 两种计费方式的费用相等.

(III) 方式二.

①当 $350 < t < 360$ 时, 方式一收费 - 方式二收费 $y = 0.25t + 20.5 - 0.19t - 21.5 = 0.06t - 1$,

当 $350 < t < 360$ 时, $y > 0$, 即可得方式二更划算.

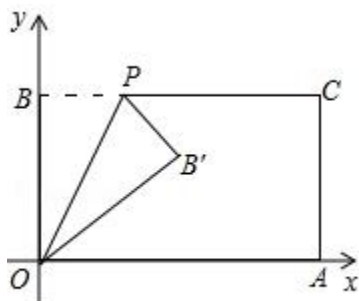
②当 $t = 350$ 时, 方式一收费 108 元, 大于方式二收费 88 元, 故方式二划算;

③当 $330 < t < 350$ 时, 方式一收费 $= 0.25t + 20.5$,

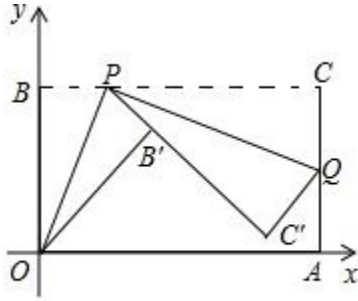
此时收费 > 103 , 故此时选择方式二划算.

点评: 此题考查了一元一次方程的应用, 注意根据图表得出解题需要的信息, 难度一般, 要将实际问题转化为数学问题来求解.

25. (10 分) (2012•天津) 已知一个矩形纸片 $OACB$, 将该纸片放置在平面直角坐标洗中, 点 $A(11, 0)$, 点 $B(0, 6)$, 点 P 为 BC 边上的动点 (点 P 不与点 B, C 重合), 经过点 O, P 折叠该纸片, 得点 B' 和折痕 OP . 设 $BP = t$.



图①



图②

(I) 如图①, 当 $\angle BOP = 30^\circ$ 时, 求点 P 的坐标;

(II) 如图②, 经过点 P 再次折叠纸片, 使点 C 落在直线 PB' 上, 得点 C' 和折痕 PQ , 若 $AQ = m$, 试用含有 t 的式子表示 m ;

(III) 在 (II) 的条件下, 当点 C' 恰好落在边 OA 上时, 求点 P 的坐标 (直接写出结果即可).

考点：翻折变换（折叠问题）；坐标与图形性质；全等三角形的判定与性质；勾股定理；相似三角形的判定与性质。

专题：几何综合题。

分析：（I）根据题意得， $\angle OBP=90^\circ$ ， $OB=6$ ，在 $Rt\triangle OBP$ 中，由 $\angle BOP=30^\circ$ ， $BP=t$ ，得 $OP=2t$ ，然后利用勾股定理，即可得方程，解此方程即可求得答案；

（II）由 $\triangle OB'P$ 、 $\triangle QC'P$ 分别是由 $\triangle OBP$ 、 $\triangle QCP$ 折叠得到的，可知 $\triangle OB'P \cong \triangle OBP$ ， $\triangle QC'P \cong \triangle QCP$ ，易证得 $\triangle OBP \sim \triangle PCQ$ ，然后由相似三角形的对应边成比例，即可求得答案；

（III）首先过点 P 作 $PE \perp OA$ 于 E ，易证得 $\triangle PC'E \sim \triangle C'QA$ ，由勾股定理可求得 $C'Q$ 的长，然后利用相似三角形的对应边成比例与 $m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6$ ，即可求得 t 的值。

解答：解：（I）根据题意， $\angle OBP=90^\circ$ ， $OB=6$ ，在 $Rt\triangle OBP$ 中，由 $\angle BOP=30^\circ$ ， $BP=t$ ，得 $OP=2t$ 。

$$\therefore OP^2 = OB^2 + BP^2,$$

$$\text{即 } (2t)^2 = 6^2 + t^2,$$

$$\text{解得： } t_1 = 2\sqrt{3}, t_2 = -2\sqrt{3} \text{ (舍去)}.$$

$$\therefore \text{点 } P \text{ 的坐标为 } (2\sqrt{3}, 6).$$

（II） $\because \triangle OB'P$ 、 $\triangle QC'P$ 分别是由 $\triangle OBP$ 、 $\triangle QCP$ 折叠得到的，

