

# 2011 年天津市中考数学试卷

## 一、选择题 (共 10 小题, 每小题 3 分, 满分 30 分)

1. (2011•天津)  $\sin 45^\circ$  的值等于 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D. 1

2. (2011•天津) 下列汽车标志中, 可以看作是中心对称图形的是 ( )



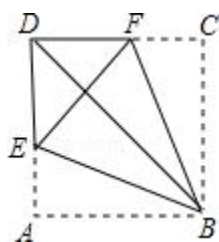
3. (2011•天津) 根据第六次全国人口普查的统计, 截止到 2010 年 11 月 1 日零时, 我国总人口约为 1 370 000 000 人, 将 1 370 000 000 用科学记数法表示应为 ( )

- A.  $0.137 \times 10^{10}$       B.  $1.37 \times 10^9$       C.  $13.7 \times 10^8$       D.  $137 \times 10^7$

4. (2011•天津) 估计  $\sqrt{10}$  的值在 ( )

- A. 1 到 2 之间      B. 2 到 3 之间      C. 3 到 4 之间      D. 4 到 5 之间

5. (2011•天津) 如图, 将正方形纸片 ABCD 折叠, 使边 AB、CB 均落在对角线 BD 上, 得折痕 BE、BF, 则  $\angle EBF$  的大小为 ( )

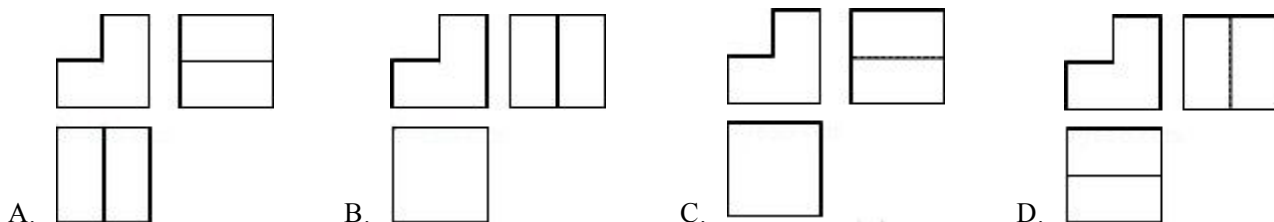
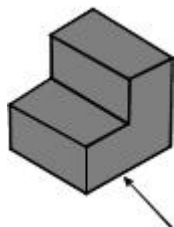


- A.  $15^\circ$       B.  $30^\circ$       C.  $45^\circ$       D.  $60^\circ$

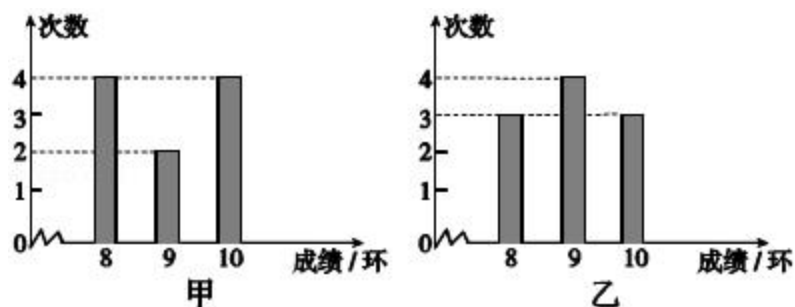
6. (2011•天津) 已知  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  的半径分别为 3cm 和 4cm, 若  $O_1O_2=7$ cm, 则  $\odot O_1$  与  $\odot O_2$  的位置关系是 ( )

- A. 相交      B. 相离      C. 内切      D. 外切

7. (2011•天津) 如图是一支架 (一种小零件), 支架的两个台阶的高度和宽度都是同一长度, 则它的三视图是 ( )



8. (2011•天津) 下面是甲、乙两人 10 次射击成绩 (环数) 的条形统计图, 则下列说法正确的是 ( )

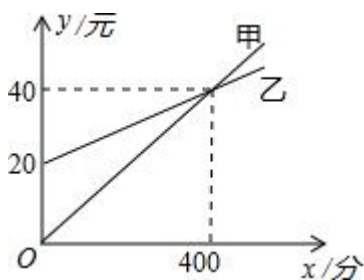


- A. 甲比乙的成绩稳定      B. 乙比甲的成绩稳定      C. 甲、乙两人的成绩一样稳定      D. 无法确定谁的成绩更稳定

9. (2011•天津) 一家电信公司给顾客提供两种上网收费方式: 方式 A 以每分 0.1 元的价格按上网所用时间计费; 方式 B 除收月基费 20 元外, 再以每分 0.05 元的价格按上网所用时间计费. 若上网所用时间为  $x$  分, 计费为  $y$  元, 如图, 是在同一直角坐标系中, 分别描述两种计费方式的函数的图象. 有下列结论:

- ①图象甲描述的是方式 A;  
②图象乙描述的是方式 B;  
③当上网所用时间为 500 分时, 选择方式方法 B 省钱.

其中, 正确结论的个数是 ( )



- A. 3      B. 2      C. 1      D. 0

10. (2011•天津) 若实数  $x$ 、 $y$ 、 $z$  满足  $(x-z)^2 - 4(x-y)(y-z) = 0$ , 则下列式子一定成立的是 ( )

- A.  $x+y+z=0$       B.  $x+y-2z=0$       C.  $y+z-2x=0$       D.  $z+x-2y=0$

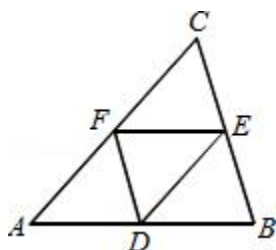
## 二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分)

11. (2011•天津)  $-6$  的相反数是\_\_\_\_\_.

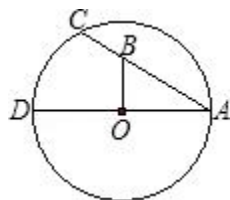
12. (2011•天津) 若分式  $\frac{x^2-1}{x+1}$  的值为 0, 则  $x$  的值等于\_\_\_\_\_.

13. (2011•天津) 已知一次函数的图象经过点  $(0, 1)$ , 且满足  $y$  随  $x$  的增大而增大, 则该一次函数的解析式可以为\_\_\_\_\_.

14. (2011•天津) 如图, 点  $D$ 、 $E$ 、 $F$  分别是  $\triangle ABC$  的边  $AB$ 、 $BC$ 、 $CA$  的中点, 连接  $DE$ 、 $EF$ 、 $FD$ , 则图中平行四边形的个数为\_\_\_\_\_.

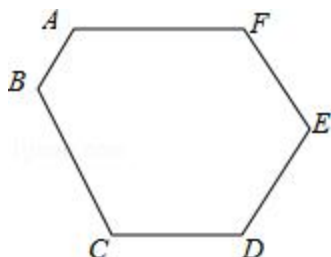


15. 如图，AD 和 AC 分别是 $\odot O$ 的直径和弦，且 $\angle CAD=30^\circ$ ， $OB \perp AD$ 交 AC 于点 B，若  $OB=5$ ，则 BC 等于\_\_\_\_\_.

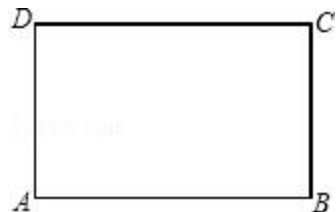


16. (2011•天津) 同时掷两个质地均匀的骰子，观察向上一面的点数，两个骰子的点数相同的概率为\_\_\_\_\_.

17. (2011•天津) 如图，六边形 ABCDEF 的六个内角都相等，若  $AB=1$ ， $BC=CD=3$ ， $DE=2$ ，则这个六边形的周长等于\_\_\_\_\_.



18. (2011•天津) 如图，有一张长为 5 宽为 3 的矩形纸片 ABCD，要通过适当的剪拼，得到一个与之面积相等的正方形.



(I) 该正方形的边长为\_\_\_\_\_ (结果保留根号)

(II) 现要求只能用两条裁剪线，请你设计一种裁剪的方法，在图中画出裁剪线，并简要说明剪拼的过程：\_\_\_\_\_.

