

2015 年北京市高级中等学校招生考试

数学试卷

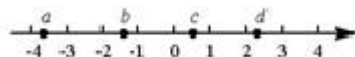
一、选择题

下面各题均有四个选项，其中只有一个是符合题意的。

1. 截止到 2015 年 6 月 1 日，北京市已建成 34 个地下调蓄设施，蓄水能力达到 1 40 000 立方米。将 1 40 000 用科学记数法表示应为

A. 14×10^4 B. 1.4×10^5 C. 1.4×10^6 D. 0.14×10^6

2. 实数 a, b, c, d 在数轴上的对应点的位置如图所示，这四个数中，绝对值最大的是

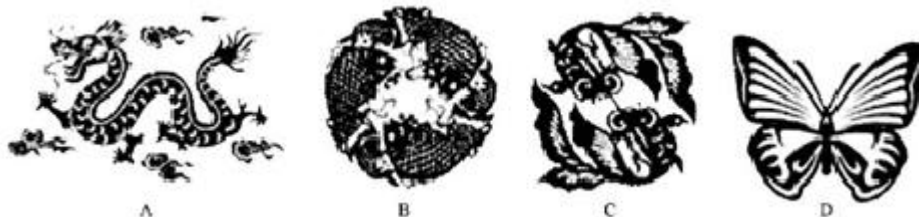


A. a B. b C. c D. d

3. 一个不透明的盒子中装有 3 个红球，2 个黄球和 1 个绿球，这些球除了颜色外无其他差别，从中随机摸出一个小球，恰好是黄球的概率为

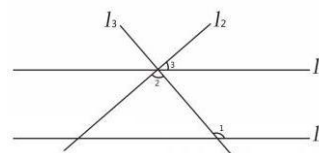
A. B. C. D.

4. 剪纸是我国传统的民间艺术，下列剪纸作品中，是轴对称图形的为



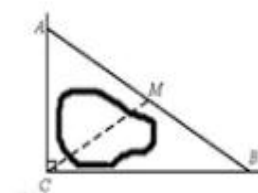
5. 如图，直线 l_1, l_2, l_3 交于一点，直线 $l_4 \parallel l_1$ ，若 $\angle 1 = 124^\circ$ ， $\angle 2 = 88^\circ$ ，则 $\angle 3$ 的度数为

A. 26° B. 36°
C. 46° D. 56°



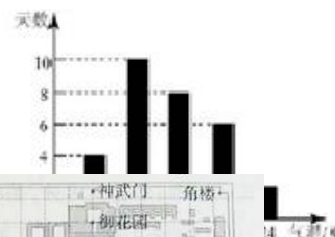
6. 如图，公路 AC，BC 互相垂直，公路 AB 的中点 M 与点 C 被湖隔开，若测得 AM 的长为 1.2km，则 M，C 两点间的距离为

A. 0.5km B. 0.6km
C. 0.9km D. 1.2km

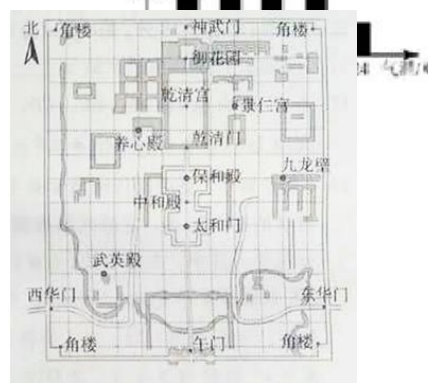


7. 某市 6 月份日平均气温统计如图所示，则在日平均气温这组数据中，众数和中位数分别是

A. 21, 21 B. 21, 21.5
C. 21, 22 D. 22, 22



8. 右图是利用平面直角坐标系画出的故宫博物院的主要建



筑分布图。若这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向。表示太和门的点坐标为 $(0, -1)$ ，表示九龙壁的点的坐标为 $(4, 1)$ ，则表示下列宫殿的点的坐标正确的是

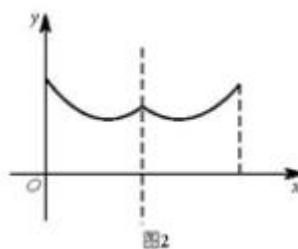
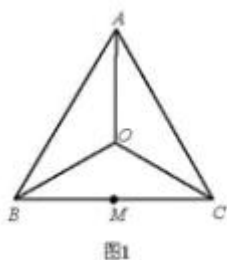
- A. 景仁宫 $(4, 2)$
- B. 养心殿 $(-2, 3)$
- C. 保和殿 $(1, 0)$
- D. 武英殿 $(-3.5, -4)$

9. 一家游泳馆的游泳收费标准为 30 元/次，若购买会员年卡，可享受如下优惠：

会员年卡类型	办卡费用 (元)	每次游泳收费 (元)
A 类	50	25
B 类	200	20
C 类	400	15

例如，购买 A 类会员卡，一年内游泳 20 次，消费 $50+25 \times 20=550$ 元，若一年内在该游泳馆游泳的次数介于 45~55 次之间，则最省钱的方式为

- A. 购买 A 类会员卡
 - B. 购买 B 类会员卡
 - C. 购买 C 类会员卡
 - D. 不购买会员卡
10. 一个寻宝游戏的寻宝通道如图 1 所示，通道由在同一平面内的 AB ， BC ， CA ， OA ， OB ， OC 组成。为记录寻宝者的进行路线，在 BC 的中点 M 处放置了一台定位仪器，设寻宝者行进的时间为 x ，寻宝者与定位仪器之间的距离为 y ，若寻宝者匀速行进，且表示 y 与 x 的函数关系的图象大致如图 2 所示，则寻宝者的行进路线可能为

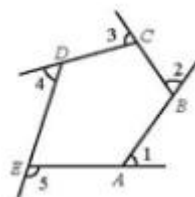


- A. $A \rightarrow O \rightarrow B$
- B. $B \rightarrow A \rightarrow C$
- C. $B \rightarrow O \rightarrow C$
- D. $C \rightarrow B \rightarrow O$

二、填空题

11. 分解因式: $5x^3 - 10x^2 + 5x =$ _____.

12. 右图是由射线 AB ， BC ， CD ， DE ，组成的平面图形，则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 =$ _____.



13. 《九章算术》是中国传统数学最重要的著作，奠定了中国传统数学的基本框架。它的代数成就主要包括开放术、正负术和方程术。其中，方程术是《九章算术》最高的数学成就。《九章算术》中记载：“今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两。问牛、羊各直金几何？”

译文：“假设有 5 头牛、2 只羊，值金 10 两；2 头牛、5 只羊，值金 8 两。问每头牛、每只羊各值金多少两”

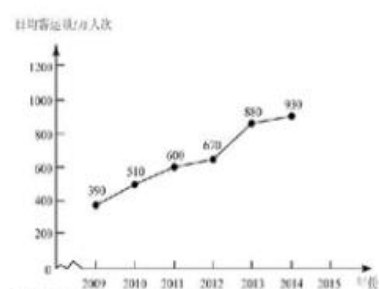
设每头牛值金 x ，每只羊各值金 y 两，可列方程组为_____。



14. 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+\frac{1}{4}=0$ 有两个相等的实数根，写出一组满足条件的实数

a, b 的值: $a=$ _____, $b=$ _____.

15. 北京市 2009-2014 年轨道交通日均客运量统计如图所示。根据统计图中提供信息，预估 2015 年北京市轨道交通日均客运量约_____万人次，你的预估理由是_____。



16. 阅读下面材料:

在数学课上，老师提出如下问题:

尺规作图：作一条线段的垂直平分线.

已知：线段 AB .

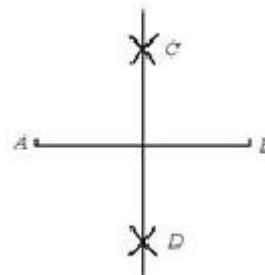


小芸的作法如下:

如图,

(1) 分别以点 A 和点 B 为圆心，大于 AB 的长为半径作弧，两弧相交于 C, D 两点;

(2) 作直线 CD



老师说：“小芸的作法正确。”

请回答：小芸的作图依据是_____.

