

2019 年北京市中考数学试卷

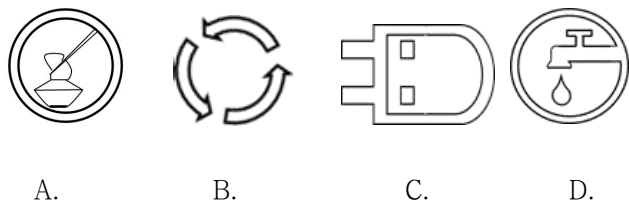
一.选择题 (本题共 16 分, 每小题 2 分) 第 1-8 题均有四个选项, 符合题意的选项只有一个.

1. 4 月 24 日是中国航天日, 1970 年的这一天, 我国自行设计、制造的第一颗人造地球卫星“东方红一号”成功发射, 标志着中国从此进入了太空时代, 它的运行轨道, 距地球最近点 439 000 米. 将 439 000 用科学记数法表示应为 ()

A. 0.439×10^6 B. 4.39×10^6 C. 4.39×10^5 D. 139×10^3

【解析】 本题考察科学记数法较大数, $a \times 10^N$ 中要求 $1 \leq |a| < 10$, 此题中 $a = 4.39, N = 5$, 故选 C

2. 下列倡导节约的图案中, 是轴对称图形的是 ()



【解析】 本题考察轴对称图形的概念, 故选 C

3. 正十边形的外角和为 ()

A. 180° B. 360° C. 720° D. 1440°

【解析】 多边形的外角和是一个定值 360° , 故选 B

4. 在数轴上, 点 A, B 在点 O 的两侧, 分别表示数 $a, 2$, 将点 A 向右平移 1 个单位长度, 得到点 C. 若 $CO=BO$, 则 a 的值为 ()

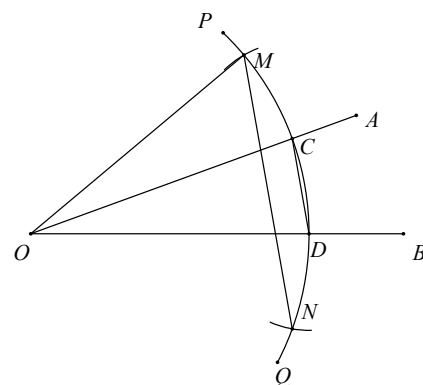
A. -3 B. -2 C. -1 D. 1

【解析】 本题考察数轴上的点的平移及绝对值的几何意义. 点 A 表示数为 a , 点 B 表示数为 2, 点 C 表示数为 $a+1$, 由题意可知, $a < 0$, $\therefore CO=BO$, $\therefore |a+1|=2$, 解得 $a=1$ (舍) 或 $a=-3$, 故选 A

5. 已知锐角 $\angle AOB$ 如图, (1) 在射线 OA 上取一点 C , 以点 O 为圆心, OC 长为半径作 $\widehat{PQ}$, 交射线 OB 于点 D , 连接 CD ;

(2) 分别以点 C, D 为圆心, CD 长为半径作弧, 交 $\widehat{PQ}$ 于点 M, N ;

(3) 连接 OM, MN .



根据以上作图过程及所作图形, 下列结论中错误的是 ()

A. $\angle COM = \angle COD$ B. 若 $OM = MN$, 则 $\angle AOB = 20^\circ$

C. $MN \parallel CD$ D. $MN = 3CD$

【解析】连接 ON , 由作图可知 $\triangle COM \cong \triangle DON$.

A. 由 $\triangle COM \cong \triangle DON$, 可得 $\angle COM = \angle COD$, 故 A 正确.

B. 若 $OM = MN$, 则 $\triangle OMN$ 为等边三角形, 由全等可知 $\angle COM = \angle COD = \angle DON = 20^\circ$, 故 B 正确

C. 由题意, $OC = OD$, $\therefore \angle OCD = \frac{180^\circ - \angle COD}{2}$. 设 OC 与 OD 与 MN 分别交于 R, S , 易证 $\triangle MOR \cong \triangle NOS$, 则 $OR = OS$, $\therefore \angle ORS = \frac{180^\circ - \angle COD}{2}$, $\therefore \angle OCD = \angle ORS$. $\therefore MN \parallel CD$, 故 C 正确.

D. 由题意, 易证 $MC = CD = DN$, $\therefore MC + CD + DN = 3CD$. $\because$ 两点之间线段最短. $\therefore MN < MC + CD + DN = 3CD$, 故选 D

6. 如果 $m + n = 1$, 那么代数式 $\left(\frac{2m+n}{m^2-mn} + \frac{1}{m}\right) \cdot (m^2 - n^2)$ 的值为 () A. -3 B. -1 C. 1 D. 3

【解析】: $\left(\frac{2m+n}{m^2-mn} + \frac{1}{m}\right) \cdot (m^2 - n^2)$

$$= \left[\frac{2m+n}{m(m-n)} + \frac{m-n}{m(m-n)} \right] \cdot (m+n)(m-n)$$

$$= \frac{3m}{m(m-n)} \cdot (m+n)(m-n) = 3(m+n)$$

$$\therefore m+n=1$$

$\therefore$ 原式=3, 故选 D

7. 用三个不等式 $a > b$, $ab > 0$, $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ 中的两个不等式作为题设, 余下的一个不等式作为结论组成一个命题, 组成真命题的个数为 ()

A.0 B.1 C.2 D.3

【解析】本题共有 3 种命题:

命题①, 如果 $a > b, ab > 0$, 那么 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

$\because a > b, \therefore a - b > 0, \because ab > 0, \therefore \frac{a-b}{ab} > 0$, 整理得 $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$, $\therefore$ 该命题是真命题.