### 三、解答题 (共 8 小题，满分 66 分)

19. (2011•天津) 解不等式组 
$$\begin{cases} 2x+1 > x-5 \\ 4x \leq 3x+2 \end{cases}$$
.

20. (2011•天津) 已知一次函数  $y_1=x+b$  ( $b$  为常数) 的图象与反比例函数  $y_2=\frac{k}{x}$  ( $k$  为常数，且  $k \neq 0$ ) 的图象相交于点 P (3, 1).

(I) 求这两个函数的解析式:

(II) 当  $x > 3$  时，试判断  $y_1$  与  $y_2$  的大小，并说明理由.

21. (2011•天津) 在我市开展的“好书伴我成长”读书活动中, 某中学为了解八年级 300 名学生读书情况, 随机调查了八年级 50 名学生读书的册数, 统计数据如下表所示:

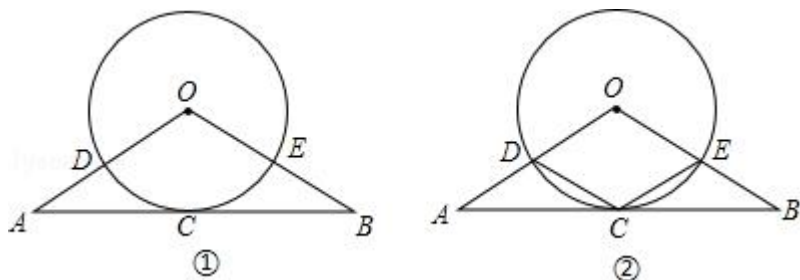
|    |   |    |    |    |   |
|----|---|----|----|----|---|
| 册数 | 0 | 1  | 2  | 3  | 4 |
| 人数 | 3 | 13 | 16 | 17 | 1 |

- (1) 求这 50 个样本数据的平均数、众数和中位数;
- (2) 根据样本数据, 估计该校八年级 300 名学生在本次活动中读书多于 2 册的人数.

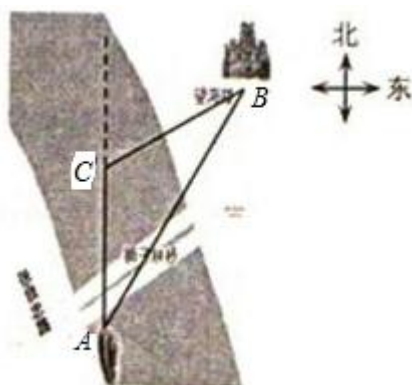
22. (2011•天津) 已知  $AB$  与  $\odot O$  相切于点  $C$ ,  $OA=OB$ ,  $OA$ 、 $OB$  与  $\odot O$  分别交于点  $D$ 、 $E$ .

(I) 如图①, 若  $\odot O$  的直径为 8,  $AB=10$ , 求  $OA$  的长 (结果保留根号);

(II) 如图②, 连接  $CD$ 、 $CE$ , 若四边形  $ODCE$  为菱形, 求  $\frac{OD}{OA}$  的值.



23. (2011•天津) 某校兴趣小组坐游轮拍摄海河两岸美景. 如图, 游轮出发点  $A$  与望海楼  $B$  的距离为 300m, 在  $A$  处测得望海楼  $B$  位于  $A$  的北偏东  $30^\circ$  方向, 游轮沿正北方向行驶一段时间后到达  $C$ , 在  $C$  处测得望海楼  $B$  位于  $C$  的北偏东  $60^\circ$  方向, 求此时游轮与望海楼之间的距离  $BC$  ( $\sqrt{3}$  取 1.73, 结果保留整数).



24. (2011•天津) 注意: 为了使同学们更好地解答本题, 我们提供了一种分析问题的方法, 你可以依照这个方法按要求完成本题的解答, 也可以选用其他方法, 按照解答题的一般要求进行解答即可.

某商品现在的售价为每件 35 元, 每天可卖出 50 件. 市场调查反映: 如果调整价格, 每降价 1 元, 每天可多卖出 2 件. 请你帮助分析, 当每件商品降价多少元时, 可使每天的销售额最大, 最大销售额是多少?

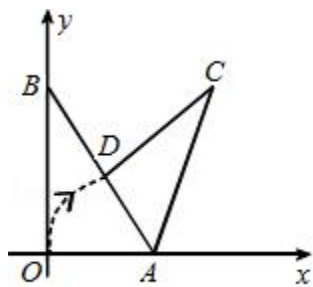
设每件商品降价  $x$  元, 每天的销售额为  $y$  元.

(I) 分析: 根据问题中的数量关系, 用含  $x$  的式子填表:

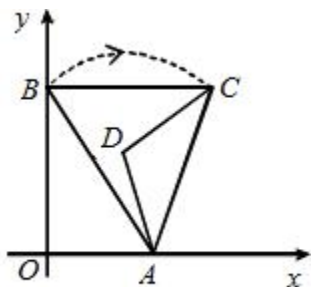
|          | 原价 | 每件降价 1 元 | 每件降价 2 元 | ... | 每件降价 $x$ 元 |
|----------|----|----------|----------|-----|------------|
| 每件售价 (元) | 35 | 34       | 33       | ... |            |
| 每天销量 (件) | 50 | 52       | 54       | ... |            |

(II) 由以上分析, 用含  $x$  的式子表示  $y$ , 并求出问题的解.

25. (2011•天津) 在平面直角坐标系中, 已知  $O$  为坐标原点, 点  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 4)$ , 以点  $A$  为旋转中心, 把  $\triangle ABO$  顺时针旋转, 得  $\triangle ACD$ . 记旋转角为  $\alpha$ .  $\angle ABO$  为  $\beta$ .



①



②

- (I) 如图①, 当旋转后点 D 恰好落在 AB 边上时, 求点 D 的坐标;  
 (II) 如图②, 当旋转后满足  $BC \parallel x$  轴时, 求  $\alpha$  与  $\beta$  之间的数量关系;  
 (III) 当旋转后满足  $\angle AOD = \beta$  时, 求直线 CD 的解析式 (直接写出结果即可).

26. (2011•天津) 已知抛物线  $C_1: y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ , 点 F (1, 1).

(I) 求抛物线  $C_1$  的顶点坐标;

(II) ①若抛物线  $C_1$  与 y 轴的交点为 A, 连接 AF, 并延长交抛物线  $C_1$  于点 B, 求证:  $\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = 2$ .

②取抛物线  $C_1$  上任意一点 P ( $x_P, y_P$ ) ( $0 < x_P < 1$ ), 连接 PF, 并延长交抛物线  $C_1$  于 Q ( $x_Q, y_Q$ ). 试判断  $\frac{1}{PF} + \frac{1}{QF} = 2$  是否成立? 请说明理由;

(III) 将抛物线  $C_1$  作适当的平移, 得抛物线  $C_2: y_2 = \frac{1}{2}(x-h)^2$ , 若  $2 < x \leq m$  时,  $y_2 \leq x$  恒成立, 求 m 的最大值.