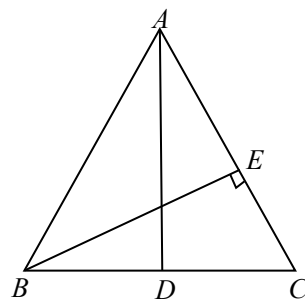
三、解答题（本题共 72 分，第 17—26 题，每小题 5 分，第 27 题 7 分，第 28 题 7 分，第 29 题 8 分）

17. 计算： $(\frac{1}{2})^{-2} - (\pi - \sqrt{7})^0 + |\sqrt{3} - 2| + 4\sin 60^\circ$ 。

18. 已知 $2a^2 + 3a - 6 = 0$ ，求代数式 $3a(2a + 1) - (2a + 1)(2a - 1)$ 的值。

19. 解不等式组 $\begin{cases} 4(x+1) \leq 7x+10 \\ x-5 < \frac{x-8}{3} \end{cases}$ ，并写出它的所有非负整数解。

20. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， AD 是 BC 边上的中线， $BE \perp AC$ 于点 E 。
求证： $\angle CBE = \angle BAD$ 。

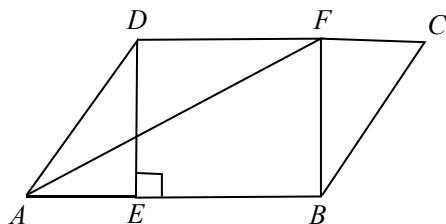


21. 为解决“最后一公里”的交通接驳问题，北京市投放了大量公租房自行车供市民使用。到 2013 年底，全市已有公租房自行车 25000 辆，租赁点 600 个，预计到 2015 年底，全市将有公租房自行车 50000 辆，并且平均每个租赁点的公租房自行车数量是 2013 年底平均每个租赁点的公租房自行车数量的 1.2 倍。预计到 2015 年底，全市将有租赁点多少个？

22. 在 $\square ABCD$ 中，过点 D 作 $DE \perp AB$ 于点 E ，点 F 在边 CD 上， $DF = BE$ ，连接 AF ， BF 。

(1) 求证：四边形 $BFDE$ 是矩形；

(2) 若 $CF = 3$ ， $BF = 4$ ， $DF = 5$ ，求证： AF 平分 $\angle DAB$ 。



23. 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $y = kx + b (k \neq 0)$ 与双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 的一个交点为

$P(2, m)$ ，与 x 轴、 y 轴分别交于点 A 、 B 。

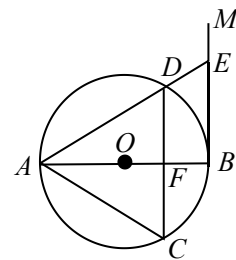
(1) 求 m 的值；

(2) 若 $PA = 2AB$ ，求 k 的值。

24. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，过点 B 作 $\odot O$ 的切线 BM ，弦 $CD \parallel BM$ ，交 AB 于点 F ，且 $DA = DC$ ，链接 AC ， AD ，延长 AD 交 BM 于点 E 。

(1) 求证： $\triangle ACD$ 是等边三角形。

(2) 链接 OE ，若 $DE = 2$ ，求 OE 的长。



25. 阅读下列材料：

2015 年清明小长假，北京市属公园开展以“清明踏青，春色满园”为主题的游园活动，虽然气温小幅走低，但游客踏青赏花的热情很高，市属公园游客接待量约为 190 万人次，其中玉渊潭公园的樱花，北京植物园的桃花受到了游客的热捧，两公园的游客接待量分别为 38 万人次、21.75 万人次；颐和园、天坛公园、北海公园因皇家园林的厚重文化底蕴与满园春色成为游客的重要目的地，游客接待量分别为 26 万人次、20 万人次、17.6 万人次；北京动物园游客接待量为 18 万人次，熊猫馆的游客密集度较高。

2014 年清明小长假，天气晴好，北京晴好，北京市属公园游客接待量约为 200 万人次，其中，玉渊潭公园游客接待量比 2013 年清明小长假增加了 25%；颐和园游客接待量为 26.2 万人次，比 2013 年清明小长假增加了 4.6 万人次；北京动物园游客接待量为 22 万人次。

2013 年清明小长假，玉渊潭公园、陶然亭公园、北京动物园游客接待量分别为 32 万人次、13 万人次、14.9 万人次。

根据以上材料回答下列问题：

(1) 2014 年清明小长假，玉渊潭公园游客接待量为_____万人次。

(2) 选择统计表或统计图，将 2013 – 2015 年玉渊潭公园、颐和园和北京动物园的游客接待量表示出来。

26. 有这样一个问题：探究函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ 的图象与性质。

小东根据学习函数的经验，对函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ 的图象与性质进行了探究。

下面是小东的探究过程，请补充完成：

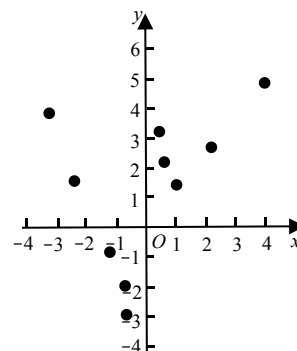
(1) 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ 的自变量 x 的取值范围是_____；

(2) 下表是 y 与 x 的几组对应值。

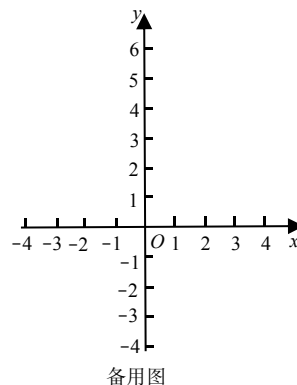
x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
y	...	$\frac{25}{6}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{53}{18}$	$\frac{55}{18}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	m	...

求 m 的值；

(3) 如下图，在平面直角坐标系 xOy 中，描出了以上表中各对对应值为坐标的点，格局描出的点，画出该函数的图象；



(4) 进一步探究发现，该函数图象在第一象限内的最低点的坐标是 $(1, \frac{3}{2})$ ，结合函数的图象，写出该函数的其他性质（一条即可）：_____。



27. 在平面直角坐标系 xOy 中, 过点 $(0,2)$ 且平行于 x 轴的直线, 与直线 $y = x - 1$ 交于点 A ,

点 A 关于直线 $x = 1$ 的对称点为 B , 抛物线 $C_1: y = x^2 + bx + c$ 经过点 A, B .

(1) 求点 A, B 的坐标;

(2) 求抛物线 C_1 的表达式及顶点坐标;

(3) 若抛物线 $C_2: y = ax^2 (a \neq 0)$ 与线段 AB 恰有一个公共点, 结合函数的图象, 求 a 的取值范围。

28. 在正方形 $ABCD$ 中, BD 是一条对角线, 点 P 在射线 CD 上 (与点 C, D 不重合), 连接 AP , 平移 $\triangle ADP$, 使点 D 移动到点 C , 得到 $\triangle BCQ$, 过点 Q 作 $QH \perp BD$ 于 H , 连接 AH, PH .

(1) 若点 P 在线段 CD 上, 如图 1.

① 依题意补全图 1;

② 判断 AH 与 PH 的数量关系与位置关系并加以证明;

(2) 若点 P 在线段 CD 的延长线上, 且 $\angle AHQ = 152^\circ$, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1, 请写出求 DP 长的思路。(可以不写出计算结果)

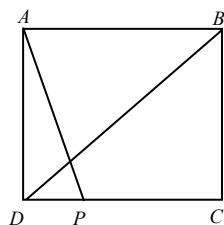
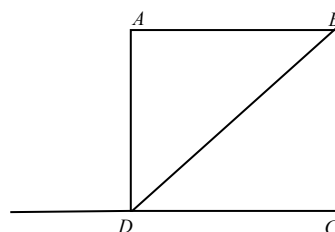
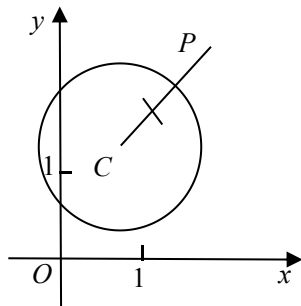


图 1



备用图

29. 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的半径为 r , P 是与圆心 C 不重合的点, 点 P 关于 $\odot C$ 的反称点的定义如下: 若在射线 CP 上存在一点 P' , 满足 $CP + CP' = 2r$, 则称 P' 为点 P 关于 $\odot C$ 的反称点, 下图为点 P 及其关于 $\odot C$ 的反称点 P' 的示意图。



(1) 当 $\odot O$ 的半径为 1 时。

① 分别判断点 $M(2,1)$, $N(\frac{3}{2}, 0)$, $T(1, \sqrt{3})$ 关于 $\odot O$ 的反称点是否存在, 若存在?

