

2008 年北京市高级中等学校招生考试

数 学 试 卷

考 生 须 知:	1. 本试卷分第Ⅰ卷和第Ⅱ卷, 第Ⅰ卷共 2 页, 第Ⅱ卷共 8 页. 全卷共九道大题, 25 道小题. 2. 本试卷满分 120 分, 考试时间 120 分钟. 3. 在试卷 (包括第Ⅰ卷和第Ⅱ卷) 密封线内准确填写区 (县) 名称、毕业学校、姓名、报名号和准考证号. 4. 考试结束后, 将试卷和答题卡一并交回.
-------------------	---

第Ⅰ卷 (机读卷 共 32 分)

考 生 须 知:	1. 第Ⅰ卷从第 1 页到第 2 页, 共 2 页, 共一道大题, 8 道小题. 2. 考生须将所选选项按要求填涂在答题卡上, 在试卷上作答无效.
-------------------	--

一、选择题 (共 8 道小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

下列各题均有四个选项, 其中只有一个是符合题意的. 用铅笔把“机读答题卡”上对应题目答案的相应字母处涂黑.

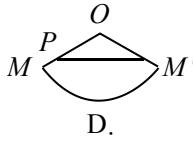
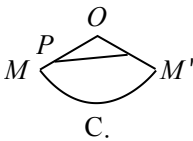
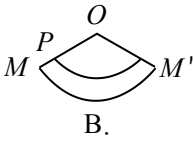
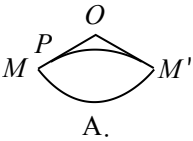
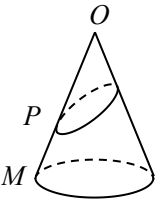
- 6 的绝对值等于 ()
A. 6 B. $\frac{1}{6}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. -6
- 截止到 2008 年 5 月 19 日, 已有 21 600 名中外记者成为北京奥运会的注册记者, 创历届奥运会之最. 将 21 600 用科学记数法表示应为 ()
A. 0.216×10^5 B. 21.6×10^3 C. 2.16×10^3 D. 2.16×10^4
- 若两圆的半径分别是 1cm 和 5cm, 圆心距为 6cm, 则这两圆的位置关系是 ()
A. 内切 B. 相交 C. 外切 D. 外离
- 众志成城, 抗震救灾. 某小组 7 名同学积极捐出自己的零花钱支援灾区, 他们捐款的数额分别是 (单位: 元): 50, 20, 50, 30, 50, 25, 135. 这组数据的众数和中位数分别是 ()
A. 50, 20 B. 50, 30 C. 50, 50 D. 135, 50
- 若一个多边形的内角和等于 720° , 则这个多边形的边数是 ()
A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
- 如图, 有 5 张形状、大小、质地均相同的卡片, 正面分别印有北京奥运会的会徽、吉祥物 (福娃)、火炬和奖牌等四种不同的图案, 背面完全相同. 现将这 5 张卡片洗匀后正面向下放在桌子上, 从中随机抽取一张, 抽出的卡片正面图案恰好是吉祥物 (福娃) 的概率是 ()



- $\frac{1}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{5}$
- 若 $|x+2| + \sqrt{y-3} = 0$, 则 xy 的值为 ()
A. -8 B. -6 C. 5 D. 6

- 已知 O 为圆锥的顶点, M 为圆锥底面上一点, 点 P 在 OM 上. 一只蜗牛从 P 点出发, 绕圆锥侧面爬行, 回到 P 点

时所爬过的最短路线的痕迹如右图所示. 若沿 OM 将圆锥侧面剪开并展开, 所得侧面展开图是 ()



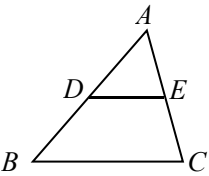
2008 年北京市高级中等学校招生考试

数 学 试 卷

第Ⅱ卷 (非机读卷 共 88 分)

考 生 须 知:	1. 第Ⅱ卷从第 1 页到第 8 页, 共 8 页, 共八道大题, 17 道小题. 2. 除画图可以用铅笔外, 答题必须用黑色或蓝色钢笔、圆珠笔或签字笔.
-------------	--

二、填空题 (共 4 道小题, 每小题 4 分, 共 16 分)



9. 在函数 $y = \frac{1}{2x-1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

10. 分解因式: $a^3 - ab^2 =$ _____.

11. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, D , E 分别是 AB , AC 的中点, 若 $DE = 2\text{cm}$, 则 $BC =$ _____ cm .

12. 一组按规律排列的式子: $-\frac{b^2}{a}, \frac{b^5}{a^2}, -\frac{b^8}{a^3}, \frac{b^{11}}{a^4}, \cdots (ab \neq 0)$, 其中第 7 个式子是_____, 第 n 个式子是_____ (n 为正整数).