# 2011 年天津市中考数学试卷

## 参考答案与试题解析

### 一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，满分 30 分）

1. (2011•天津)  $\sin 45^\circ$  的值等于 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       D. 1

考点：特殊角的三角函数值。

分析：根据特殊角度的三角函数值解答即可。

解答：解： $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

故选 B。

点评：此题比较简单，只要熟记特殊角度的三角函数值即可。

2. (2011•天津) 下列汽车标志中，可以看作是中心对称图形的是 ( )



考点：中心对称图形。

分析：根据中心对称图形的性质得出图形旋转  $180^\circ$ ，与原图形能够完全重合的图形是中心对称图形，分别判断得出即可。

解答：解：A. 旋转  $180^\circ$ ，与原图形能够完全重合是中心对称图形；故此选项正确；

B. 旋转  $180^\circ$ ，不能与原图形能够完全重合不是中心对称图形；故此选项错误；

C. 旋转  $180^\circ$ ，不能与原图形能够完全重合不是中心对称图形；故此选项错误；

D. 旋转  $180^\circ$ ，不能与原图形能够完全重合不是中心对称图形；故此选项错误；

故选：A。

点评：此题主要考查了中心对称图形的性质，根据中心对称图形的定义判断图形是解决问题的关键。

3. (2011•天津) 根据第六次全国人口普查的统计，截止到 2010 年 11 月 1 日零时，我国总人口约为 1 370 000 000 人，将 1 370 000 000 用科学记数法表示应为 ( )

- A.  $0.137 \times 10^{10}$       B.  $1.37 \times 10^9$       C.  $13.7 \times 10^8$       D.  $137 \times 10^7$

考点：科学记数法—表示较大的数。

分析：科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数。确定  $n$  的值时，要看把原数变成  $a$  时，小数点移动了多少位， $n$  的绝对值与小数点移动的位数相同。当原数绝对值  $> 1$  时， $n$  是正数；当原数的绝对值  $< 1$  时， $n$  是负数。

解答：解：1 370 000 000 =  $1.37 \times 10^9$ 。

故选 B。

点评：此题考查科学记数法的表示方法。科学记数法的表示形式为  $a \times 10^n$  的形式，其中  $1 \leq |a| < 10$ ， $n$  为整数，表示时关键要正确确定  $a$  的值以及  $n$  的值。

4. (2011•天津) 估计  $\sqrt{10}$  的值在 ( )

- A. 1 到 2 之间      B. 2 到 3 之间      C. 3 到 4 之间      D. 4 到 5 之间

考点：估算无理数的大小。

专题：计算题。

分析：根据特殊有理数找出  $\sqrt{10}$  最接近的完全平方数，从而求出即可。

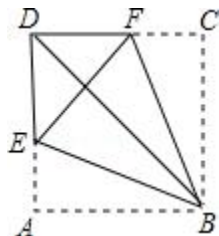
解答：解：∵ $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$ ,

∴ $3 < \sqrt{10} < 4$ ,

故选：C.

点评：此题主要考查了估计无理数的大小，根据已知得出 $\sqrt{10}$ 最接近的完全平方数是解决问题的关键.

5. (2011•天津) 如图，将正方形纸片 ABCD 折叠，使边 AB、CB 均落在对角线 BD 上，得折痕 BE、BF，则 $\angle EBF$  的大小为 ( )



A.  $15^\circ$       B.  $30^\circ$       C.  $45^\circ$       D.  $60^\circ$

考点：翻折变换（折叠问题）；正方形的性质。

专题：计算题。

分析：利用翻折变换的不变量，可以得到 $\angle EBF$  为直角的一半。

解答：解：∵将正方形纸片 ABCD 折叠，使边 AB、CB 均落在对角线 BD 上，得折痕 BE、BF，

∴ $\angle ABE = \angle DBE = \angle DBF = \angle FBC$ ,

∴ $\angle EBF = \frac{1}{2} \angle ABC = 45^\circ$ ,

故选 C.

点评：本题考查的是翻折变换及勾股定理，熟知折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等是解答此题的关键。

6. (2011•天津) 已知 $\odot O_1$  与 $\odot O_2$  的半径分别为 3cm 和 4cm，若 $O_1O_2 = 7\text{cm}$ ，则 $\odot O_1$  与 $\odot O_2$  的位置关系是 ( )

A. 相交      B. 相离      C. 内切      D. 外切

考点：圆与圆的位置关系。

专题：数形结合。

分析：根据 $\odot O_1$  与 $\odot O_2$  的半径分别为 3cm 和 4cm，得出 $R+r=7$ ，再根据 $O_1O_2=7\text{cm}$ ，得出 $\odot O_1$  与 $\odot O_2$  的位置关系。

解答：解：根据 $\odot O_1$  与 $\odot O_2$  的半径分别为 3cm 和 4cm，

得出 $R+r=7$ ，

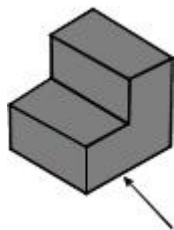
∴ $O_1O_2=7\text{cm}$ ，

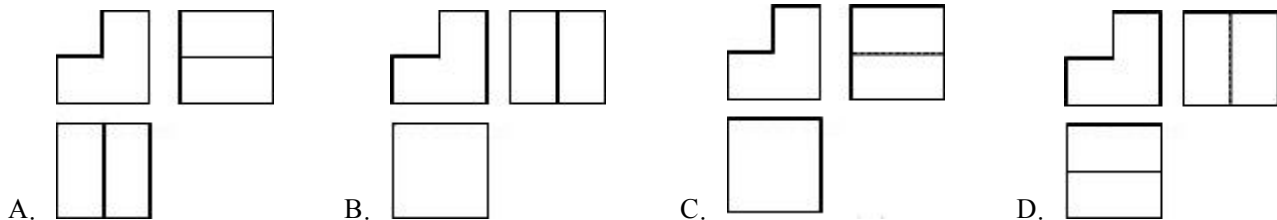
∴得出 $\odot O_1$  与 $\odot O_2$  的位置关系是：外切。

故选：D.

点评：此题主要考查了圆与圆的位置关系，根据 $R+r=O_1O_2=7\text{cm}$ ，得出 $\odot O_1$  与 $\odot O_2$  的位置关系是解决问题的关键。

7. (2011•天津) 如图是一支架（一种小零件），支架的两个台阶的高度和宽度都是同一长度，则它的三视图是 ( )





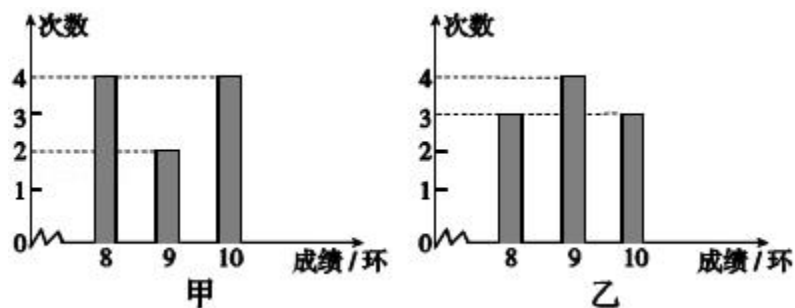
**考点：**简单组合体的三视图。

**分析：**找到从正面看所得到的图形即可，注意所有的看到的棱都应表现在主视图中。

**解答：**解：先细心观察原立体图形的位置，  
从正面看去，是一个矩形，矩形左上角缺一个角，  
从左面看，是一个正方形，  
从上面看，也是一个正方形，  
故选 A.

**点评：**本题考查了三视图的知识，主视图是从物体的正面看得到的视图。

8. (2011•天津) 下面是甲、乙两人 10 次射击成绩 (环数) 的条形统计图，则下列说法正确的是 ( )



A. 甲比乙的成绩稳定      B. 乙比甲的成绩稳定      C. 甲、乙两人的成绩一样稳定      D. 无法确定谁的成绩更稳定

**考点：**方差；条形统计图。

**专题：**计算题；数形结合。

**分析：**根据方差的意义可作出判断。方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定

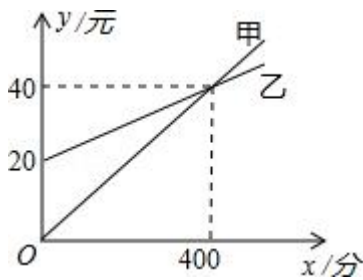
**解答：**解：通过观察条形统计图可知：乙的成绩更整齐，也相对更稳定，  
故选 B.

**点评：**本题考查方差的意义。方差是用来衡量一组数据波动大小的量，方差越大，表明这组数据偏离平均数越大，即波动越大，数据越不稳定；反之，方差越小，表明这组数据分布比较集中，各数据偏离平均数越小，即波动越小，数据越稳定。

9. (2011•天津) 一家电信公司给顾客提供两种上网收费方式：方式 A 以每分 0.1 元的价格按上网所用时间计费；方式 B 除收月基费 20 元外，再以每分 0.05 元的价格按上网所用时间计费。若上网所用时间为  $x$  分，计费为  $y$  元，如图，是在同一直角坐标系中，分别描述两种计费方式的函数的图象。有下列结论：

- ①图象甲描述的是方式 A；
- ②图象乙描述的是方式 B；
- ③当上网所用时间为 500 分时，选择方式方法 B 省钱。

其中，正确结论的个数是 ( )



- A. 3      B. 2      C. 1      D. 0

**考点：**函数的图象。

**专题：**应用题；数形结合。

**分析：**根据函数图象的特点依次进行判断即可得出答案。

**解答：**解：根据一次函数图象特点：

- ①图象甲描述的是方式 A，正确，  
 ②图象乙描述的是方式 B，正确，  
 ③当上网所用时间为 500 分时，选择方式 B 省钱，正确，  
 故选 A.