求其坐标;

② 点 P 在直线 $y = -x + 2$ 上, 若点 P 关于 $\odot O$ 的反称点 P' 存在, 且点 P' 不在 x 轴上,

求点 P 的横坐标的取值范围;

(2) 当 $\odot C$ 的圆心在 x 轴上, 半径为 1, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ 与 x 轴, y 轴分别交于点 A ,

B , 若线段 AB 上存在点 P , 使得点 P 关于 $\odot C$ 的反称点 P' 在 $\odot C$ 的内部, 求圆心 C 的横坐标的取值范围。

2015 年北京市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题 (本题共 30 分, 每小题 3 分) 下面各题均有四个选项, 其中只有一个符合题意的

1. (3 分) (2015•北京) 截止到 2015 年 6 月 1 日, 北京市已建成 34 个地下调蓄设施, 蓄水能力达到 140000 立方米, 将 140000 用科学记数法表示应为 ()

A. 14×10^4 B. 1.4×10^5 C. 1.4×10^6 D. 14×10^6

考点: 科学记数法—表示较大的数.

专题: 计算题.

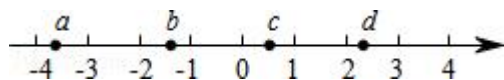
分析: 将 140000 用科学记数法表示即可.

解答: 解: $140000 = 1.4 \times 10^5$,

故选 B.

点评: 此题考查了科学记数法—表示较大的数, 较小的数, 以及近似数与有效数字, 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

2. (3分) (2015•北京) 实数 a , b , c , d 在数轴上的对应点的位置如图所示, 这四个数中, 绝对值最大的是 ()



- A. a B. b C. c D. d

考点: 实数大小比较.

分析: 首先根据数轴的特征, 以及绝对值的含义和性质, 判断出实数 a , b , c , d 的绝对值的取值范围, 然后比较大小, 判断出这四个数中, 绝对值最大的是哪个数即可.

解答: 解: 根据图示, 可得

$$3 < |a| < 4, \quad 1 < |b| < 2, \quad 0 < |c| < 1, \quad 2 < |d| < 3,$$

所以这四个数中, 绝对值最大的是 a .

故选: A.

点评: 此题主要考查了实数大小的比较方法, 以及绝对值的非负性质的应用, 要熟练掌握, 解答此题的关键是判断出实数 a , b , c , d 的绝对值的取值范围.

3. (3分) (2015•北京) 一个不透明的盒子中装有 3 个红球, 2 个黄球和 1 个绿球, 这些球除了颜色外无其他差别, 从中随机摸出一个小球, 恰好是黄球的概率为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

考点: 概率公式.

专题: 计算题.

分析: 直接根据概率公式求解.

解答: 解: 从中随机摸出一个小球, 恰好是黄球的概率 $= \frac{2}{3+2+1} = \frac{1}{3}$.

故选 B.

点评: 本题考查了概率公式: 随机事件 A 的概率 $P(A) = \frac{\text{事件 A 可能出现的结果数}}{\text{所有可能出现的结果数}}$.

4. (3分) (2015•北京) 剪纸是我国传统的民间艺术, 下列剪纸作品中, 是轴对称图形的为 ()



考点: 轴对称图形.

分析: 根据轴对称图形的概念求解.

解答: 解: A、不是轴对称图形,

B、不是轴对称图形,

C、不是轴对称图形,

考点: 直角三角形斜边上的中线.

专题: 应用题.

分析: 根据直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半, 可得 $MC=AM=1.2\text{km}$.

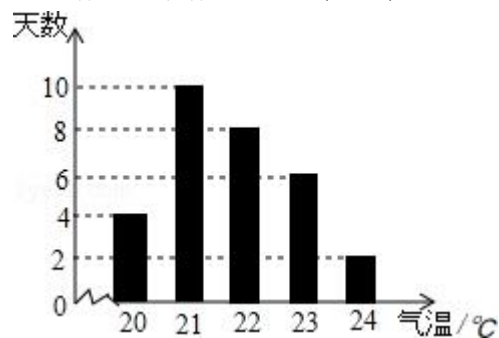
解答: 解: $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB=90^\circ$, M 为 AB 的中点,

$$\therefore MC=\frac{1}{2}AB=AM=1.2\text{km}.$$

故选 D.

点评: 本题考查了直角三角形斜边上的中线的性质: 在直角三角形中, 斜边上的中线等于斜边的一半. 理解题意, 将实际问题转化为数学问题是解题的关键.

7. (3 分) (2015•北京) 某市 6 月份日平均气温统计如图所示, 则在日平均气温这组数据中, 众数和中位数分别是 ()



- A. 21, 21 B. 21, 21.5 C. 21, 22 D. 22, 22

考点: 众数; 条形统计图; 中位数.

专题: 数形结合.

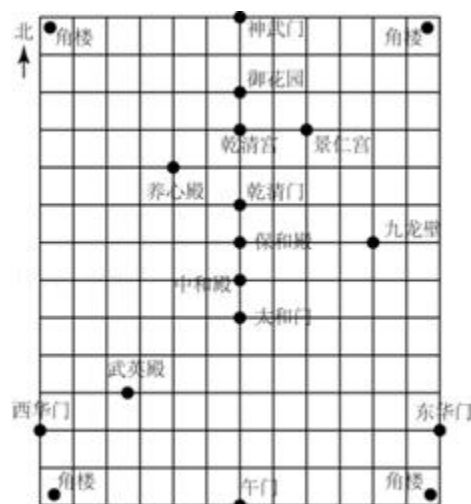
分析: 根据条形统计图得到各数据的权, 然后根据众数和中位数的定义求解.

解答: 解: 这组数据中, 21 出现了 10 次, 出现次数最多, 所以众数为 21, 第 15 个数和第 16 个数都是 22, 所以中位数是 22.

故选 C.

点评: 本题考查了众数的定义: 一组数据中出现次数最多的数据叫做众数. 也考查了条形统计图和中位数.

8. (3 分) (2015•北京) 如图是利用平面直角坐标系画出的故宫博物院的主要建筑分布图, 若这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、 y 轴的正方向, 表示太和门的点的坐标为 $(0, -1)$, 表示九龙壁的点的坐标为 $(4, 1)$, 则表示下列宫殿的点的坐标正确的是 ()

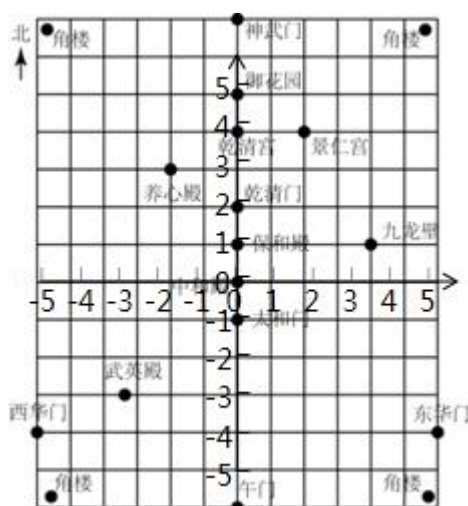


- A. 景仁宫 (4, 2) B. 养心殿 (-2, 3)
- C. 保和殿 (1, 0) D. 武英殿 (-3.5, -4)

考点: 坐标确定位置.

分析: 根据平面直角坐标系, 找出相应的位置, 然后写出坐标即可.

解答: 解: 根据表示太和门的点的坐标为 (0, -1), 表示九龙壁的点的坐标为 (4, 1),



可得: 原点是中和殿,

所以可得景仁宫 (2, 4), 养心殿 (-2, 3), 保和殿 (0, 1), 武英殿 (-3.5, -3),
故选 B

点评: 此题考查坐标确定位置, 本题解题的关键就是确定坐标原点和 x, y 轴的位置及方向.

9. (3 分) (2015•北京) 一家游泳馆的游泳收费标准为 30 元/次, 若购买会员年卡, 可享受如下优惠:

会员年卡类型	办卡费用 (元)	每次游泳收费 (元)
A 类	50	25
B 类	200	20
C 类	400	15

例如, 购买 A 类会员年卡, 一年内游泳 20 次, 消费 $50+25\times 20=550$ 元, 若一年内在该游泳馆游泳的次数介于 45~55 次之间, 则最省钱的方式为 ()

- A. 购买 A 类会员年卡
C. 购买 C 类会员年卡

- B. 购买 B 类会员年卡
D. 不购买会员年卡

考点：一次函数的应用.

分析：设一年内在该游泳馆游泳的次数为 x 次，消费的钱数为 y 元，根据题意得： $y_A=50+25x$ ， $y_B=200+20x$ ， $y_C=400+15x$ ，当 $45 \leq x \leq 50$ 时，确定 y 的范围，进行比较即可解答.