命题②, 如果 $a > b, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 那么 $ab > 0$.

$\because \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0, \frac{b-a}{ab} < 0. \because a > b, \therefore b-a < 0, \therefore ab > 0$.

$\therefore$ 该命题为真命题.

命题③, 如果 $ab > 0, \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 那么 $a > b$.

$\because \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, \therefore \frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0, \frac{b-a}{ab} < 0. \because ab > 0, \therefore b-a < 0, \therefore b < a$

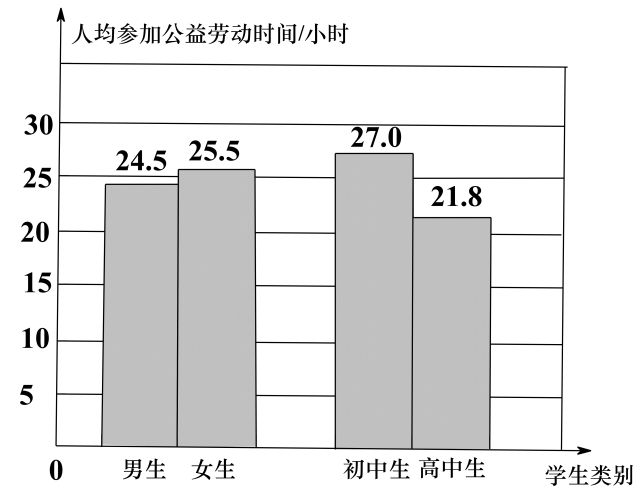
$\therefore$ 该命题为真命题.

故, 选 D

8. 某校共有 200 名学生, 为了解本学期学生参加公益劳动的情况, 收集了他们参加公益劳动时

间（单位：小时）等数据，以下是根据数据绘制的统计图表的一部分.

学生 类型 人数 时间		$0\leq t < 10$	$10\leq t < 20$	$20\leq t < 30$	$30\leq t < 40$	$t\geq 40$
性 别	男	7	31	25	30	4
	女	8	29	26	32	8
学 段	初中		25	36	44	11
	高中					



下面有四个推断:

①这 200 名学生参加公益劳动时间的平均数一定在 24.5-25.5 之间

②这 200 名学生参加公益劳动时间的中位数在 20-30 之间

③这 200 名学生中的初中生参加公益劳动时间的中位数一定在 20-30 之间

④这 200 名学生中的高中生参加公益劳动时间的中位数可能在 20-30 之间

所有合理推断的序号是 ()

- A.①③ B.②④ C.①②③ D.①②③④

【解析】①由条形统计图可得男生人均参加公益劳动时间为 24.5h，女生为 25.5h，则平均数一定在 24.5~25.5 之间，故①正确

②由统计表类别栏计算可得，各时间段人数分别为 15,60,51,62,12，则中位数在 20~30 之间，故②正确.

③由统计表计算可得，初中学段栏 $0 \leq t < 10$ 的人数在 0~15 之间，当人数为 0 时，中位数在 20~30 之间；当人数为 15 时，中位数在 20~30 之间，故③正确.

④由统计表计算可得，高中学段栏各时间段人数分别为 0~15，35,15，18,1.当

$0 \leq t < 10$ 时间段人数为 0 时，中位数在 10~20 之间；当 $0 \leq t < 10$ 时间段人数为 15 时，中位数在 10~20 之间，故④错误

故，选 C

二、填空题 (本题共 16 分，每小题 2 分)

9. 若分式 $\frac{x-1}{x}$ 的值为 0，则 x 的值为——.

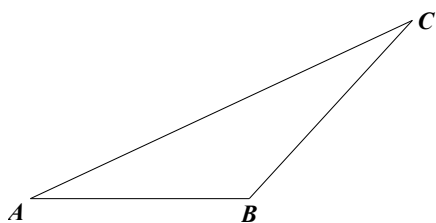
【解析】本题考查分式值为 0，则分子 $x-1=0$ ，且分母 $x \neq 0$ ，故答案为 1

10. 如图，已知 $\triangle ABC$ ，通过测量、计算得 $\triangle ABC$ 的面积约为 cm^2 . (结果保留一位小数)

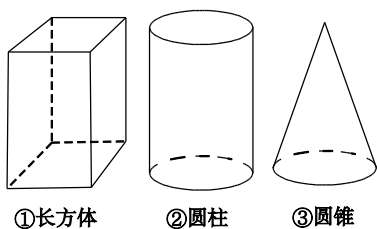
【解析】本题考查三角形面积，直接动手操作测量即可，故答案为“测量可知”

11. 在如图所示的几何体中，其三视图中有矩形的是_____。（写出所有正确答案的序号）

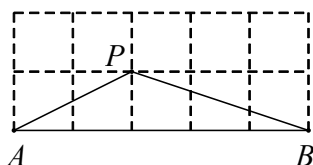
【解析】本题考查对三视图的认识.①长方体的主视图，俯视图，左视图均为矩形；②圆柱的主视图，左视图均为矩形，俯视图为圆；③圆锥的主视图和左视图为三角形，俯视图为圆.故答案为①②



第10题图



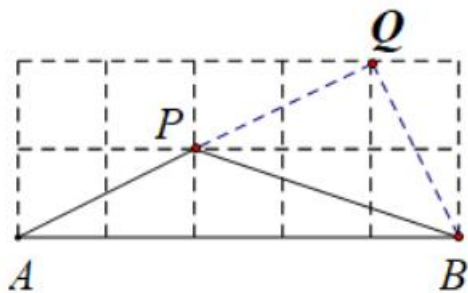
第11题图



第12题图

12. 如图所示的网格是正方形网格，则 $\angle PAB + \angle PBA =$ _____°（点 A, B, P 是网格线交点）.