**点评：**本题主要考查了一次函数图象的特点，需要学生根据实际问题进行分析，难度适中。

10. (2011•天津) 若实数  $x$ 、 $y$ 、 $z$  满足  $(x-z)^2 - 4(x-y)(y-z) = 0$ ，则下列式子一定成立的是 ( )

- A.  $x+y+z=0$       B.  $x+y-2z=0$       C.  $y+z-2x=0$       D.  $z+x-2y=0$

**考点：**完全平方公式。

**专题：**计算题。

**分析：**首先将原式变形，可得  $x^2+z^2+2xz-4xy+4xz+4y^2-4yz=0$ ，则可得  $(x+z-2y)^2=0$ ，则问题得解。

**解答：**解：∵  $(x-z)^2 - 4(x-y)(y-z) = 0$ ，

$$\therefore x^2+z^2-2xz-4xy+4xz+4y^2-4yz=0,$$

$$\therefore x^2+z^2+2xz-4xy+4y^2-4yz=0,$$

$$\therefore (x+z-2y)^2=0,$$

$$\therefore z+x-2y=0.$$

故选 D.

**点评：**此题考查了完全平方公式的应用．解题的关键是掌握： $x^2+z^2+2xz-4xy+4y^2-4yz=(x+z-2y)^2$ 。

## 二、填空题 (共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分)

11. (2011•天津)  $-6$  的相反数是 6。

**考点：**相反数。

**分析：**求一个数的相反数，即在这个数的前面加负号。

**解答：**解：根据相反数的概念，得

$$-6 \text{ 的相反数是 } -(-6)=6.$$

**点评：**此题考查了相反数的定义，互为相反数的两个数分别在原点两旁且到原点的距离相等。

12. (2011•天津) 若分式  $\frac{x^2-1}{x+1}$  的值为 0，则  $x$  的值等于 1。

**考点：**分式的值为零的条件。

**专题：**计算题。

**分析：**根据分式的值为零的条件可以求出  $x$  的值。

**解答：**解：由分式的值为零的条件得  $x^2-1=0$ ， $x+1 \neq 0$ ，

$$\text{由 } x^2-1=0, \text{ 得 } x=-1 \text{ 或 } x=1,$$

$$\text{由 } x+1 \neq 0, \text{ 得 } x \neq -1,$$

$$\therefore x=1,$$

故答案为 1.

**点评:** 若分式的值为零, 需同时具备两个条件: (1) 分子为 0; (2) 分母不为 0. 这两个条件缺一不可.

13. (2011•天津) 已知一次函数的图象经过点 (0, 1), 且满足  $y$  随  $x$  的增大而增大, 则该一次函数的解析式可以为

$y=x+1$  (答案不唯一, 可以是形如  $y=kx+1$ ,  $k>0$  的一次函数).

**考点:** 一次函数的性质.

**专题:** 开放型.

**分析:** 先设出一次函数的解析式, 再根据一次函数的图象经过点 (0, 1) 可确定出  $b$  的值, 再根据  $y$  随  $x$  的增大而增大确定出  $k$  的符号即可.

**解答:** 解: 设一次函数的解析式为:  $y=kx+b$  ( $k \neq 0$ ),

$\because$  一次函数的图象经过点 (0, 1),

$\therefore b=1$ ,

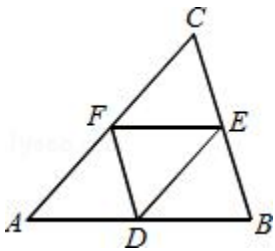
$\because y$  随  $x$  的增大而增大,

$\therefore k>0$ ,

故答案为  $y=x+1$  (答案不唯一, 可以是形如  $y=kx+1$ ,  $k>0$  的一次函数).

**点评:** 本题考查的是一次函数的性质, 即一次函数  $y=kx+b$  ( $k \neq 0$ ) 中,  $k>0$ ,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 与  $y$  轴交于 (0,  $b$ ), 当  $b>0$  时, (0,  $b$ ) 在  $y$  轴的正半轴上.

14. (2011•天津) 如图, 点 D、E、F 分别是  $\triangle ABC$  的边 AB、BC、CA 的中点, 连接 DE、EF、FD, 则图中平行四边形的个数为 3.



**考点:** 平行四边形的判定; 三角形中位线定理.

**分析:** 由已知点 D、E、F 分别是  $\triangle ABC$  的边 AB、BC、CA 的中点, 根据三角形中位线定理, 可以推出  $EF \parallel AB$  且  $EF=AD$ ,  $EF=DB$ ,  $DF \parallel BC$  且  $DF=CE$ , 所以得到 3 个平行四边形.

**解答:** 解: 已知点 D、E、F 分别是  $\triangle ABC$  的边 AB、BC、CA 的中点,

$\therefore EF \parallel AB$  且  $EF=AD$ ,  $EF=DB$ ,

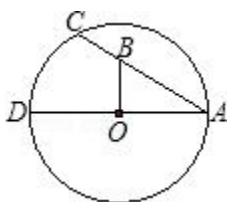
$DF \parallel BC$  且  $DF=CE$ ,

$\therefore$  四边形 ADEF、四边形 BDFE 和四边形 CEDF 为平行四边形,

故答案为: 3.

**点评:** 此题考查的是平行四边形的判定及三角形中位线定理, 关键是有三角形中位线定理得出四边形的对边平行且相等而判定为平行四边形.

15. 如图, AD 和 AC 分别是  $\odot O$  的直径和弦, 且  $\angle CAD=30^\circ$ ,  $OB \perp AD$  交 AC 于点 B, 若  $OB=5$ , 则 BC 等于 5.



**考点:** 圆周角定理; 含  $30^\circ$  度角的直角三角形.

**分析:** 在  $\text{Rt}\triangle AOB$  中, 已知了  $OB$  的长和  $\angle A$  的度数, 根据直角三角形的性质可求得  $OA$  的长, 也就得到了直径  $AD$  的值, 连接  $CD$ , 同理可在  $\text{Rt}\triangle ACD$  中求出  $AC$  的长, 由  $BC=AC-AB$  即可得解.

**解答:** 解: 连接  $CD$ ;

Rt△AOB 中， $\angle A=30^\circ$ ， $OB=5$ ，则  $AB=10$ ， $OA=5\sqrt{3}$ ；

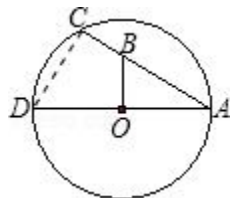
在 Rt△ACD 中， $\angle A=30^\circ$ ， $AD=2OA=10\sqrt{3}$ ，

$$\therefore AC=\cos 30^\circ \times 10\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2} \times 10\sqrt{3}$$

$$=15,$$

$$\therefore BC=AC-AB=15-10=5.$$



**点评：**此题主要考查了直角三角形的性质和圆周角定理的应用，难度不大。

16. (2011•天津) 同时掷两个质地均匀的骰子，观察向上一面的点数，两个骰子的点数相同的概率为  $\frac{1}{6}$ 。

**考点：**列表法与树状图法。

**专题：**计算题。

**分析：**首先列表，然后根据表格求得所有等可能的结果与两个骰子的点数相同的情况，再根据概率公式求解即可。

**解答：**解：列表得：

|        |        |        |        |        |        |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| (1, 6) | (2, 6) | (3, 6) | (4, 6) | (5, 6) | (6, 6) |
| (1, 5) | (2, 5) | (3, 5) | (4, 5) | (5, 5) | (6, 5) |
| (1, 4) | (2, 4) | (3, 4) | (4, 4) | (5, 4) | (6, 4) |
| (1, 3) | (2, 3) | (3, 3) | (4, 3) | (5, 3) | (6, 3) |
| (1, 2) | (2, 2) | (3, 2) | (4, 2) | (5, 2) | (6, 2) |
| (1, 1) | (2, 1) | (3, 1) | (4, 1) | (5, 1) | (6, 1) |