解答：解：设一年内在该游泳馆游泳的次数为 x 次，消费的钱数为 y 元，
根据题意得：

$$y_A=50+25x,$$

$$y_B=200+20x,$$

$$y_C=400+15x,$$

当 $45 \leq x \leq 50$ 时，

$$1175 \leq y_A \leq 1300;$$

$$1100 \leq y_B \leq 1200;$$

$$1075 \leq y_C \leq 1150;$$

由此可见，C 类会员年卡消费最低，所以最省钱的方式为购买 C 类会员年卡.

故选：C.

点评：本题考查了一次函数的应用，解决本题的关键是根据题意，列出函数关系式，并确定函数值的范围.

10. (3 分) (2015•北京) 一个寻宝游戏的寻宝通道如图 1 所示，通道由在同一平面内的 AB，BC，CA，OA，OB，OC 组成. 为记录寻宝者的行进路线，在 BC 的中点 M 处放置了一台定位仪器. 设寻宝者行进的时间为 x ，寻宝者与定位仪器之间的距离为 y ，若寻宝者匀速行进，且表示 y 与 x 的函数关系的图象大致如图 2 所示，则寻宝者的行进路线可能为 ()

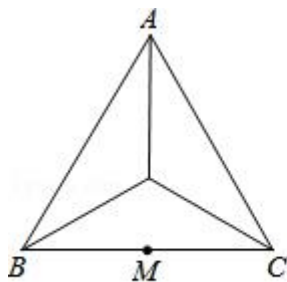


图 1

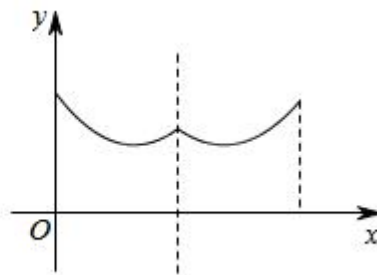


图 2

- A. $A \rightarrow O \rightarrow B$ B. $B \rightarrow A \rightarrow C$ C. $B \rightarrow O \rightarrow C$ D. $C \rightarrow B \rightarrow O$

考点：动点问题的函数图象.

分析：根据函数的增减性：不同的观察点获得的函数图象的增减性不同，可得答案.

解答：解：A、从 A 点到 O 点 y 随 x 增大一直减小到 0，故 A 不符合题意；

B、从 B 到 A 点 y 随 x 的增大先减小再增大，从 A 到 C 点 y 随 x 的增大先减小再增大，但在 A 点距离最大，故 B 不符合题意；

C、从 B 到 O 点 y 随 x 的增大先减小再增大，从 O 到 C 点 y 随 x 的增大先减小再增大，在 B、C 点距离最大，故 C 符合题意；

D、从 C 到 M 点 y 随 x 的增大而减小，一直到 y 为 0，从 M 点到 B 点 y 随 x 的增大而增大，明显与图象不符，故 D 不符合题意；

故选：C.

点评：本题考查了动点问题的函数图象，利用观察点与动点P之间距离的变化关系得出函数的增减性是解题关键.

二、填空题（本题共18分，每小题3分）

11. (3分) (2015•北京) 分解因式： $5x^3 - 10x^2 + 5x = \underline{5x(x-1)^2}$.

考点：提公因式法与公式法的综合运用.

分析：先提取公因式 $5x$ ，再根据完全平方公式进行二次分解.

解答：解： $5x^3 - 10x^2 + 5x$

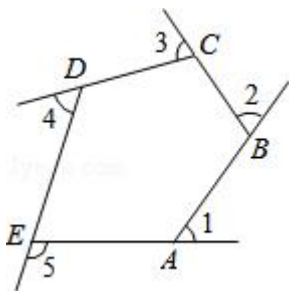
$$= 5x(x^2 - 2x + 1)$$

$$= 5x(x-1)^2.$$

故答案为： $5x(x-1)^2$.

点评：本题考查了提公因式法，公式法分解因式，提取公因式后利用完全平方公式进行二次分解，注意分解要彻底.

12. (3分) (2015•北京) 如图是由射线AB, BC, CD, DE, EA组成的平面图形，则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = \underline{360^\circ}$.



考点：多边形内角与外角.

分析：首先根据图示，可得 $\angle 1 = 180^\circ - \angle BAE$ ， $\angle 2 = 180^\circ - \angle ABC$ ， $\angle 3 = 180^\circ - \angle BCD$ ， $\angle 4 = 180^\circ - \angle CDE$ ， $\angle 5 = 180^\circ - \angle DEA$ ，然后根据三角形的内角和定理，求出五边形ABCDE的内角和是多少，再用 $180^\circ \times 5$ 减去五边形ABCDE的内角和，求出 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$ 等于多少即可.

解答：解： $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5$

$$= (180^\circ - \angle BAE) + (180^\circ - \angle ABC) + (180^\circ - \angle BCD) + (180^\circ - \angle CDE) + (180^\circ - \angle DEA)$$

$$= 180^\circ \times 5 - (\angle BAE + \angle ABC + \angle BCD + \angle CDE + \angle DEA)$$

$$= 900^\circ - (5 - 2) \times 180^\circ$$

$$= 900^\circ - 540^\circ$$

$$= 360^\circ.$$

故答案为： 360° .

点评：此题主要考查了多边形内角和定理，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：(1) n边形的内角和 $= (n-2) \cdot 180^\circ$ ($n \geq 3$) 且n为整数). (2) 多边形的外角和指每个顶点处取一个外角，则n边形取n个外角，无论边数是几，其外角和永远为 360° .

13. (3 分) (2015•北京)《九章算术》是中国传统数学最重要的著作，奠定了中国传统数学的基本框架. 它的代数成就主要包括开方术、正负术和方程术. 其中，方程术是《九章算术》最高的数学成就.

《九章算术》中记载：“今有牛五、羊二，直金十两；牛二、羊五，直金八两. 问：牛、羊各直金几何？”

译文：“假设有 5 头牛、2 只羊，值金 10 两；2 头牛、5 只羊，值金 8 两. 问：每头牛、每只羊各值金多少两？”

设每头牛值金 x 两，每只羊值金 y 两，可列方程组为 $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$.



考点：由实际问题抽象出二元一次方程组.

分析：根据“假设有 5 头牛、2 只羊，值金 10 两；2 头牛、5 只羊，值金 8 两”，得到等量关系，即可列出方程组.

解答：解：根据题意得： $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$ ，
故答案为： $\begin{cases} 5x+2y=10 \\ 2x+5y=8 \end{cases}$.

点评：本题考查了由实际问题抽象出二元一次方程组，解决本题的关键是找到题目中所存在的等量关系.

14. (3 分) (2015•北京) 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+\frac{1}{4}=0$ 有两个相等的实数根，写出一组满足条件的实数 a ， b 的值： $a=4$ ， $b=2$.

考点：根的判别式.

专题：开放型.

分析：由于关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+\frac{1}{4}=0$ 有两个相等的实数根，得到 $a=b^2$ ，找一组满足条件的数据即可.

解答：关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+\frac{1}{4}=0$ 有两个相等的实数根，

$$\therefore \Delta = b^2 - 4 \times \frac{1}{4} a = b^2 - a = 0,$$

$$\therefore a = b^2,$$

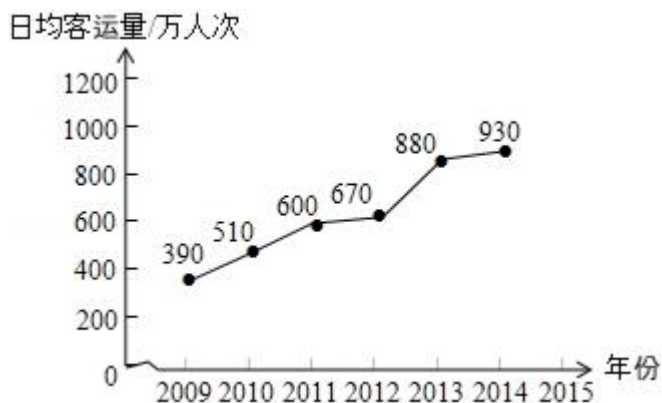
当 $b=2$ 时， $a=4$ ，

故 $b=2$ ， $a=4$ 时满足条件.

故答案为：4，2.

点评：本题主要考查了一元二次方程根的判别式，熟练掌握判别式的意义是解题的关键.

15. (3 分) (2015•北京) 北京市 2009 – 2014 年轨道交通日均客运量统计如图所示. 根据统计图中提供的信息, 预估 2015 年北京市轨道交通日均客运量约 980 万人次, 你的预估理由是 根据 2009 – 2011 年呈直线上升, 故 2013 – 2015 年也呈直线上升.