【解析】本题考查三角形的外角，可延长 AP 交正方形网格于点 Q，连接 BQ，如图所示，经计算 $PQ = BQ = \sqrt{5}$ ， $PB = \sqrt{10}$ ， $\therefore PQ^2 + BQ^2 = PB^2$ ，即 $\triangle PBQ$ 为等腰直角三角形， $\therefore \angle BPQ = 45^\circ$ ， $\therefore \angle PAB + \angle PBA = \angle BPQ = 45^\circ$ ，故答案为 45



13. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(a, b)$ ($a > 0, b > 0$) 在双曲线 $y = \frac{k_1}{x}$ 上. 点 A 关于 x 轴的对称点 B 在双曲线 $y = \frac{k_2}{x}$ 上，则 $k_1 + k_2$ 的值为——.

【解析】本题考查反比例函数的性质， $A(a, b)$ 在反比例 $y = \frac{k_1}{x}$ 上，则 $k_1 = ab$ ， A 关于 x 轴的对称点 B 的坐标为 $(a, -b)$ ，又因为 B 在 $y = \frac{k_2}{x}$ 上，则 $k_2 = -ab$ ， $\therefore k_1 + k_2 = 0$

故答案为 0

14. 把图 1 中的菱形沿对角线分成四个全等的直角三角形，将这四个直角三角形分别拼成如图 2，图 3 所示的正方形，则图 1 中菱形的面积为——.

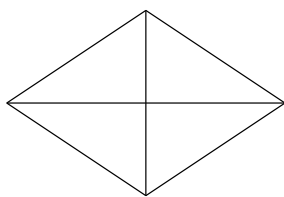


图1

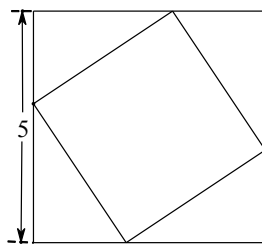


图2

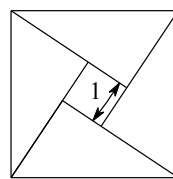


图3

【解析】设图 1 中小直角三角形的两直角边分别为 a, b ($b > a$)，则由图 2，图 3 可列方程组

$$\begin{cases} a+b=5 \\ b-a=1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}, \text{所以菱形的面积} S = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12. \text{故答案为 12.}$$

15. 小天想要计算一组数据 92, 90, 94, 86, 99, 85 的方差 s_0^2 . 在计算平均数的过程中，将这组数据中的每一个数都减去 90，得到一组新数据 2, 0, 4, -4, 9, -5. 记这组新数据的方差

为 s_1^2 ，则 s_1^2 _____ s_0^2 . (填 “>”，“=” 或 “<”)

【解析】 本题考查方差的性质。两组数据的平均值分别为 91 和 1，

$$s_0^2 = \frac{(92-91)^2 + (90-91)^2 + (94-91)^2 + (86-91)^2 + (99-91)^2 + (85-91)^2}{6} = \frac{116}{6} = \frac{68}{3}$$

$$s_1^2 = \frac{(2-1)^2 + (0-1)^2 + (4-1)^2 + (-4-1)^2 + (9-1)^2 + (-5-1)^2}{6} = \frac{136}{6} = \frac{68}{3}$$

$\therefore s_0^2 = s_1^2$ ，故答案为=

16. 在矩形 ABCD 中，M，N，P，Q 分别为边 AB，BC，CD，DA 上的点（不与端点重合）.

对于任意矩形 ABCD，下面四个结论中，

①存在无数个四边形 MNPQ 是平行四边形；

②存在无数个四边形 MNPQ 是矩形；

③存在无数个四边形 MNPQ 是菱形；

④至少存在一个四边形 MNPQ 是正方形.

所有正确结论的序号是 _____ .

【解析】 根据平行四边形的判定，矩形的判定，以及正方形的判定可知，存在无数个平行四边形，无数个矩形，无数个正方形，故答案为①②③

三、解答题（本题共 68 分，第 17-21 题，每小题 5 分，第 22-24 题，每小题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题，每小题 7 分）

解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

17. 计算: $\left| -\sqrt{3} \right| - (4 - \pi)^0 + 2 \sin 60^\circ + \left(\frac{1}{4} \right)^{-1}$.

【解析】原式 $=\sqrt{3}-1+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+4$

$$=2\sqrt{3}+3$$

18. 解不等式组:
$$\begin{cases} 4(x-1) < x+2, \\ \frac{x+7}{3} > x. \end{cases}$$

【解析】解不等式①得:

$$4x-4 < x+2, 4x-x < 4+2, 3x < 6, \therefore x < 2$$

解不等式②得: $x+7 > 3x, x-3x > -7, -2x > -7, \therefore x < \frac{7}{2}$

$\therefore$ 不等式组的解集为 $x < 2$

19. 关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ 有实数根, 且 m 为正整数, 求 m 的值及此时方程的根.