$$\therefore \triangle OB'P \cong \triangle OBP, \triangle QC'P \cong \triangle QCP,$$

$$\therefore \angle OPB' = \angle OPB, \angle QPC' = \angle QPC,$$

$$\therefore \angle OPB' + \angle OPB + \angle QPC' + \angle QPC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle OPB + \angle QPC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP + \angle OPB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOP = \angle CPQ.$$

$$\text{又 } \because \angle OBP = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OBP \sim \triangle PCQ,$$

$$\therefore \frac{OB}{PC} = \frac{BP}{CQ},$$

由题意设 $BP=t$ ， $AQ=m$ ， $BC=11$ ， $AC=6$ ，则 $PC=11-t$ ， $CQ=6-m$ 。

$$\therefore \frac{6}{11-t} = \frac{t}{6-m}.$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6 \quad (0 < t < 11).$$

（III）过点 P 作 $PE \perp OA$ 于 E ，

$$\therefore \angle PEA = \angle QAC' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PC'E + \angle EPC' = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle PC'E + \angle QC'A = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EPC' = \angle QC'A,$$

$$\therefore \triangle PC'E \sim \triangle C'QA,$$

$$\therefore \frac{PE}{AC'} = \frac{PC'}{C'Q},$$

$$\therefore PC' = PC = 11 - t, PE = OB = 6, AQ = m, C'Q = CQ = 6 - m,$$

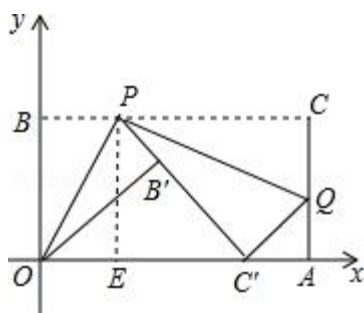
$$\therefore AC' = \sqrt{C'Q^2 - AQ^2} = \sqrt{36 - 12m},$$

$$\therefore \frac{6}{\sqrt{36 - 12m}} = \frac{11 - t}{6 - m},$$

$$\therefore m = \frac{1}{6}t^2 - \frac{11}{6}t + 6,$$

$$\text{解得: } t_1 = \frac{11 - \sqrt{13}}{3}, t_2 = \frac{11 + \sqrt{13}}{3},$$

$$\text{点 } P \text{ 的坐标为 } \left(\frac{11 - \sqrt{13}}{3}, 6\right) \text{ 或 } \left(\frac{11 + \sqrt{13}}{3}, 6\right).$$



点评: 此题考查了折叠的性质、矩形的性质以及相似三角形的判定与性质等知识. 此题难度较大, 注意掌握折叠前后图形的对应关系, 注意数形结合思想与方程思想的应用.

26. (10分) (2012·天津) 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ ($0 < 2a < b$) 的顶点为 $P(x_0, y_0)$, 点 $A(1, y_A)$ 、 $B(0, y_B)$ 、 $C(-1, y_C)$ 在该抛物线上.

(I) 当 $a=1$, $b=4$, $c=10$ 时,

①求顶点 P 的坐标;

②求 $\frac{y_A}{y_B - y_C}$ 的值;

(II) 当 $y_0 \geq 0$ 恒成立时, 求 $\frac{y_A}{y_B - y_C}$ 的最小值.

考点: 二次函数综合题.

专题: 计算题.

分析: (I) 将 $a=1$, $b=4$, $c=10$ 代入解析式, 即可得到二次函数解析式;

①将二次函数化为顶点式, 即可得到得到抛物线顶点坐标;

②将 $A(1, y_A)$ 、 $B(0, y_B)$ 、 $C(-1, y_C)$ 分别代入解析式, 即可求出 y_A 、 y_B 、 y_C 的值, 然后计算 $\frac{y_A}{y_B - y_C}$ 的值

即可;