三、解答题 (共 5 道小题, 共 25 分)

13. (本小题满分 5 分)

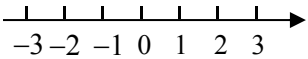
计算: $\sqrt{8} - 2\sin 45^\circ + (2 - \pi)^0 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$.

解:

14. (本小题满分 5 分)

解不等式 $5x - 12 \leq 2(4x - 3)$ ，并把它的解集在数轴上表示出来.

解:

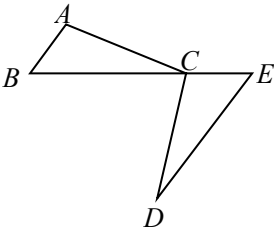


15. (本小题满分 5 分)

已知: 如图, C 为 BE 上一点, 点 A, D 分别在 BE 两侧. $AB \parallel ED$, $AB = CE$, $BC = ED$.

求证: $AC = CD$.

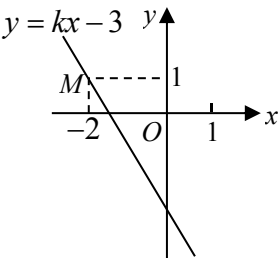
证明:



16. (本小题满分 5 分)

如图, 已知直线 $y = kx - 3$ 经过点 M , 求此直线与 x 轴, y 轴的交点坐标.

解:



17. (本小题满分 5 分)

已知 $x - 3y = 0$ ，求 $\frac{2x + y}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot (x - y)$ 的值.

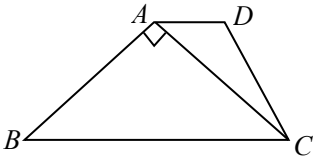
解:

四、解答题 (共 2 道小题，共 10 分)

18. (本小题满分 5 分)

如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp AC$ ， $\angle B = 45^\circ$ ， $AD = \sqrt{2}$ ， $BC = 4\sqrt{2}$ ，求 DC 的长.

解:

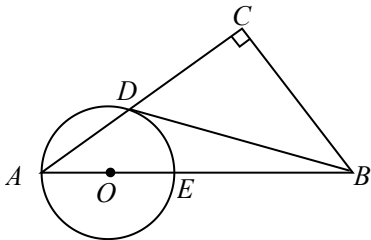


19. (本小题满分 5 分)

已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ，点 O 在 AB 上，以 O 为圆心， OA 长为半径的圆与 AC ， AB 分别交于点 D ， E ，且 $\angle CBD = \angle A$.

- (1) 判断直线 BD 与 $\odot O$ 的位置关系，并证明你的结论；
- (2) 若 $AD : AO = 8 : 5$ ， $BC = 2$ ，求 BD 的长.

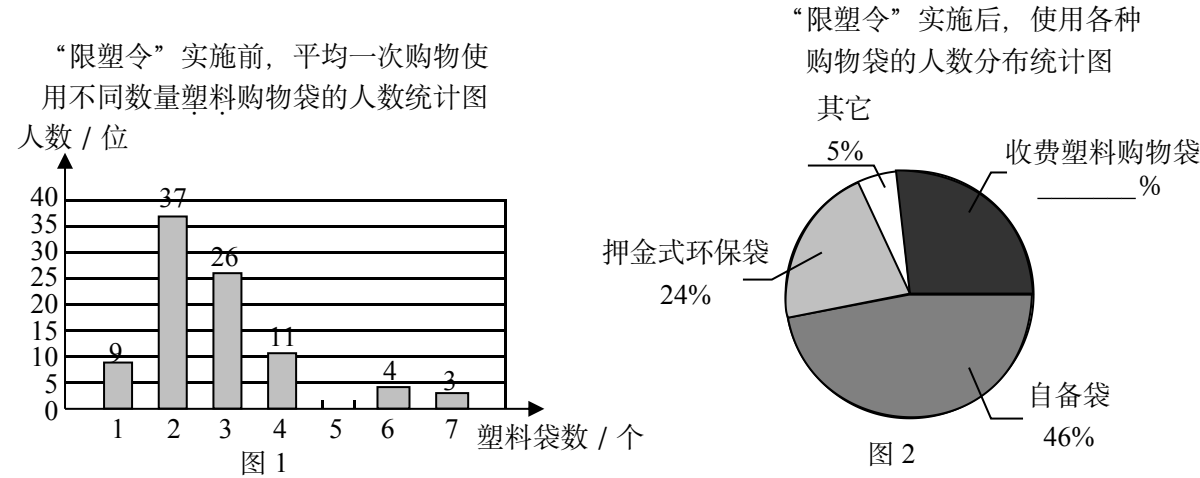
解: (1)



(2)

五、解答题 (本题满分 6 分)