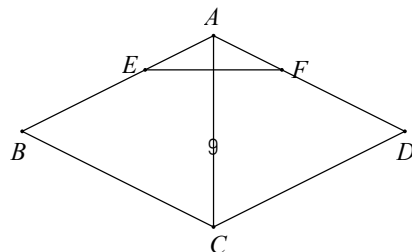
【解析】 $\because x^2 - 2x + 2m - 1 = 0$ 有实数根, $\therefore \Delta \geq 0$, 即 $(-2)^2 - 4(2m-1) \geq 0, \therefore m \leq 1$

$\because m$ 为正整数, $\therefore m = 1$, 故此时二次方程为 $x^2 - 2x + 1 = 0$, 即 $(x-1)^2 = 0$

$$\therefore x_1 = x_2 = 1$$

$\therefore m = 1$, 此时方程的根为 $x_1 = x_2 = 1$

20. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, AC 为对角线, 点 E, F 分别在 AB, AD 上,



BE=DF, 连接 EF.

(1) 求证: $AC \perp EF$;

(2) 延长 EF 交 CD 的延长线于点 G, 连接 BD 交 AC 于点 O, 若 $BD=4$, $\tan G = \frac{1}{2}$, 求 AO 的长.

【解析】证明: $\because$ 四边形 ABCD 为菱形 $\therefore AB=AD$, AC 平分 $\angle BAD$

$$\because BE=DF, \therefore AB - BE = AD - DF, \therefore AE=AF$$

$\therefore \triangle AEF$ 是等腰三角形, $\because$ AC 平分 $\angle BAD$, $\therefore AC \perp EF$

(2) 解: $\because$ 四边形 ABCD 为菱形, $\therefore CG \parallel AB$, $BO = \frac{1}{2}BD = 2$, $\therefore EF \parallel BD$

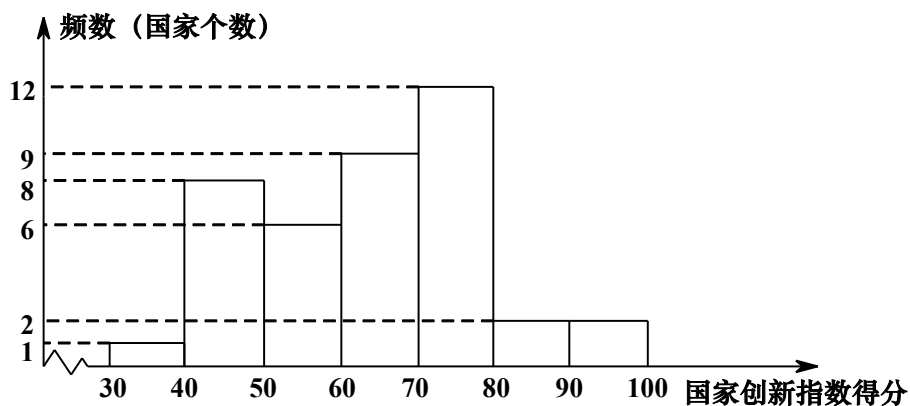
$\therefore$ 四边形 EBDG 为平行四边形, $\therefore \angle G = \angle ABD$, $\therefore \tan \angle ABD = \tan \angle G = \frac{1}{2}$

$$\therefore \tan \angle ABD = \frac{AO}{BO} = \frac{AO}{2} = \frac{1}{2}, \therefore AO=1$$

21. 国家创新指数是反映一个国家科学技术和创新竞争力的综合指数. 对国家创新指数得分排名前 40 的国家的有关数据进行收集、整理、描述和分析. 下面给出了部分信息:

a. 国家创新指数得分的频数分布直方图 (数据分成 7 组:

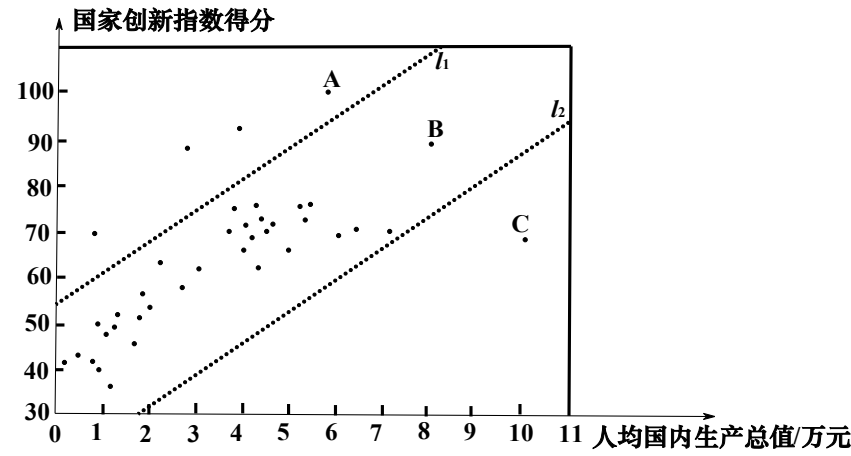
$30 \leq x < 40$, $40 \leq x < 50$, $50 \leq x < 60$, $60 \leq x < 70$, $70 \leq x < 80$, $80 \leq x < 90$, $90 \leq x \leq 100$);



b. 国家创新指数得分在 $60 \leq x < 70$ 这一组的是:

61.7 62.4 63.6 65.9 66.4 68.5 69.1 69.3 69.5

c. 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图:



d. 中国的国家创新指数得分为 69.5.