$\therefore$ 一共有 6 种等可能的结果，

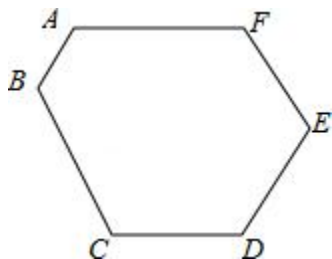
两个骰子的点数相同的有 6 种情况，

$$\therefore \text{两个骰子的点数相同的概率为: } \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

故答案为：  $\frac{1}{6}$ 。

**点评：**此题考查了树状图法与列表法求概率。注意树状图法与列表法可以不重不漏的表示出所有等可能的结果。用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比。

17. (2011•天津) 如图，六边形 ABCDEF 的六个内角都相等，若  $AB=1$ ， $BC=CD=3$ ， $DE=2$ ，则这个六边形的周长等于 15。



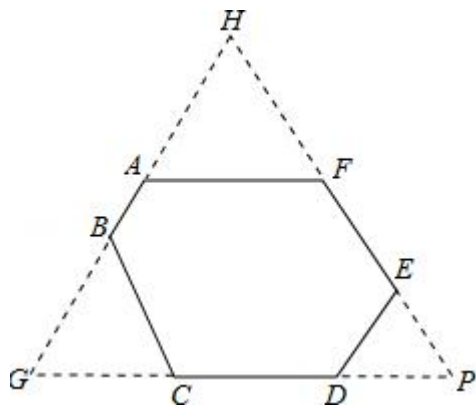
**考点：**等腰梯形的性质；多边形内角与外角；平行四边形的性质。

**专题：**计算题。

**分析：**凸六边形 ABCDEF，并不是一规则的六边形，但六个角都是  $120^\circ$ ，所以通过适当的向外作延长线，可得到等边三角形，进而求解。

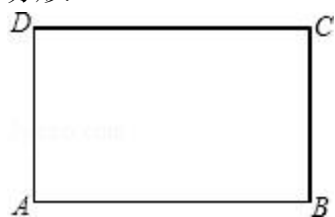
**解答：**解：如图，分别作直线 AB、CD、EF 的延长线和反向延长线使它们交于点 G、H、P。

$\therefore$  六边形 ABCDEF 的六个角都是  $120^\circ$ ,  
 $\therefore$  六边形 ABCDEF 的每一个外角的度数都是  $60^\circ$ .  
 $\therefore \triangle APF$ 、 $\triangle BGC$ 、 $\triangle DHE$ 、 $\triangle GHP$  都是等边三角形.  
 $\therefore GC=BC=3$ ,  $DP=DE=2$ .  
 $\therefore GH=3+3+2=8$ ,  $FA=HA=GH-AB-BG=8-1-3=4$ ,  $EF=PH-HF-EP=8-4-2=2$ .  
 $\therefore$  六边形的周长为  $1+3+3+2+4+2=15$ .  
 故答案为 15.



**点评:** 本题考查了等边三角形的性质及判定定理; 解题中巧妙地构造了等边三角形, 从而求得周长. 是非常完美的解题方法, 注意学习并掌握.

18. (2011•天津) 如图, 有一张长为 5 宽为 3 的矩形纸片 ABCD, 要通过适当的剪拼, 得到一个与之面积相等的正方形.



- (I) 该正方形的边长为  $\sqrt{15}$  (结果保留根号)
- (II) 现要求只能用两条裁剪线, 请你设计一种裁剪的方法, 在图中画出裁剪线, 并简要说明剪拼的过程: 如图.
- (1) 以 BM=4 为直径作半圆, 在半圆上取一点 N, 使 MN=1, 连接 BN, 由勾股定理, 得  $BN=\sqrt{15}$ ;
- (2) 以 A 为圆心, BN 长为半径画弧, 交 CD 于 K 点, 连接 AK,
- (3) 过 B 点作  $BE \perp AK$ , 垂足为 E,
- (4) 平移  $\triangle ABE$ ,  $\triangle ADK$ , 得到四边形 BEFG 即为所求.

**考点:** 作图—应用与设计作图.

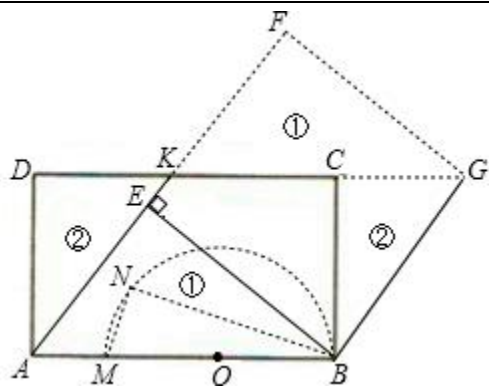
**专题:** 作图题.

**分析:** (I) 设正方形的边长为 a, 则  $a^2=3 \times 5$ , 可解得正方形的边长;

(II) 以 BM=4 为直径作半圆, 在半圆上取一点 N, 使 MN=1, 连接 BN, 则  $\angle MNB=90^\circ$ , 由勾股定理, 得  $BN=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$ , 由此构造正方形的边长, 利用平移法画正方形.

**解答:** 解: (I) 设正方形的边长为 a, 则  $a^2=3 \times 5$ , 解得  $a=\sqrt{15}$ ;

(II) 如图,



- (1) 以  $BM=4$  为直径作半圆，在半圆上取一点  $N$ ，使  $MN=1$ ，连接  $BN$ ，由勾股定理，得  $BN=\sqrt{15}$ ；
- (2) 以  $A$  为圆心， $BN$  长为半径画弧，交  $CD$  于  $K$  点，连接  $AK$ ，
- (3) 过  $B$  点作  $BE \perp AK$ ，垂足为  $E$ ，
- (4) 平移  $\triangle ABE$ ， $\triangle ADK$ ，得到四边形  $BEFG$  即为所求。

**点评：** 本题考查了应用与设计作图。关键是理解题意，根据已知图形设计分割方案。

### 三、解答题（共 8 小题，满分 66 分）

19. (2011•天津) 解不等式组 
$$\begin{cases} 2x+1 > x-5 \\ 4x \leq 3x+2 \end{cases}$$

**考点：** 解一元一次不等式组。

**专题：** 计算题。

**分析：** 先解每一个不等式，再求两个解集的公共部分即可。

**解答：** 解：  $\because \begin{cases} 2x+1 > x-5 & \text{①} \\ 4x \leq 3x+2 & \text{②} \end{cases}$

不等式①移项，合并得  $x > -6$ ，

不等式②移项，合并得  $x \leq 2$ ，

$\therefore$  不等式组的解集为：  $-6 < x \leq 2$ 。

**点评：** 本题考查了解一元一次不等式组，解集的数轴表示法。关键是先解每一个不等式，再求解集的公共部分。

20. (2011•天津) 已知一次函数  $y_1=x+b$  ( $b$  为常数) 的图象与反比例函数  $y_2=\frac{k}{x}$  ( $k$  为常数，且  $k \neq 0$ ) 的图象相交于点  $P(3, 1)$ 。

(I) 求这两个函数的解析式：

(II) 当  $x > 3$  时，试判断  $y_1$  与  $y_2$  的大小，并说明理由。

**考点：** 反比例函数与一次函数的交点问题。

**专题：** 代数综合题；待定系数法。

**分析：** (I) 利用待定系数法，将  $P(3, 1)$  代入一次函数解析式与反比例函数解析式，即可得到答案；

(II) 当  $x=3$  时， $y_1=y_2=1$ ，再利用函数的性质一次函数  $y_1$  随  $x$  的增大而增大，反比例函数  $y_2$  随  $x$  的增大而减小，可以判断出大小关系。

**解答：** 解：(1)  $\because$  点  $P(3, 1)$  在一次函数  $y_1=x+b$  ( $b$  为常数) 的图象上，

$\therefore 1=3+b$ ，

解得：  $b=-2$ ，

$\therefore$  一次函数解析式为：  $y_1=x-2$ 。

$\because$  点  $P(3, 1)$  在反比例函数  $y_2=\frac{k}{x}$  ( $k$  为常数，且  $k \neq 0$ ) 的图象上，

$\therefore k=3 \times 1=3$ ，

$\therefore$  反比例函数解析式为：  $y_2=\frac{3}{x}$ ，

(II)  $y_1 > y_2$ 。理由如下：

当  $x=3$  时,  $y_1=y_2=1$ ,

又当  $x>3$  时,  $y_1$  随  $x$  的增大而增大, 反比例函数  $y_2$  随  $x$  的增大而减小,

$\therefore$  当  $x>3$  时,  $y_1>y_2$ .