考点：用样本估计总体；折线统计图.

分析：根据统计图进行用样本估计总体来预估即可.

解答：解：预估 2015 年北京市轨道交通日均客运量约 980 万人次, 根据 2009 – 2011 年呈直线上升, 故 2013 – 2015 年也呈直线上升,

故答案为：980; 根据 2009 – 2011 年呈直线上升, 故 2013 – 2015 年也呈直线上升.

点评：此题考查用样本估计总体, 关键是根据统计图分析其上升规律.

16. (3 分) (2015•北京) 阅读下面材料:

在数学课上, 老师提出如下问题:

尺规作图: 作一条线段的垂直平分线.

已知: 线段 AB .

A B

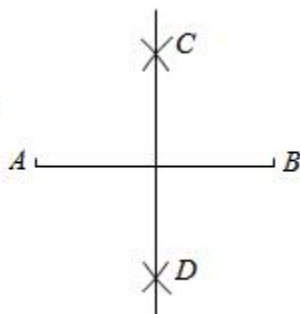
小芸的作法如下:

如图,

(1) 分别以点 A 和点 B 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}AB$ 的长为半径

作弧, 两弧相交于 C, D 两点;

(2) 作直线 CD .



老师说: “小芸的作法正确.”

请回答: 小芸的作图依据是 到线段两个端点距离相等的点在线段的垂直平分线上.

考点：作图—基本作图.

专题：作图题.

分析：通过作图得到 $CA=CB$, $DA=DB$, 则可根据线段垂直平分线定理的逆定理判断 CD 为线段 AB 的垂直平分线.

解答：解： $\because CA=CB$, $DA=DB$,
 $\therefore CD$ 垂直平分 AB (到线段两个端点距离相等的点在线段的垂直平分线上)
故答案为：到线段两个端点距离相等的点在线段的垂直平分线上.

点评：本题考查了基本作图：基本作图有：作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的角平分线；过一点作已知直线的垂线.

三、解答题 (本题共 72 分, 第 17–26 题, 每小题 5 分, 第 27 题 7 分, 第 28 题 7 分, 第 29 题 8 分) 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

17. (5 分) (2015•北京) 计算: $(\frac{1}{2})^{-2} - (\pi - \sqrt{7})^0 + |\sqrt{3} - 2| + 4\sin 60^\circ$.

考点：实数的运算；零指数幂；负整数指数幂；特殊角的三角函数值.

分析：原式第一项利用负整数指数幂法则计算，第二项利用零指数幂法则计算，第三项利用绝对值的代数意义化简，最后一项利用特殊角的三角函数值计算即可得到结果.

解答：解：原式 $= 4 - 1 + 2 - \sqrt{3} + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 + \sqrt{3}$.

点评：此题考查了实数的运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

18. (5 分) (2015•北京) 已知 $2a^2 + 3a - 6 = 0$. 求代数式 $3a(2a+1) - (2a+1)(2a-1)$ 的值.

考点：整式的混合运算—化简求值.

专题：计算题.

分析：原式第一项利用单项式乘以多项式法则计算，第二项利用平方差公式化简，去括号合并得到最简结果，把已知等式变形后代入计算即可求出值.

解答：解： $\because 2a^2 + 3a - 6 = 0$, 即 $2a^2 + 3a = 6$,
 $\therefore$ 原式 $= 6a^2 + 3a - 4a^2 + 1 = 2a^2 + 3a + 1 = 6 + 1 = 7$.

点评：此题考查了整式的混合运算—化简求值，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

19. (5 分) (2015•北京) 解不等式组 $\begin{cases} 4(x+1) \leq 7x+10 \\ x-5 < \frac{x-8}{3} \end{cases}$, 并写出它的所有非负整数解.

考点：解一元一次不等式组；一元一次不等式组的整数解.

专题：计算题.

分析：分别求出不等式组中两不等式的解集，找出解集的公共部分确定出不等式组的解集，即可确定出所有非负整数解.

解答：解： $\begin{cases} 4(x+1) \leq 7x+10 \text{ ①} \\ x-5 < \frac{x-8}{3} \text{ ②} \end{cases}$,
由①得： $x \geq -2$;

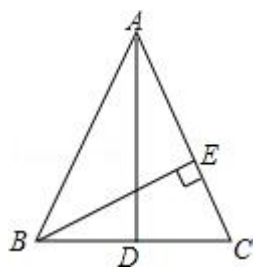
由②得: $x < \frac{7}{2}$,

$\therefore$ 不等式组的解集为 $-2 \leq x < \frac{7}{2}$.

则不等式组的所有非负整数解为: 0, 1, 2, 3.

点评: 此题考查了解一元一次不等式组, 以及一元一次不等式组的整数解, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (5分) (2015•北京) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 是 BC 边上的中线, $BE \perp AC$ 于点 E . 求证: $\angle CBE = \angle BAD$.



考点: 等腰三角形的性质.

专题: 证明题.

分析: 根据三角形三线合一的性质可得 $\angle CAD = \angle BAD$, 根据同角的余角相等可得:
 $\angle CBE = \angle CAD$, 再根据等量关系得到 $\angle CBE = \angle BAD$.

解答: 证明: $\because AB=AC$, AD 是 BC 边上的中线, $BE \perp AC$,
 $\therefore \angle CBE + \angle C = \angle CAD + \angle C = 90^\circ$, $\angle CAD = \angle BAD$,
 $\therefore \angle CBE = \angle BAD$.

点评: 考查了余角的性质, 等腰三角形的性质: 等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合.

21. (5分) (2015•北京) 为解决“最后一公里”的交通接驳问题, 北京市投放了大量公共自行车供市民使用. 到2013年底, 全市已有公共自行车25 000辆, 租赁点600个. 预计到2015年底, 全市将有公共自行车50 000辆, 并且平均每个租赁点的公共自行车数量是2013年底平均每个租赁点的公共自行车数量的1.2倍. 预计到2015年底, 全市将有租赁点多少个?

考点: 分式方程的应用.

分析: 根据租赁点的公共自行车数量变化表示出2013年和2015年平均每个租赁点的公共自行车数量, 进而得出等式求出即可.

解答: 解: 设到2015年底, 全市将有租赁点 x 个, 根据题意可得:

$$\frac{25000}{600} \times 1.2 = \frac{50000}{x},$$

解得: $x=1000$,

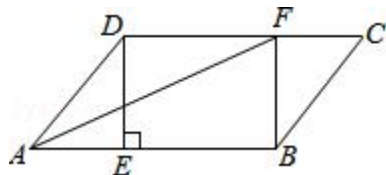
经检验得: $x=1000$ 是原方程的根,

答: 到2015年底, 全市将有租赁点1000个.

点评: 此题主要考查了分式的方程的应用, 根据题意得出正确等量关系是解题关键.

22. (5分) (2015•北京) 在 $\square ABCD$ 中, 过点D作 $DE \perp AB$ 于点E, 点F在边CD上, $DF=BE$, 连接AF, BF.

- (1) 求证: 四边形BFDE是矩形;
- (2) 若 $CF=3$, $BF=4$, $DF=5$, 求证: AF平分 $\angle DAB$.



考点: 平行四边形的性质; 角平分线的性质; 勾股定理的逆定理; 矩形的判定.

专题: 证明题.

分析: (1) 根据平行四边形的性质, 可得AB与CD的关系, 根据平行四边形的判定, 可得BFDE是平行四边形, 再根据矩形的判定, 可得答案;
 (2) 根据平行线的性质, 可得 $\angle DFA = \angle FAB$, 根据等腰三角形的判定与性质, 可得 $\angle DAF = \angle DFA$, 根据角平分线的判定, 可得答案.

解答: (1) 证明: $\because$ 四边形ABCD是平行四边形,

$\therefore AB \parallel CD$.

$\because BE \parallel DF$, $BE=DF$,

$\therefore$ 四边形BFDE是平行四边形.

$\because DE \perp AB$,

$\therefore \angle DEB = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形BFDE是矩形;

(2) 解: $\because$ 四边形ABCD是平行四边形,

$\therefore AB \parallel DC$,

$\therefore \angle DFA = \angle FAB$.

在 $Rt\triangle BCF$ 中, 由勾股定理, 得

$$BC = \sqrt{FC^2 + FB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$

$\therefore AD = BC = DF = 5$,

$\therefore \angle DAF = \angle DFA$,

$\therefore \angle DAF = \angle FAB$,

即AF平分 $\angle DAB$.