(以上数据来源于《国家创新指数报告 (2018)》)

根据以上信息，回答下列问题:

- (1) 中国的国家创新指数得分排名世界第一——；
- (2) 在 40 个国家的人均国内生产总值和国家创新指数得分情况统计图中，包括中国在内的少数几个国家所对应的点位于虚线 l_1 的上方. 请在图中用 “○” 圈出代表中国的点；
- (3) 在国家创新指数得分比中国高的国家中，人均国内生产总值的最小值约为—— 万美元；
(结果保留一位小数)
- (4) 下列推断合理的是——.

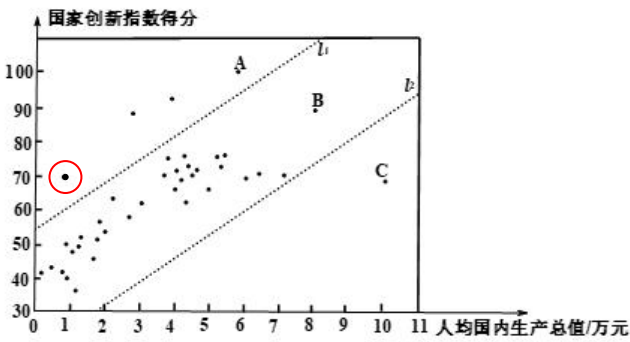
①相比于点 A, B 所代表的国家，中国的国家创新指数得分还有一定差距，中国提出“加快建设创新型国家”的战略任务，进一步提高国家综合创新能力；

②相比于点 B, C 所代表的国家, 中国的人均国内生产总值还有一定差距, 中国提出“决胜全面建成小康社会”的奋斗目标, 进一步提高人均国内生产总值.

【解析】

(1) 17

(2)



(3) 2.7 (4) ①②

22. 在平面内, 给定不在同一直线上的点 A, B, C, 如图所示. 点 O 到点 A, B, C 的距离均等于 a (a 为常数), 到点 O 的距离等于 a 的所有点组成图形 G, $\angle ABC$ 的平分线交图形 G 于点 D, 连接 AD, CD.

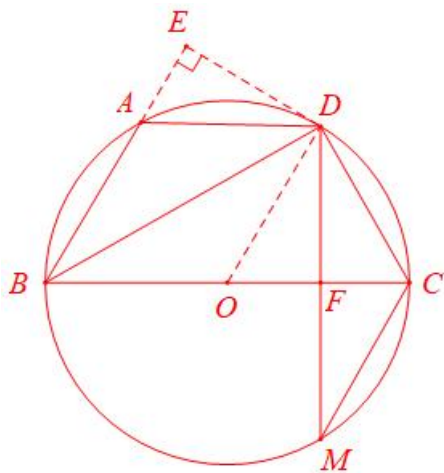
(1) 求证: $AD=CD$;

(2) 过点 D 作 $DE \perp BA$, 垂足为 E, 作 $DF \perp BC$, 垂足为 F, 延长 DF 交图形 G 于点 M, 连接 CM. 若 $AD=CM$, 求直线 DE 与图形 G 的公共点个数.

A •

B •

• C



【解析】如图所示，依题意画出图形 G 为 $\odot O$ ，如图所示

(1) 证明: $\because$ BD 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle ABD = \angle CBD$,

$$\therefore \widehat{AD} = \widehat{CD}, \therefore AD = CD$$

(2) 解: $\because AD=CD, AD=CM, \therefore CD=CM. \because DF \perp BC, \therefore \angle DFC=\angle CFM=90^\circ$

在 $R_t \Delta CDF$ 和 $R_t \Delta CMF$ 中

$$\begin{cases} CD=CM \\ CF=CF \end{cases}, \therefore \triangle CDF \cong \triangle CMF \text{ (HL)}, \therefore DF=MF, \therefore BC \text{ 为弦 DM 的垂直平分线}$$

$\therefore BC$ 为 $\odot O$ 的直径, 连接 OD

$\because \angle COD = 2\angle CBD, \angle ABC = 2\angle CBD, \therefore \angle ABC = \angle COD, \therefore OD \parallel BE.$

又 $\because DE \perp BA$, $\therefore \angle DEB = 90^\circ$, $\therefore \angle ODE = 90^\circ$, 即 $OD \perp DE$, $\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的切线.

∴ 直线 DE 与图形 G 的公共点个数为 1 个.

23. 小云想用 7 天的时间背诵若干首诗词, 背诵计划如下:

①将诗词分成4组,第*i*组有 x_i 首, $i=1, 2, 3, 4$;

②对于第 i 组诗词，第 i 天背诵第一遍，第 $(i+1)$ 天背诵第二遍，第 $(i+3)$ 天背诵第三遍，三遍后完成背诵，其它天无需背诵， $i = 1, 2, 3, 4$;

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天
第 1 组	x_1	x_1		x_1			
第 2 组		x_2	x_2		x_2		
第 3 组							
第 4 组				x_4	x_4		x_4

③每天最多背诵 14 首，最少背诵 4 首.

解答下列问题:

- (1) 填入 x_3 补全上表;
- (2) 若 $x_1 = 4$ ， $x_2 = 3$ ， $x_3 = 4$ ，则 x_4 的所有可能取值为 _____；
- (3) 7 天后，小云背诵的诗词最多为 _____ 首.