**点评:** 此题主要考查了待定系数法求函数解析式和函数的性质, 凡是图象上的点, 都能使函数解析式左右相等.

21. (2011•天津) 在我市开展的“好书伴我成长”读书活动中, 某中学为了解八年级 300 名学生读书情况, 随机调查了八年级 50 名学生读书的册数, 统计数据如下表所示:

| 册数 | 0 | 1  | 2  | 3  | 4 |
|----|---|----|----|----|---|
| 人数 | 3 | 13 | 16 | 17 | 1 |

(1) 求这 50 个样本数据的平均数、众数和中位数:

(2) 根据样本数据, 估计该校八年级 300 名学生在本次活动中读书多于 2 册的人数.

**考点:** 用样本估计总体; 加权平均数; 中位数; 众数.

**分析:** (1) 先根据表格提示的数据 50 名学生读书的册数, 然后除以 50 即可求出平均数, 在这组样本数据中, 3 出现的次数最多, 所以求出了众数, 将这组样本数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个数都是 2, 从而求出中位数是 2;

(2) 从表格中得知在 50 名学生中, 读书多于 2 册的学生有 18 名, 所以可以估计该校八年级 300 名学生在本次活动中读书多于 2 册的约有  $300 \times \frac{18}{50} = 108$ .

**解答:** 解: (1) 观察表格, 可知这组样本数据的平均数是  $\bar{x} = \frac{0 \times 3 + 1 \times 13 + 2 \times 16 + 3 \times 17 + 4 \times 1}{50} = 2$ ,

$\therefore$  这组样本数据的平均数为 2,

$\therefore$  这组样本数据中, 3 出现了 17 次, 出现的次数最多,

$\therefore$  这组数据的众数是 3.

$\therefore$  将这组样本数据按从小到大的顺序排列, 其中处于中间的两个数都是 2, 有  $\frac{2+2}{2} = 2$ ,

$\therefore$  这组数据的中位数为 2;

(2)  $\therefore$  在 50 名学生中, 读书多于 2 册的学生有 18 名, 有  $300 \times \frac{18}{50} = 108$ .

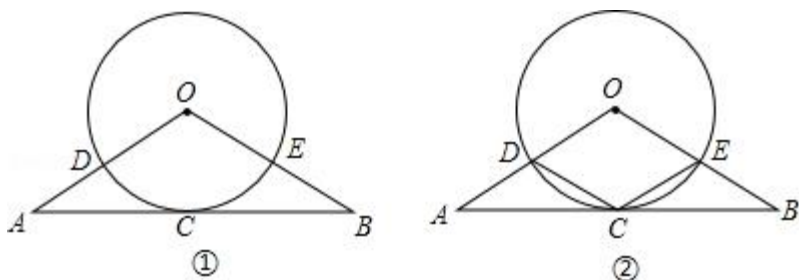
$\therefore$  根据样本数据, 可以估计该校八年级 300 名学生在本次活动中读书多于 2 册的约有 108 名.

**点评:** 本题考查的知识点有: 用样本估计总体、众数以及中位数的知识, 解题的关键是牢记概念及公式.

22. (2011•天津) 已知 AB 与  $\odot O$  相切于点 C,  $OA=OB$ ,  $OA$ 、 $OB$  与  $\odot O$  分别交于点 D、E.

(I) 如图①, 若  $\odot O$  的直径为 8,  $AB=10$ , 求 OA 的长 (结果保留根号);

(II) 如图②, 连接 CD、CE, 若四边形 ODCE 为菱形, 求  $\frac{OD}{OA}$  的值.



**考点:** 切线的性质; 含 30 度角的直角三角形; 勾股定理; 菱形的性质.

**专题:** 几何综合题.

**分析:** (1) 连接 OC, 根据切线的性质得出  $OC \perp AB$ , 再由勾股定理求得 OA 即可;

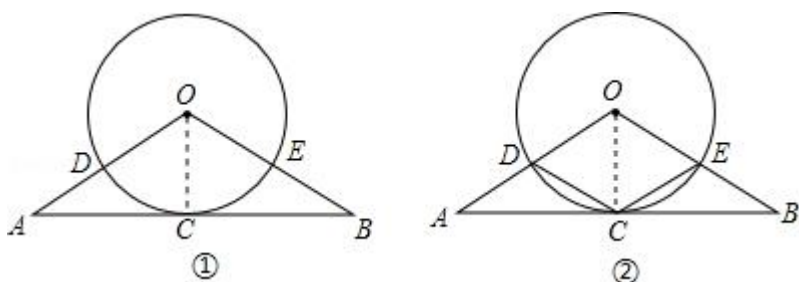
(2) 根据菱形的性质, 求得  $OD=CD$ , 则  $\triangle ODC$  为等边三角形, 可得出  $\angle A=30^\circ$ , 即可求得  $\frac{OD}{OA}$  的值.

**解答:** 解: (1) 如图①, 连接 OC, 则  $OC=4$ ,

$\because AB$  与  $\odot O$  相切于点  $C$ ,  $\therefore OC \perp AB$ ,  
 $\therefore$  在  $\triangle OAB$  中, 由  $AO=OB$ ,  $AB=10m$ ,  
 得  $AC=\frac{1}{2}AB=5$ .

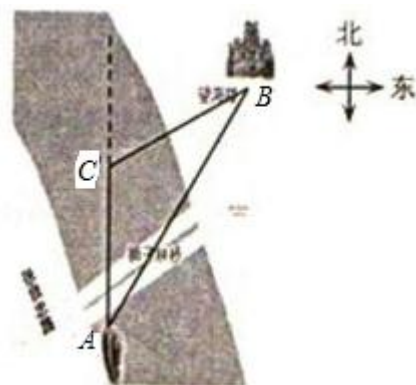
在  $Rt\triangle AOC$  中, 由勾股定理得  $OA=\sqrt{OC^2+AC^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$ ;

(2) 如图②, 连接  $OC$ , 则  $OC=OD$ ,  
 $\because$  四边形  $ODCE$  为菱形,  $\therefore OD=CD$ ,  
 $\therefore \triangle ODC$  为等边三角形, 有  $\angle AOC=60^\circ$ .  
 由 (1) 知,  $\angle OCA=90^\circ$ ,  $\therefore \angle A=30^\circ$ ,  
 $\therefore OC=\frac{1}{2}OA$ ,  $\therefore \frac{OD}{OA}=\frac{1}{2}$ .



**点评:** 本题考查了切线的性质和勾股定理以及直角三角形、菱形的性质, 是一道综合题, 要熟练掌握.

23. (2011•天津) 某校兴趣小组坐游轮拍摄海河两岸美景. 如图, 游轮出发点  $A$  与望海楼  $B$  的距离为  $300m$ , 在  $A$  处测得望海楼  $B$  位于  $A$  的北偏东  $30^\circ$  方向, 游轮沿正北方向行驶一段时间后到达  $C$ , 在  $C$  处测得望海楼  $B$  位于  $C$  的北偏东  $60^\circ$  方向, 求此时游轮与望海楼之间的距离  $BC$  ( $\sqrt{3}$  取  $1.73$ , 结果保留整数).