点评: 本题考查了平行四边形的性质, 利用了平行四边形的性质, 矩形的判定, 等腰三角形的判定与性质, 利用等腰三角形的判定与性质得出 $\angle DAF = \angle DFA$ 是解题关键.

23. (5分) (2015•北京) 在平面直角坐标系xOy中, 直线 $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 与双曲线 $y = \frac{8}{x}$ 的一个交点为P(2, m), 与x轴、y轴分别交于点A, B.

- (1) 求m的值;
- (2) 若 $PA=2AB$, 求k的值.

考点: 反比例函数与一次函数的交点问题.

分析: (1) 将点 P 的坐标代入反比例函数的解析式即可求得 m 的值;

(2) 作 $PC \perp x$ 轴于点 C, 设点 A 的坐标为 $(a, 0)$, 则 $AO = -a$, $AC = 2 - a$, 根据 $PA = 2AB$ 得到 $AB: AP = AO: AC = 1: 2$, 求得 a 值后代入求得 k 值即可.

解答: 解: $\because y = \frac{8}{x}$ 经过 $P(2, m)$,

$$\therefore 2m = 8,$$

解得: $m = 4$;

(2) 点 $P(2, 4)$ 在 $y = kx + b$ 上,

$$\therefore 4 = 2k + b,$$

$$\therefore b = 4 - 2k,$$

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 与 x 轴、y 轴分别交于点 A, B,

$$\therefore A\left(2 - \frac{4}{k}, 0\right), B(0, 4 - 2k),$$

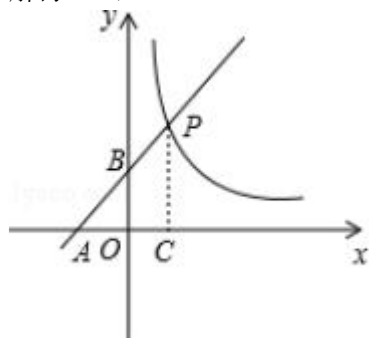
如图,

$$\because PA = 2AB,$$

$$\therefore AB = PB, \text{ 则 } OA = OC,$$

$$\therefore \frac{4}{k} - 2 = 2,$$

解得 $k = 1$;



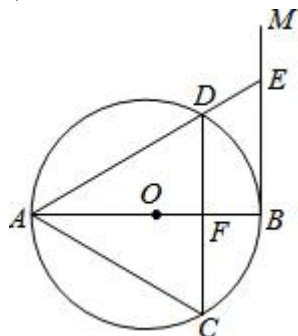
点评: 本题考查了反比例函数与一次函数的交点问题, 解题的关键是表示出 A 的坐标, 然后利用线段之间的倍数关系确定 k 的值, 难度不大.

24. (5 分) (2015•北京) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 过点 B 作 $\odot O$ 的切线 BM, 弦 $CD \parallel BM$,

交 AB 于点 F, 且 $\widehat{DA} = \widehat{DC}$, 连接 AC, AD, 延长 AD 交 BM 于点 E.

(1) 求证: $\triangle ACD$ 是等边三角形;

(2) 连接 OE, 若 $DE = 2$, 求 OE 的长.



考点: 切线的性质; 等边三角形的判定与性质.

分析: (1) 由 AB 是 $\odot O$ 的直径, BM 是 $\odot O$ 的切线, 得到 $AB \perp BE$, 由于 $CD \parallel BE$, 得到

$CD \perp AB$, 根据垂径定理得到 $\widehat{AD} = \widehat{AC}$, 于是得到 $\widehat{AD} = \widehat{AC} = \widehat{CD}$, 问题即可得证;

(2) 连接 OE, 过 O 作 $ON \perp AD$ 于 N, 由 (1) 知, $\triangle ACD$ 是等边三角形, 得到 $\angle DAC = 60^\circ$

又直角三角形的性质得到 $BE = \frac{1}{2}AE$, $ON = \frac{1}{2}AO$, 设 $\odot O$ 的半径为: r 则 $ON = \frac{1}{2}r$,

$AN = DN = \frac{\sqrt{3}}{2}r$, 由于得到 $EN = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $BE = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{3}r+2}{2}$, 在 $Rt\triangle DEF$ 与 $Rt\triangle BEO$

中, 由勾股定理列方程即可得到结论.

解答: (1) 证明: $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, BM 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore AB \perp BE$,

$\because CD \parallel BE$,

$\therefore CD \perp AB$,

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AC}$,

$\therefore \widehat{DA} = \widehat{DC}$,

$\therefore \widehat{AD} = \widehat{AC} = \widehat{CD}$,

$\therefore AD = AC = CD$,

$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形;

(2) 解: 连接 OE, 过 O 作 $ON \perp AD$ 于 N, 由 (1) 知, $\triangle ACD$ 是等边三角形,

$\therefore \angle DAC = 60^\circ$

$\because AD = AC$, $CD \perp AB$,

$\therefore \angle DAB = 30^\circ$,

$\therefore BE = \frac{1}{2}AE$, $ON = \frac{1}{2}AO$,

设 $\odot O$ 的半径为: r,

$\therefore ON = \frac{1}{2}r$, $AN = DN = \frac{\sqrt{3}}{2}r$,

$\therefore EN = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r$, $BE = \frac{1}{2}AE = \frac{\sqrt{3}r+2}{2}$,

在 $Rt\triangle DEF$ 与 $Rt\triangle BEO$ 中,

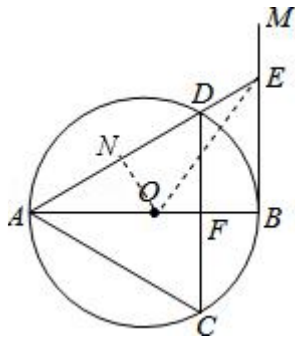
$OE^2 = ON^2 + NE^2 = OB^2 + BE^2$,

即 $\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{\sqrt{3}r+2}{2}\right)^2$,

$\therefore r = 2\sqrt{3}$,

$\therefore OE^2 = (\sqrt{3})^2 + 25 = 28$,

$\therefore OE = 2\sqrt{7}$.



点评: 本题考查了切线的性质, 垂径定理, 等边三角形的判定, 直角三角形的性质, 勾股定理, 过 O 作 $ON \perp AD$ 于 N, 构造直角三角形是解题的关键.

25. (5 分) (2015•北京) 阅读下列材料:

2015 年清明小长假, 北京市属公园开展以“清明踏青, 春色满园”为主题的游园活动, 虽然气温小幅走低, 但游客踏青赏花的热情很高, 市属公园游客接待量约为 190 万人次. 其中, 玉渊潭公园的樱花、北京植物园的桃花受到了游客的热捧, 两公园的游客接待量分别为 38 万人次、21.75 万人次; 颐和园、天坛公园、北海公园因皇家园林的厚重文化底蕴与满园春色成为游客的重要目的地, 游客接待量分别为 26 万人次、20 万人次、17.6 万人次; 北京动物园游客接待量为 18 万人次, 熊猫馆的游客密集度较高.

2014 年清明小长假, 天气晴好, 北京市属公园游客接待量约为 200 万人次, 其中, 玉渊潭公园游客接待量比 2013 年清明小长假增长了 25%; 颐和园游客接待量为 26.2 万人次, 2013 年清明小长假增加了 4.6 万人次; 北京动物园游客接待量为 22 万人次.

2013 年清明小长假, 玉渊潭公园、陶然亭公园、北京动物园游客接待量分别为 32 万人次、13 万人次、14.9 万人次.

根据以上材料解答下列问题:

- (1) 2014 年清明小长假, 玉渊潭公园游客接待量为 40 万人次;
- (2) 选择统计表或统计图, 将 2013 - 2015 年清明小长假玉渊潭公园、颐和园和北京动物园的游客接待量表示出来.

考点: 条形统计图; 统计表.

分析: (1) 2013 年的人数乘以 $(1+25\%)$ 即可求解;

(2) 求出 2014 年颐和园的游客接待量, 然后利用统计表即可表示.

解答: 解: (1) 2014 年, 玉渊潭公园的游客接待量是: $32 \times (1+25\%) = 40$ (万人).

故答案是: 40;

(2) 2013 年颐和园的游客接待量是: $26.4 - 4.6 = 21.8$ (万元).

	玉渊潭公园	颐和园	北京动物园
2013 年	32	21.8	14.9
2014 年	40	26.2	22
2015 年	38	26	18

点评: 本题考查了数据的分析与整理, 正确读懂题意, 从所列的数据中整理出 2013 - 2015 年三年中, 三个公园的游客数是关键.

26. (5 分) (2015•北京) 有这样一个问题: 探究函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ 的图象与性质.