【解析】(1) 如下图

	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天	第 6 天	第 7 天
第 1 组							
第 2 组							
第 3 组			x_3	x_3		x_3	
第 4 组							

(2) 根据上表可列不等式组:

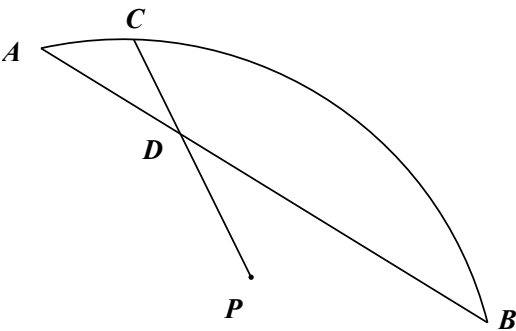
$$\begin{cases} 4 \leq x_1 + x_3 + x_4 \leq 14 \\ 4 \leq x_2 + x_4 \leq 14 \\ 4 \leq x_4 \leq 14 \end{cases}, \text{ 可得 } 4 \leq x_4 \leq 6$$

(3) 确定第 4 天, $x_1 + x_3 + x_4 = 14$, 由第 2 天, 第 3 天, 第 5 天可得

$$\begin{cases} 4 \leq x_1 + x_2 \leq 14 \\ 4 \leq x_2 + x_3 \leq 14, \therefore 12 \leq x_1 + x_3 + x_4 + 3x_2 \leq 42, \therefore -2 \leq 3x_2 \leq \frac{28}{3}, \\ 4 \leq x_2 + x_4 \leq 14 \end{cases}$$

可取 x_2 最大整数值为 9, $\therefore x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 14 + 9 = 23$

24. 如图, P 是 $\widehat{AB}$ 与弦 AB 所围成的图形的外部的一定点, C 是 $\widehat{AB}$ 上一动点, 连接 PC 交弦 AB 于点 D.



小腾根据学习函数的经验, 对线段 PC, PD, AD 的长度之间的关系进行了探究.

下面是小腾的探究过程, 请补充完整:

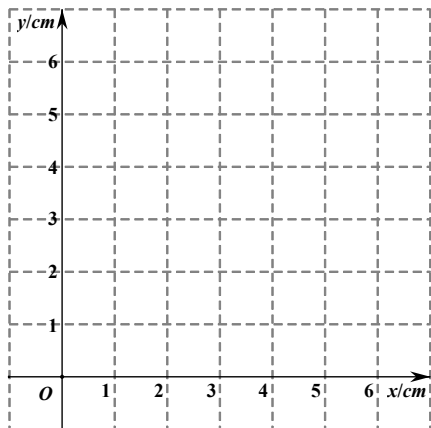
(1) 对于点 C 在 $\widehat{AB}$ 上的不同位置, 画图、测量, 得到了线段 PC, PD, AD 的长度的几组值, 如下表:

	位置 1	位置 2	位置 3	位置 4	位置 5	位置 6	位置 7	位置 8
--	------	------	------	------	------	------	------	------

PC/cm	3.44	3.30	3.07	2.70	2.25	2.25	2.64	2.83
PD/cm	3.44	2.69	2.00	1.36	0.96	1.13	2.00	2.83
AD/cm	0.00	0.78	1.54	2.30	3.01	4.00	5.11	6.00

在 PC, PD, AD 的长度这三个量中, 确定 —— 的长度是自变量, —— 的长度和 —— 的长度都是这个自变量的函数;

(2) 在同一平面直角坐标系 xOy 中, 画出 (1) 中所确定的函数的图象;

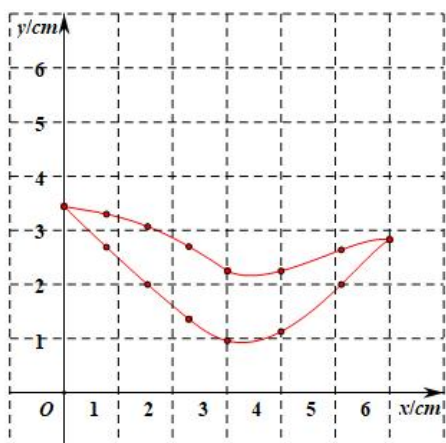


(3) 结合函数图象, 解决问题: 当 $PC=2PD$ 时, AD 的长度约为 —— cm.

【解析】

(1) AD, PC, PD;

(2)



(3) 2.29 或者 3.98

25. 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 $l: y = kx + 1 (k \neq 0)$ 与直线 $x = k$, 直线 $y = -k$ 分别交于点 A, B, 直线 $x = k$ 与直线 $y = -k$ 交于点 C.

(1) 求直线 l 与 y 轴的交点坐标;

(2) 横、纵坐标都是整数的点叫做整点. 记线段 AB , BC , CA 围成的区域 (不含边界) 为 W .

①当 $k = 2$ 时, 结合函数图象, 求区域 W 内的整点个数;

②若区域 W 内没有整点, 直接写出 k 的取值范围.

【解析】(1) 令 $x = 0$, 则 $y = 1$, $\therefore$ 直线 l 与 y 轴交点坐标为 $(0, 1)$

(2) ①当 $k = 2$ 时, 直线 $l: y = 2x + 1$, 把 $x = 2$ 代入直线 l , 则 $y = 5$, $\therefore A(2, 5)$

把 $y = -2$ 代入直线 l 得: $-2 = 2x + 1$, $\therefore x = -\frac{3}{2}$

$\therefore B(-\frac{3}{2}, -2), C(2, -2)$, 整点有 $(0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (1, 2)$ 共 6 个点.

② $-1 \leq k < 0$ 或 $k = -2$

26. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = ax^2 + bx - \frac{1}{a}$ 与 y 轴交于点 A, 将点 A 向右平移

2 个单位长度，得到点 B，点 B 在抛物线上.