**考点:** 解直角三角形的应用-方向角问题.

**专题:** 几何图形问题.

**分析:** 首先根据  $\angle BAD=30^\circ$ , 得出  $BD=\frac{1}{2}AD=150$ , 进而利用解直角三角形求出  $BC$  的值即可.

**解答:** 解: 根据题意得:  $AB=300$ ,

如图, 过点  $B$  作  $BD \perp AC$ , 交  $AC$  的延长线于点  $D$ ,

在  $Rt\triangle ADB$  中,

$\because \angle BAD=30^\circ$ ,

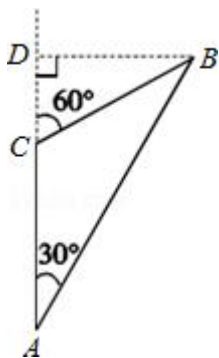
$\therefore BD=\frac{1}{2}AB=150$ ,

$Rt\triangle CDB$  中,

$\therefore \sin \angle DCB=\frac{DB}{BC}$

$$\therefore BC = \frac{BD}{\sin \angle DCB} = \frac{150}{\sin 60^\circ} = \frac{300}{\sqrt{3}} \approx 173,$$

答：此时游轮与望海楼之间的距离 BC 约为 173m.



**点评：**此题主要考查了解直角三角形的应用，根据  $\sin \angle DCB = \frac{DB}{BC}$ ，得出 BC 的长是解决问题的关键.

24. (2011•天津) 注意：为了使同学们更好地解答本题，我们提供了一种分析问题的方法，你可以依照这个方法按要求完成本题的解答，也可以选用其他方法，按照解答题的一般要求进行解答即可.

某商品现在的售价为每件 35 元，每天可卖出 50 件. 市场调查反映：如果调整价格，每降价 1 元，每天可多卖出 2 件. 请你帮助分析，当每件商品降价多少元时，可使每天的销售额最大，最大销售额是多少？

设每件商品降价  $x$  元，每天的销售额为  $y$  元.

(I) 分析：根据问题中的数量关系，用含  $x$  的式子填表：

|          | 原价 | 每件降价 1 元 | 每件降价 2 元 | ... | 每件降价 $x$ 元 |
|----------|----|----------|----------|-----|------------|
| 每件售价 (元) | 35 | 34       | 33       | ... |            |
| 每天销量 (件) | 50 | 52       | 54       | ... |            |

(II) 由以上分析，用含  $x$  的式子表示  $y$ ，并求出问题的解.

**考点：**二次函数的应用.

**分析：**(I) 根据问题中的数量关系，用含  $x$  的式子填表即可；

(II) 根据每天的销售额  $y = (35 - x)(50 + 2x)$ ，再求出二次函数最值即可.

**解答：**解：(I) 根据题意得：35 -  $x$ ，50 + 2 $x$ ；

(II) 根据题意得：每天的销售额  $y = (35 - x)(50 + 2x)$ ，( $0 < x < 35$ )，

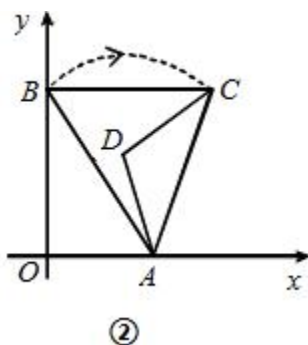
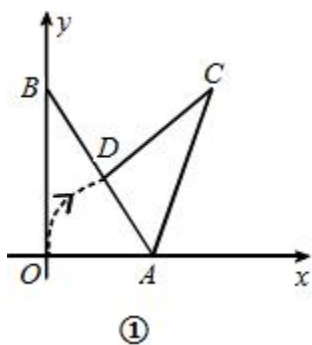
配方得： $y = -2(x - 5)^2 + 1800$ ，

$\therefore$  当  $x = 5$  时， $y$  取得最大值 1800.

答：当每件商品降价 5 元时，可使每天的销售额最大，最大销售额为 1800 元.

**点评：**此题主要考查了二次函数的最值求法以及列代数式等知识，根据题意得出每天的销售额与降价关系是解决问题的关键.

25. (2011•天津) 在平面直角坐标系中，已知 O 为坐标原点，点 A (3, 0)，B (0, 4)，以点 A 为旋转中心，把  $\triangle ABO$  顺时针旋转，得  $\triangle ACD$ . 记旋转角为  $\alpha$ .  $\angle ABO$  为  $\beta$ .



(I) 如图①，当旋转后点 D 恰好落在 AB 边上时，求点 D 的坐标；

(II) 如图②, 当旋转后满足  $BC \parallel x$  轴时, 求  $\alpha$  与  $\beta$  之间的数量关系:

(III) 当旋转后满足  $\angle AOD = \beta$  时, 求直线  $CD$  的解析式 (直接写出结果即可).

**考点:** 相似三角形的判定与性质; 待定系数法求一次函数解析式; 勾股定理; 旋转的性质.

**分析:** (1) 过点  $D$  作  $DM \perp x$  轴于点  $M$ , 求证  $\triangle ADM \sim \triangle ABO$ , 根据相似比求  $AM$  的长度, 推出  $OM$  和  $MD$  的长度即可;

(2) 根据等腰三角形的性质, 推出  $\alpha = 180^\circ - 2\angle ABC$ , 结合已知条件推出  $\angle ABC = 90^\circ - \angle ABO = 90^\circ - \beta$ , 即  $\alpha = 2\beta$ ;

(3) 做过点  $D$  作  $DM \perp x$  轴于点  $M$ , 根据勾股定理和  $\triangle OAB \sim \triangle OMD$ , 推出  $D$  点的横坐标和纵坐标, 然后求出  $C$  点坐标, 就很容易得到  $CD$  的解析式了.

**解答:** 解: (1)  $\because$  点  $A(3, 0)$ ,  $B(0, 4)$ , 得  $OA=3$ ,  $OB=4$ ,

$\therefore$  在  $Rt\triangle AOB$  中, 由勾股定理, 得  $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = 5$ ,

根据题意, 有  $DA = OA = 3$ .

如图①, 过点  $D$  作  $DM \perp x$  轴于点  $M$ ,

则  $MD \parallel OB$ ,

$\therefore \triangle ADM \sim \triangle ABO$ . 有  $\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{AO} = \frac{DM}{BO}$ ,

得  $AM = \frac{AD}{AB} \cdot AO = \frac{3}{5} \times 3 = \frac{9}{5}$ ,

$\therefore OM = \frac{6}{5}$ ,

$\therefore MD = \frac{12}{5}$ ,

$\therefore$  点  $D$  的坐标为  $(\frac{6}{5}, \frac{12}{5})$ .

(2) 如图②, 由已知, 得  $\angle CAB = \alpha$ ,  $AC = AB$ ,

$\therefore \angle ABC = \angle ACB$ ,

$\therefore$  在  $\triangle ABC$  中,

$\therefore \alpha = 180^\circ - 2\angle ABC$ ,

$\because BC \parallel x$  轴, 得  $\angle OBC = 90^\circ$ ,

$\therefore \angle ABC = 90^\circ - \angle ABO = 90^\circ - \beta$ ,

$\therefore \alpha = 2\beta$ ;

(3) 若顺时针旋转, 如图, 过点  $D$  作  $DE \perp OA$  于  $E$ , 过点  $C$  作  $CF \perp OA$  于  $F$ ,