小东根据学习函数的经验，对函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ 的图象与性质进行了探究.

下面是小东的探究过程，请补充完整：

(1) 函数 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$ 的自变量 x 的取值范围是 $x \neq 0$ ；

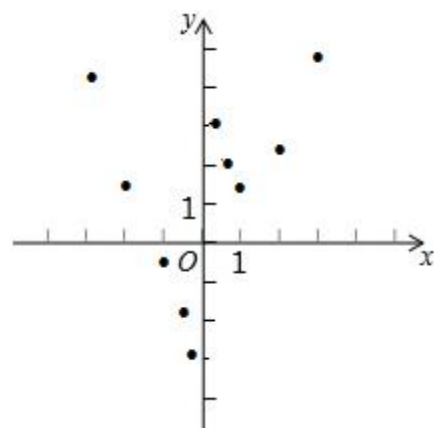
(2) 下表是 y 与 x 的几组对应值.

x	...	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3	...
y	...	$\frac{25}{6}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{53}{18}$	$\frac{55}{18}$	$\frac{17}{8}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	m	...

求 m 的值；

(3) 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，描出了以上表中各对对应值为坐标的点，根据描出的点，画出该函数的图象；

(4) 进一步探究发现，该函数图象在第一象限内的最低点的坐标是 $(1, \frac{3}{2})$ ，结合函数的图象，写出该函数的其它性质（一条即可）该函数没有最大值。



考点：二次函数的图象；反比例函数的图象；反比例函数的性质；二次函数的性质.

分析： (1) 由图表可知 $x \neq 0$ ；

(2) 根据图表可知当 $x=3$ 时的函数值为 m ，把 $x=3$ 代入解析式即可求得；

(3) 根据坐标系中的点，用平滑的直线连接即可；

(4) 观察图象即可得出该函数的其他性质.

解答： 解： (1) $x \neq 0$ ，

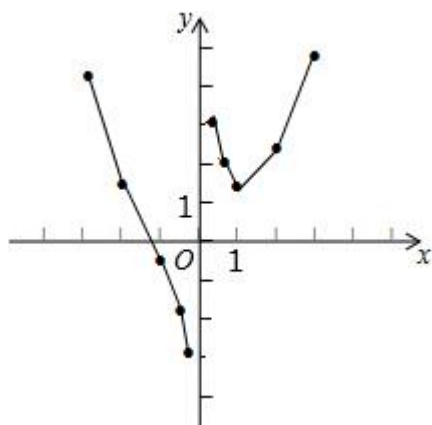
(2) 令 $x=3$ ，

$$\therefore y = \frac{1}{2} \times 3^2 + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{3} = \frac{29}{6};$$

$$\therefore m = \frac{29}{6};$$

(3) 如图



(4) 该函数的其它性质:

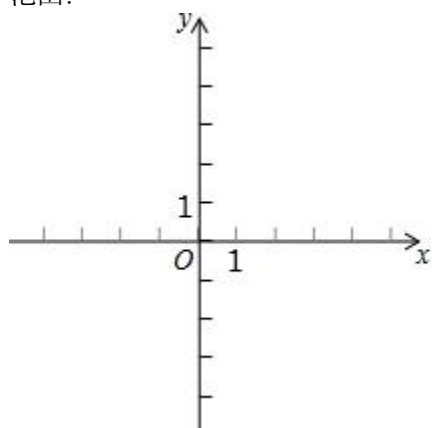
- ①该函数没有最大值;
- ②该函数在 $x=0$ 处断开;
- ③该函数没有最小值;
- ④该函数图象没有经过第四象限.

故答案为该函数没有最大值.

点评: 本题考查了二次函数的图象和性质, 反比例函数的图象和性质, 根据图表画出函数的图象是解题的关键.

27. (7分) (2015•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中, 过点 $(0, 2)$ 且平行于 x 轴的直线, 与直线 $y=x-1$ 交于点 A , 点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点为 B , 抛物线 $C_1: y=x^2+bx+c$ 经过点 A, B .

- (1) 求点 A, B 的坐标;
- (2) 求抛物线 C_1 的表达式及顶点坐标;
- (3) 若抛物线 $C_2: y=ax^2$ ($a \neq 0$) 与线段 AB 恰有一个公共点, 结合函数的图象, 求 a 的取值范围.



考点: 二次函数的性质; 待定系数法求二次函数解析式.

分析: (1) 当 $y=2$ 时, 则 $2=x-1$, 解得 $x=3$, 确定 $A(3, 2)$, 根据 AB 关于 $x=1$ 对称, 所以 $B(-1, 2)$.

(2) 把 $(3, 2), (-1, 2)$ 代入抛物线 $C_1: y=x^2+bx+c$ 得
$$\begin{cases} 2=9+3b+c \\ 2=1-b+c \end{cases}$$
, 求出 b, c 的值, 即可解答;

(3) 画出函数图象, 把 A, B 代入 $y=ax^2$, 求出 a 的值, 即可解答.

解答: 解: (1) 当 $y=2$ 时, 则 $2=x-1$,

解得: $x=3$,

$\therefore A(3, 2)$,

$\because$ 点 A 关于直线 $x=1$ 的对称点为 B,

$\therefore B(-1, 2)$.

(2) 把 $(3, 2)$, $(-1, 2)$ 代入抛物线 $C_1: y=x^2+bx+c$ 得:

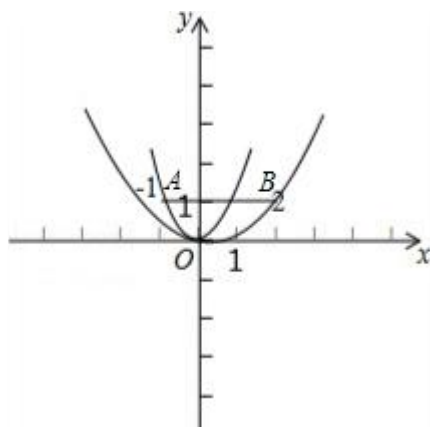
$$\begin{cases} 2=9+3b+c \\ 2=1-b+c \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} b=-2 \\ c=-1 \end{cases}$$

$$\therefore y=x^2-2x-1.$$

顶点坐标为 $(1, -2)$.

(3) 如图, 当 C_2 过 A 点, B 点时为临界,



代入 A $(3, 2)$ 则 $9a=2$,

$$\text{解得: } a=\frac{2}{9},$$

代入 B $(-1, 2)$, 则 $a(-1)^2=2$,

$$\text{解得: } a=2,$$

$$\therefore \frac{2}{9} \leq a < 2$$

点评: 本题考查了二次函数的性质, 解集本题的关键是求出二次函数的解析式, 并结合图形解决问题.

28. (7 分) (2015•北京) 在正方形 ABCD 中, BD 是一条对角线, 点 P 在射线 CD 上 (与点 C、D 不重合), 连接 AP, 平移 $\triangle ADP$, 使点 D 移动到点 C, 得到 $\triangle BCQ$, 过点 Q 作 $QH \perp BD$ 于 H, 连接 AH, PH.

(1) 若点 P 在线段 CD 上, 如图 1.

①依题意补全图 1;

②判断 AH 与 PH 的数量关系与位置关系并加以证明;

(2) 若点 P 在线段 CD 的延长线上, 且 $\angle AHQ=152^\circ$, 正方形 ABCD 的边长为 1, 请写出求 DP 长的思路. (可以不写出计算结果)

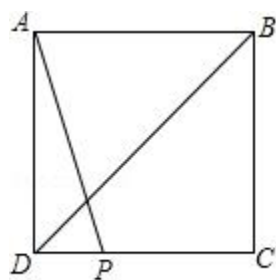
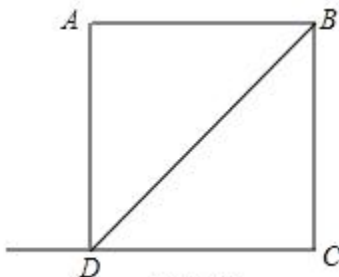


图1



备用图

考点: 四边形综合题.

分析: (1) ①根据题意画出图形即可;

②连接 CH, 先根据正方形的性质得出 $\triangle DHQ$ 是等腰直角三角形, 再由 SSS 定理得出 $\triangle HDP \cong \triangle HQC$, 故 $PH=CH$, $\angle HPC=\angle HCP$, 由正方形的性质即可得出结论;

(2) 根据四边形 ABCD 是正方形, $QH \perp BD$ 可知 $\triangle DHQ$ 是等腰直角三角形, 再由平移的性质得出 $PD=CQ$. 作 $HR \perp PC$ 于点 R, 由 $\angle AHQ=152^\circ$, 可得出 $\angle AHB$ 及 $\angle DAH$ 的度数, 设 $DP=x$, 则 $DR=HR=RQ$, 由锐角三角函数的定义即可得出结论.