(II) 根据 $0 < 2a < b$, 求出 $x_0 = -\frac{b}{2a} < -1$, 作出图中辅助线: 点 A 作 $AA_1 \perp x$ 轴于点 A_1 , 则 $AA_1 = y_A$, $OA_1 = 1$. 连接 BC , 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D , 则 $BD = y_B - y_C$, $CD = 1$. 过点 A 作 $AF \parallel BC$, 交抛物线于点 $E(x_1, y_E)$, 交 x 轴于点 $F(x_2, 0)$, 证出 $Rt\triangle AFA_1 \sim Rt\triangle BCD$, 得到 $\frac{y_A}{y_B - y_C} = \frac{1 - x_2}{1} = 1 - x_2$, 再根据 $\triangle AEG \sim \triangle BCD$ 得到 $\frac{y_A - y_E}{y_B - y_C} = 1$

$-x_1$, 然后求出 y_A 、 y_B 、 y_C 、 y_E 的表达式, 然后 $y_0 \geq 0$ 恒成立, 得到 $x_2 \leq x_1 < -1$, 从而利用不等式求出 $\frac{y_A}{y_B - y_C}$ 的

最小值.

解答: 解: (I) 若 $a=1$, $b=4$, $c=10$,

此时抛物线的解析式为 $y = x^2 + 4x + 10$.

① $\therefore y = x^2 + 4x + 10 = (x+2)^2 + 6$,

∴ 抛物线的顶点坐标为 P (- 2, 6).

② ∵ 点 A (1, y_A)、B (0, y_B)、C (- 1, y_C) 在抛物线 $y=x^2+4x+10$ 上,

∴ $y_A=15$, $y_B=10$, $y_C=7$.

$$\therefore \frac{y_A}{y_B - y_C} = \frac{15}{10 - 7} = 5.$$

(II) 由 $0 < 2a < b$, 得 $x_0 = -\frac{b}{2a} < -1$.

由题意, 如图过点 A 作 $AA_1 \perp x$ 轴于点 A_1 , 则 $AA_1=y_A$, $OA_1=1$.

连接 BC, 过点 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D, 则 $BD=y_B - y_C$, $CD=1$.

过点 A 作 $AF \parallel BC$, 交抛物线于点 E (x_1 , y_E), 交 x 轴于点 F (x_2 , 0),

则 $\angle FAA_1 = \angle CBD$.

于是 $Rt\triangle AFA_1 \sim Rt\triangle BCD$.

$$\text{有 } \frac{AA_1}{BD} = \frac{FA_1}{CD}, \text{ 即 } \frac{y_A}{y_B - y_C} = \frac{1 - x_2}{1} = 1 - x_2.$$

过点 E 作 $EG \perp AA_1$ 于点 G,

易得 $\triangle AEG \sim \triangle BCD$.

$$\text{有 } \frac{AG}{BD} = \frac{EG}{CD}, \text{ 即 } \frac{y_A - y_E}{y_B - y_C} = 1 - x_1.$$

∵ 点 A (1, y_A)、B (0, y_B)、C (- 1, y_C)、E (x_1 , y_E) 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上,

得 $y_A=a+b+c$, $y_B=c$, $y_C=a-b+c$, $y_E=ax_1^2+bx_1+c$,

$$\therefore \frac{(a+b+c) - (ax_1^2+bx_1+c)}{c - (a-b+c)} = 1 - x_1.$$

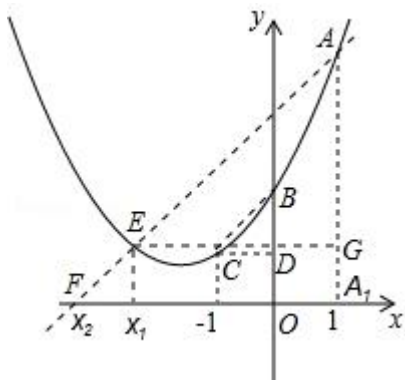
化简, 得 $x_1^2+x_1-2=0$,

解得 $x_1=-2$ ($x_1=1$ 舍去).

∵ $y_0 \geq 0$ 恒成立, 根据题意, 有 $x_2 \leq x_1 < -1$,

则 $1 - x_2 \geq 1 - x_1$, 即 $1 - x_2 \geq 3$.

∴ $\frac{y_A}{y_B - y_C}$ 的最小值为 3.



点评: 本题考查了配方法求二次函数顶点坐标, 函数图象上点的坐标特征, 以及相似三角形的性质, 利用不等式求最值, 综合性很强, 旨在考查同学们的综合逻辑思维能力, 要认真对待.