(1) 求点 B 的坐标 (用含 a 的式子表示);

(2) 求抛物线的对称轴;

(3) 已知点 $P(\frac{1}{2}, -\frac{1}{a})$, $Q(2, 2)$. 若抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点, 结合函数图象, 求 a 的取值范围.

【解析】(1) $\because$ 抛物线与 y 轴交于点 A, $\therefore$ 令 $x=0$, 得 $y=-\frac{1}{a}$,

$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0, -\frac{1}{a})$, $\therefore$ 点 A 向右平移两个单位长度, 得到点 B,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(2, -\frac{1}{a})$;

(2) $\because$ 抛物线过点 $A(0, -\frac{1}{a})$ 和点 $B(2, -\frac{1}{a})$, 由对称性可得, 抛物线对称轴为

直线 $x = \frac{0+2}{2} = 1$, 故对称轴为直线 $x=1$

(3) ①当 $a > 0$ 时, 则 $-\frac{1}{a} < 0$, 分析图象可得: 根据抛物线的对称性, 抛物线不可能同时经过点 A 和点 P; 也不可能同时经过点 B 和点 Q, 所以, 此时线段 PQ 与抛物线没有交点.

②当 $a < 0$ 时, 则 $-\frac{1}{a} > 0$.

分析图象可得: 根据抛物线的对称性, 抛物线不可能同时经过点 A 和点 P; 但当点 Q 在点 B 上方或与点 B 重合时, 抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点, 此时 $-\frac{1}{a} \leq 2$, 即

$$a \leq -\frac{1}{2}$$

综上所述, 当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, 抛物线与线段 PQ 恰有一个公共点.

27. 已知 $\angle AOB = 30^\circ$, H 为射线 OA 上一定点, $OH = \sqrt{3} + 1$, P 为射线 OB 上一点, M

为线段 OH 上一动点，连接 PM，满足 $\angle OMP$ 为钝角，以点 P 为中心，将线段 PM 顺时针旋转 150° ，得到线段 PN，连接 ON.

(1) 依题意补全图 1；

(2) 求证: $\angle OMP = \angle OPN$;

(3) 点 M 关于点 H 的对称点为 Q, 连接 QP. 写出一个 OP 的值, 使得对于任意的点 M 总有 $ON=QP$, 并证明.

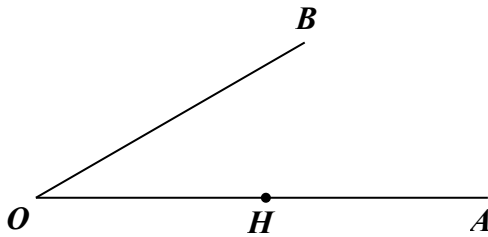
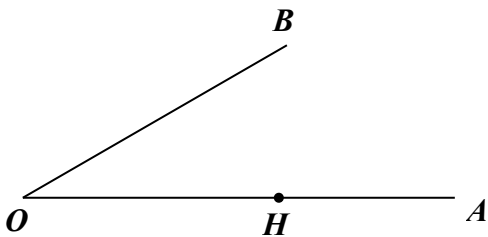


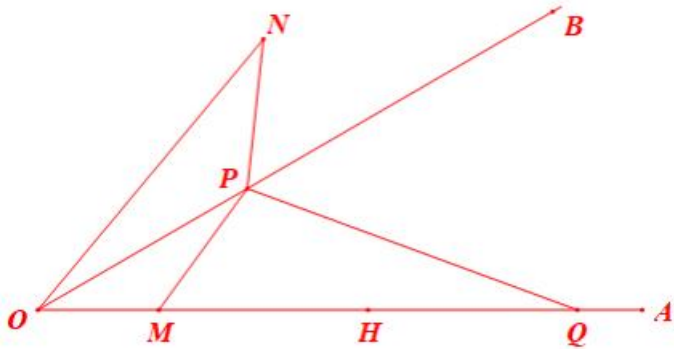
图1



备用图

【解析】

(1) 如图所示



(2) 在 $\triangle OPM$ 中, $\angle OMP = 180^\circ - \angle POM - \angle OPM = 150^\circ - \angle OPM$

$\angle OPN = \angle MPN - \angle OPM = 150^\circ - \angle OPM$

$\therefore \angle OMP = \angle OPN$

$$KH = OH - OM = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}x$$

$\therefore M$ 与 Q 关于 H 对称, $\therefore MH = HQ$

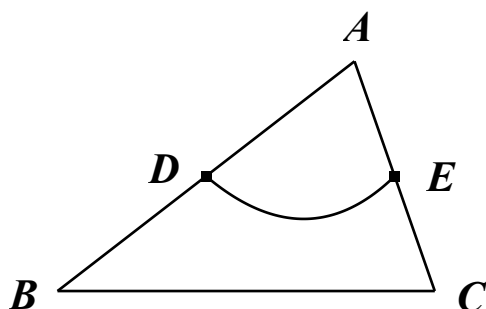
$$\therefore KQ = KH + HQ = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}x + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}x + y = 2\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}x + y$$

$$\therefore KQ = OF, \therefore 2\sqrt{3} + 2 - 2\sqrt{3}x + y = 2x + y, \text{ 整理得 } 2\sqrt{3} + 2 = x(2 + 2\sqrt{3})$$