解答: 解: (1) ①如图 1;

②如图 1, 连接 CH,

$\because$ 四边形 ABCD 是正方形, $QH \perp BD$,

$\therefore \angle HDQ=45^\circ$,

$\therefore \triangle DHQ$ 是等腰直角三角形.

$\therefore DP=CQ$,

在 $\triangle HDP$ 与 $\triangle HQC$ 中,

$$\therefore \begin{cases} DH=QH \\ PH=CH, \\ DP=QC \end{cases}$$

$\therefore \triangle HDP \cong \triangle HQC$ (SSS),

$\therefore PH=CH$, $\angle HPC=\angle HCP$.

$\because$ BD 是正方形 ABCD 的对称轴,

$\therefore AH=CH$, $\angle DAH=\angle HCP$,

$\therefore \angle AHP=180^\circ - \angle ADP=90^\circ$,

$\therefore AH=PH$, $AH \perp PH$.

(2) 如图 2,

$\because$ 四边形 ABCD 是正方形, $QH \perp BD$,

$\therefore \angle HDQ=45^\circ$,

$\therefore \triangle DHQ$ 是等腰直角三角形.

$\because \triangle BCQ$ 由 $\triangle ADP$ 平移而成,

$\therefore PD=CQ$.

作 $HR \perp PC$ 于点 R,

$\because \angle AHQ=152^\circ$,

$\therefore \angle AHB=62^\circ$,

$\therefore \angle DAH=17^\circ$.

设 $DP=x$, 则 $DR=HR=RQ=\frac{1-x}{2}$.

$$\therefore \tan 17^\circ = \frac{HR}{CR}, \text{ 即 } \tan 17^\circ = \frac{\frac{1-x}{2}}{\frac{1+x}{2}},$$

$$\therefore x = \frac{1 - \tan 17^\circ}{1 + \tan 17^\circ}.$$

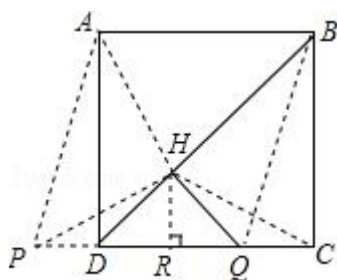


图2

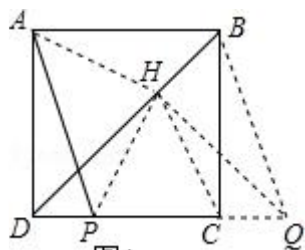


图1

点评: 本题考查的是四边形综合题, 涉及到正方形的性质、图形平移的性质、全等三角形的判定与性质等知识, 难度适中.

29. (8分) (2015•北京) 在平面直角坐标系 xOy 中, $\odot C$ 的半径为 r , P 是与圆心 C 不重合的点, 点 P 关于 $\odot C$ 的反称点的定义如下: 若在射线 CP 上存在一点 P' , 满足 $CP+CP'=2r$, 则称 P' 为点 P 关于 $\odot C$ 的反称点, 如图为点 P 及其关于 $\odot C$ 的反称点 P' 的示意图.

特别地, 当点 P' 与圆心 C 重合时, 规定 $CP'=0$.

(1) 当 $\odot O$ 的半径为 1 时.

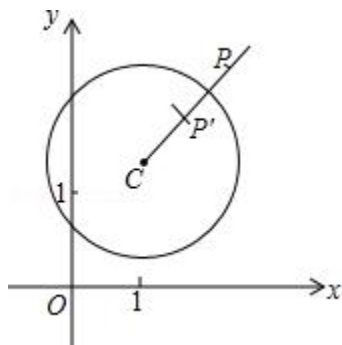
① 分别判断点 $M(2, 1)$, $N(-\frac{3}{2}, 0)$, $T(1, \sqrt{3})$ 关于 $\odot O$ 的反称点是否存在? 若存在,

求其坐标;

② 点 P 在直线 $y = -x + 2$ 上, 若点 P 关于 $\odot O$ 的反称点 P' 存在, 且点 P' 不在 x 轴上, 求点 P 的横坐标的取值范围;

(2) $\odot C$ 的圆心在 x 轴上, 半径为 1, 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A , B ,

若线段 AB 上存在点 P , 使得点 P 关于 $\odot C$ 的反称点 P' 在 $\odot C$ 的内部, 求圆心 C 的横坐标的取值范围.



考点: 圆的综合题.

分析: (1) ①根据反称点的定义, 可得当 $\odot O$ 的半径为1时, 点 $M(2, 1)$ 关于 $\odot O$ 的反称点不存在; $N(\frac{3}{2}, 0)$ 关于 $\odot O$ 的反称点存在, 反称点 $N'(\frac{1}{2}, 0)$; $T(1, \sqrt{3})$

关于 $\odot O$ 的反称点存在, 反称点 $T'(0, 0)$;

②由 $OP \leq 2r = 2$, 得出 $OP^2 \leq 4$, 设 $P(x, -x+2)$, 由勾股定理得出 $OP^2 = x^2 + (-x+2)^2 = 2x^2 - 4x + 4 \leq 4$, 解不等式得出 $0 \leq x \leq 2$. 再分别将 $x=2$ 与 0 代入检验即可;

(2) 先由 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$, 求出 $A(6, 0)$, $B(0, 2\sqrt{3})$, 则 $\frac{OA}{OB} = \sqrt{3}$, $\angle OBA = 60^\circ$, $\angle OAB = 30^\circ$. 再设 $C(x, 0)$, 分两种情况进行讨论: ① C 在 OA 上; ② C 在 A 点右侧.

解答: 解: (1) 当 $\odot O$ 的半径为1时.

①点 $M(2, 1)$ 关于 $\odot O$ 的反称点不存在;

$N(\frac{3}{2}, 0)$ 关于 $\odot O$ 的反称点存在, 反称点 $N'(\frac{1}{2}, 0)$;

$T(1, \sqrt{3})$ 关于 $\odot O$ 的反称点存在, 反称点 $T'(0, 0)$;

② $\because OP \leq 2r = 2$, $OP^2 \leq 4$, 设 $P(x, -x+2)$,

$$\therefore OP^2 = x^2 + (-x+2)^2 = 2x^2 - 4x + 4 \leq 4,$$

$$\therefore 2x^2 - 4x \leq 0,$$

$$x(x-2) \leq 0,$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2.$$

当 $x=2$ 时, $P(2, 0)$, $P'(0, 0)$ 不符合题意;

当 $x=0$ 时, $P(0, 2)$, $P'(0, 0)$ 不符合题意;

$$\therefore 0 < x < 2;$$

(2) $\because$ 直线 $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点 A , B ,

$$\therefore A(6, 0), B(0, 2\sqrt{3}),$$

$$\therefore \frac{OA}{OB} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle OBA = 60^\circ, \angle OAB = 30^\circ.$$

设 $C(x, 0)$.

①当 C 在 OA 上时, 作 $CH \perp AB$ 于 H , 则 $CH \leq CP \leq 2r = 2$,

所以 $AC \leq 4$,

C 点横坐标 $x \geq 2$ (当 $x=2$ 时, C 点坐标 $(2, 0)$, H 点的反称点 $H'(2, 0)$ 在圆的内部);

②当 C 在 A 点右侧时, C 到线段 AB 的距离为 AC 长, AC 最大值为 2, 所以 C 点横坐标 $x \leq 8$.

综上所述, 圆心 C 的横坐标的取值范围是 $2 \leq x \leq 8$.

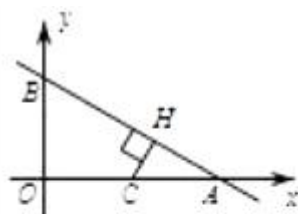


图1

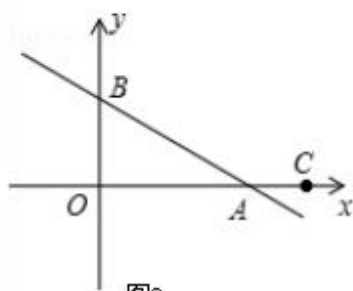


图2

点评: 本题是圆的综合题, 其中涉及到一次函数图象上点的坐标特征, 特殊角的三角函数值, 勾股定理, 一元二次不等式的解法, 利用数形结合、正确理解反称点的意义是解决本题的关键.