$\therefore \angle AOD = \angle ABO = \beta$ ,

$\therefore \tan \angle AOD = \frac{DE}{OE} = \frac{3}{4}$ ,

设  $DE = 3x$ ,  $OE = 4x$ ,

则  $AE = 4x - 3$ ,

在  $Rt\triangle ADE$  中,  $AD^2 = AE^2 + DE^2$ ,

$\therefore 9 = 9x^2 + (4x - 3)^2$ ,

$\therefore x = \frac{24}{25}$ ,

$\therefore D(\frac{96}{25}, \frac{72}{25})$ ,

$\therefore$  直线  $AD$  的解析式为:  $y = \frac{24}{7}x - \frac{72}{7}$ ,

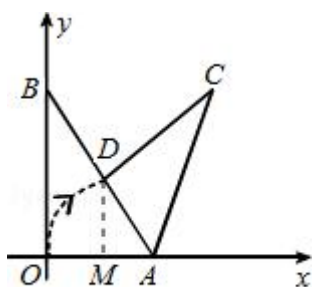
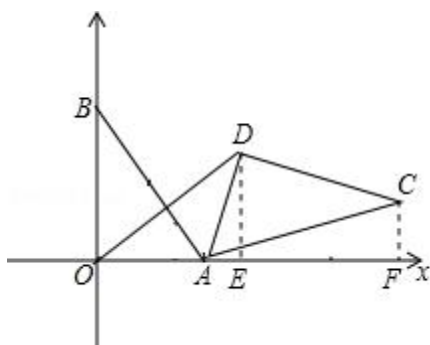
$\therefore$  直线  $CD$  与直线  $AD$  垂直, 且过点  $D$ ,

$$\therefore \text{设 } y = -\frac{7}{24}x + b,$$

则  $b=4$ ,

$\therefore$  互相垂直的两条直线的斜率的积等于  $-1$ ,

$$\therefore \text{直线 } CD \text{ 的解析式为 } y = -\frac{7}{24}x + 4.$$



①

**点评:** 本题主要考查了相似三角形的判定和性质、勾股定理、待定系数法求一次函数解析式等知识点, 本题关键在于结合图形找到相似三角形, 求相关线段的长度和有关点的坐标.

26. (2011·天津) 已知抛物线  $C_1: y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ , 点  $F(1, 1)$ .

(I) 求抛物线  $C_1$  的顶点坐标;

(II) ①若抛物线  $C_1$  与  $y$  轴的交点为  $A$ , 连接  $AF$ , 并延长交抛物线  $C_1$  于点  $B$ , 求证:  $\frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = 2$ .

②取抛物线  $C_1$  上任意一点  $P(x_P, y_P)$  ( $0 < x_P < 1$ ), 连接  $PF$ , 并延长交抛物线  $C_1$  于  $Q(x_Q, y_Q)$ . 试判断  $\frac{1}{PF} + \frac{1}{QF} = 2$  是否成立? 请说明理由;

(III) 将抛物线  $C_1$  作适当的平移, 得抛物线  $C_2: y_2 = \frac{1}{2}(x-h)^2$ , 若  $2 < x \leq m$  时,  $y_2 \leq x$  恒成立, 求  $m$  的最大值.

**考点:** 二次函数综合题.

**分析:** (I) 将抛物线  $C_1: y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$  的一般式转化为顶点式, 即可求得抛物线  $C_1$  的顶点坐标;

(II) ①由  $A(0, 1)$ ,  $F(1, 1)$ , 可得  $AB \parallel x$  轴, 即可求得  $AF$  与  $BF$  的长, 则问题得解;

②过点  $P(x_P, y_P)$  作  $PM \perp AB$  于点  $M$ , 即可求得  $PF = y_P$ , 同理  $QF = y_Q$ , 然后由  $\triangle PMF \sim \triangle QNF$ , 根据相似三角形的对应边成比例, 即可求得答案;

(III) 令  $y_3 = x$ , 设其图象与抛物线  $C_2$  交点的横坐标为  $x_0, x_0'$ , 且  $x_0 < x_0'$ , 观察图象, 随着抛物线  $C_2$  向右下不断平移,  $x_0, x_0'$  的值不断增大, 当满足  $2 < x \leq m$ ,  $y_2 \leq x$  恒成立时,  $m$  的最大值在  $x_0'$  处取得. 可得: 当  $x_0 = 2$  时, 所对应的  $x_0'$  即为  $m$  的最大值.

**解答:** 解: (I)  $\because y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}$ ,

∴ 抛物线  $C_1$  的顶点坐标为  $(1, \frac{1}{2})$ ;

(II) ①证明: 根据题意得: 点 A  $(0, 1)$ ,

∴ F  $(1, 1)$ ,

∴ AB // x 轴, 得 AF=BF=1,

$$\therefore \frac{1}{AF} + \frac{1}{BF} = 2;$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{PF} + \frac{1}{QF} = 2 \text{ 成立.}$$

理由:

如图, 过点 P  $(x_p, y_p)$  作  $PM \perp AB$  于点 M,

则  $FM = 1 - x_p$ ,  $PM = 1 - y_p$ ,  $(0 < x_p < 1)$ ,

∴ Rt△PMF 中, 由勾股定理,

$$\text{得 } PF^2 = FM^2 + PM^2 = (1 - x_p)^2 + (1 - y_p)^2,$$

又点 P  $(x_p, y_p)$  在抛物线  $C_1$  上,

$$\text{得 } y_p = \frac{1}{2}(x_p - 1)^2 + \frac{1}{2}, \text{ 即 } (x_p - 1)^2 = 2y_p - 1,$$

$$\therefore PF^2 = 2y_p - 1 + (1 - y_p)^2 = y_p^2,$$

即  $PF = y_p$ ,

过点 Q  $(x_Q, y_Q)$  作  $QN \perp AB$ , 与 AB 的延长线交于点 N,

同理可得:  $QF = y_Q$ ,

$$\therefore \angle PMF = \angle QNF = 90^\circ, \angle MFP = \angle NFQ,$$

$$\therefore \triangle PMF \sim \triangle QNF,$$

$$\therefore \frac{PF}{QF} = \frac{PM}{QN},$$

这里  $PM = 1 - y_p = 1 - PF$ ,  $QN = y_Q - 1 = QF - 1$ ,

$$\therefore \frac{PF}{QF} = \frac{1 - PF}{QF - 1},$$

$$\text{即 } \frac{1}{PF} + \frac{1}{QF} = 2;$$

(III) 令  $y_3 = x$ ,

设其图象与抛物线  $C_2$  交点的横坐标为  $x_0, x_0'$ , 且  $x_0 < x_0'$ ,

∴ 抛物线  $C_2$  可以看作是抛物线  $y = \frac{1}{2}x^2$  左右平移得到的,

观察图象, 随着抛物线  $C_2$  向右下不断平移,  $x_0, x_0'$  的值不断增大,

∴ 当满足  $2 < x \leq m$ ,  $y_2 \leq x$  恒成立时,  $m$  的最大值在  $x_0'$  处取得.

可得: 当  $x_0 = 2$  时, 所对应的  $x_0'$  即为  $m$  的最大值.

$$\text{于是, 将 } x_0 = 2 \text{ 代入 } \frac{1}{2}(x - h)^2 = x,$$

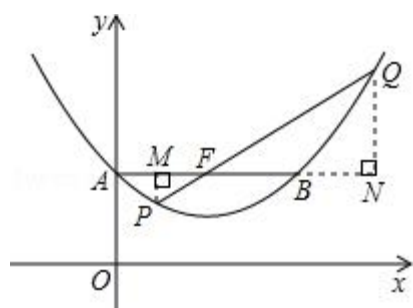
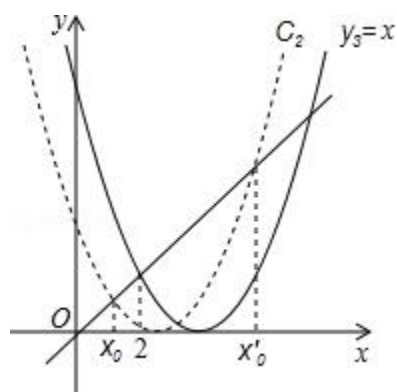
$$\text{有 } \frac{1}{2}(2 - h)^2 = 2,$$

解得:  $h = 4$  或  $h = 0$  (舍去),

$$\therefore y_2 = \frac{1}{2}(x - 4)^2.$$

$$\text{此时, 由 } y_2 = y_3, \text{ 得 } \frac{1}{2}(x - 4)^2 = x,$$

解得:  $x_0=2$ ,  $x'_0=8$ ,  
 $\therefore m$  的最大值为 8.



**点评:** 此题考查了二次函数的一般式与顶点式的转化, 相似三角形的判定与性质以及最大值等问题. 此题综合性很强, 解题的关键是方程思想与数形结合思想的应用.

---

参与本试卷答题和审题的老师有：

zcx; bjf; 疯跑的蜗牛; kuaile; gbl210; sjzx; ZHAOJJ; 马兴田; CJX; zhangCF; sd2011; MMCH; 冯延鹏; zhqd。

(排名不分先后)

菁优网

2012 年 5 月 2 日