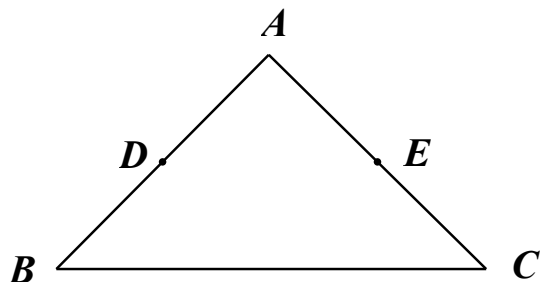
所以 $x = 1$, 即 $PK = 1$

$\therefore \angle POA = 30^\circ$, $\therefore OP = 2$

28. 在 $\triangle ABC$ 中, D , E 分别是 $\triangle ABC$ 两边的中点, 如果 $\widehat{DE}$ 上的所有点都在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 则称 $\widehat{DE}$ 为 $\triangle ABC$ 的中内弧. 例如, 下图中 $\widehat{DE}$ 是 $\triangle ABC$ 的一条中内弧.



(1) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 2\sqrt{2}$, D , E 分别是 AB , AC 的中点. 画出 $\triangle ABC$ 的最长的中内弧 $\widehat{DE}$, 并直接写出此时 $\widehat{DE}$ 的长;



(2) 在平面直角坐标系中, 已知点 $A(0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(4t, 0)$ ($t > 0$), 在 $\triangle ABC$ 中,

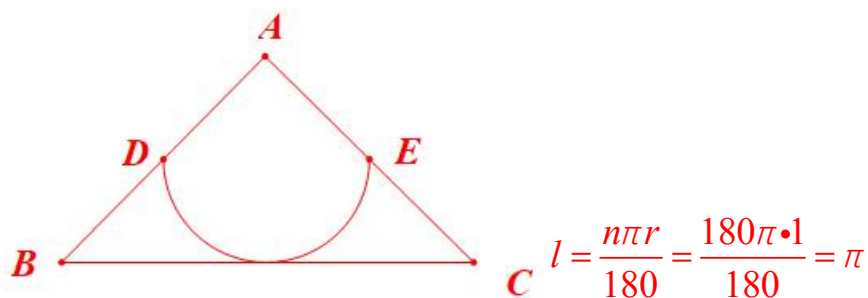
D, E 分别是 AB, AC 的中点.

①若 $t = \frac{1}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的中内弧 $\widehat{DE}$ 所在圆的圆心 P 的纵坐标的取值范围;

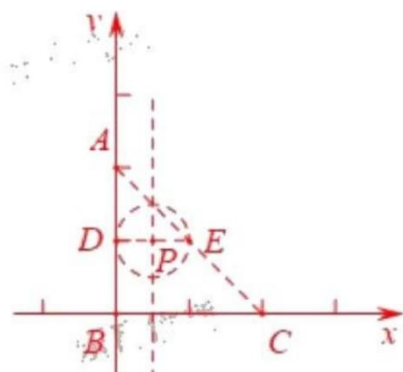
②若在 $\triangle ABC$ 中存在一条中内弧 $\widehat{DE}$, 使得 $\widehat{DE}$ 所在圆的圆心 P 在 $\triangle ABC$ 的内部或边上, 直接写出 t 的取值范围.

【解析】

(1)



(2)



①当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $C(2,0), D(0,1), E(1,1)$

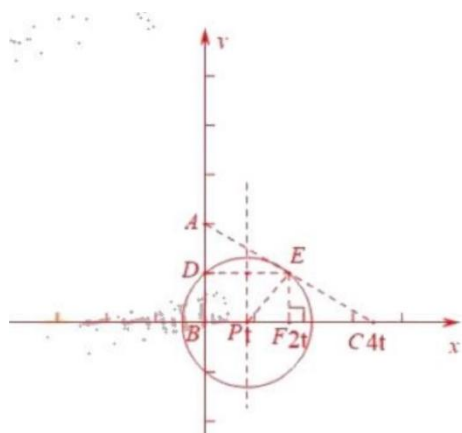
(i) 当 P 为 DE 的中点时, $\widehat{DE}$ 是中内弧, $\therefore P(\frac{1}{2}, 1)$

(ii) 当 $\odot P$ 与 AC 相切时, $y_{AC} = -x + 2, y_{BE} = x$, 当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{2}$, $\therefore P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

综上, P 的纵坐标 $y_p \geq 1$ 或 $y_p \leq \frac{1}{2}$

② (i) 当 $PE \perp AC$ 时, $\triangle EFC \sim \triangle PFE$, 得 $\frac{EF}{PF} = \frac{FC}{FE}$, $\frac{1}{t} = \frac{2t}{1}$, $\therefore t^2 = \frac{1}{2} (t > 0)$, $\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore 0 < t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$



(ii) $\triangle PFC \sim \triangle ABC$, 得 $\frac{PF}{AB} = \frac{FC}{BC}$, $\frac{PF}{2} = \frac{3}{4}$, $\therefore PF = \frac{3}{2}$

$$DP = PF = r, \quad PE = \frac{1}{2}, \quad DP = \frac{3}{2}, \quad \therefore t = \sqrt{2}, \quad \therefore 0 < t \leq \sqrt{2}$$

综上: $0 < t \leq \sqrt{2}$

会员升级服务第一拨 · 清北季



神马，有清华北大学霸方法论课；还有清华学霸向所有的父母亲述自己求学之路；

衡水名校试卷悄悄的上线了；

扫qq领取官网不首发课程，很多人我没告诉他啊！

会员qq专享等你来撩.....