20. 为减少环境污染, 自 2008 年 6 月 1 日起, 全国的商品零售场所开始实行“塑料购物袋有偿使用制度”(以下简称“限塑令”). 某班同学于 6 月上旬的一天, 在某超市门口采用问卷调查的方式, 随机调查了“限塑令”实施前后, 顾客在该超市用购物袋的情况, 以下是根据 100 位顾客的 100 份有效答卷画出的统计图表的一部分:



“限塑令”实施后, 塑料购物袋使用后的处理方式统计表				
处理方式	直接丢弃	直接做垃圾袋	再次购物使用	其它
选该项的人数占总人数的百分比	5%	35%	49%	11%

请你根据以上信息解答下列问题:

(1) 补全图 1, “限塑令”实施前, 如果每天约有 2 000 人次到该超市购物. 根据这 100 位顾客平均一次购物使用塑料购物袋的平均数, 估计这个超市每天需要为顾客提供多少个塑料购物袋?

(2) 补全图 2, 并根据统计图和统计表说明, 购物时怎样选用购物袋, 塑料购物袋使用后怎样处理, 能对环境保护带来积极的影响.

解: (1)

(2)

六、解答题 (共 2 道小题, 共 9 分)

21. (本小题满分 5 分) 列方程或方程组解应用题:

京津城际铁路将于 2008 年 8 月 1 日开通运营, 预计高速列车在北京、天津间单程直达运行时间为半小时. 某次试车时, 试验列车由北京到天津的行驶时间比预计时间多用了 6 分钟, 由天津返回北京的行驶时间与预计时间相同. 如果这次试车时, 由天津返回北京比去天津时平均每小时多行驶 40 千米, 那么这次试车时由北京到天津的平均速度是每小时多少千米?

解:

22. (本小题满分 4 分)

已知等边三角形纸片 ABC 的边长为 8, D 为 AB 边上的点, 过点 D 作 $DG \parallel BC$ 交 AC 于点 G . $DE \perp BC$ 于点 E , 过点 G 作 $GF \perp BC$ 于点 F , 把三角形纸片 ABC 分别沿 DG , DE , GF 按图 1 所示方式折叠, 点 A , B , C 分别落在点 A' , B' , C' 处. 若点 A' , B' , C' 在矩形 $DEFG$ 内或其边上, 且互不重合, 此时我们称 $\triangle A'B'C'$ (即图中阴影部分) 为“重叠三角形”.

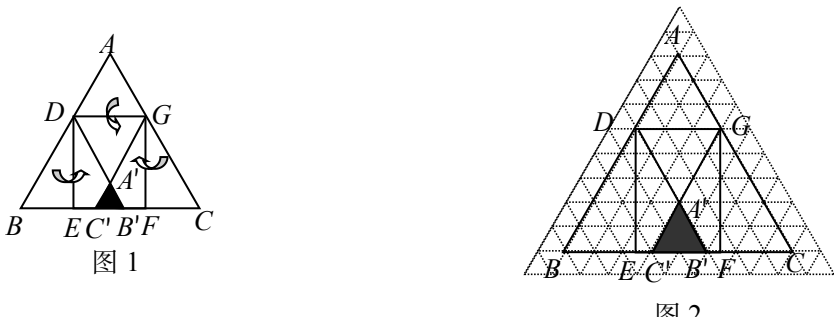
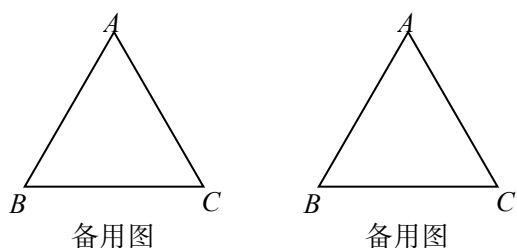


图 2

- (1) 若把三角形纸片 ABC 放在等边三角形网格中 (图中每个小三角形都是边长为 1 的等边三角形), 点 A, B, C, D 恰好落在网格图中的格点上. 如图 2 所示, 请直接写出此时重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积;
- (2) 实验探究: 设 AD 的长为 m , 若重叠三角形 $A'B'C'$ 存在. 试用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积, 并写出 m 的取值范围 (直接写出结果, 备用图供实验, 探究使用).



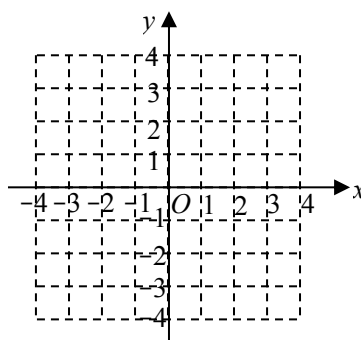
- 解: (1) 重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积为_____;
- (2) 用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积为_____; m 的取值范围为_____.

七、解答题 (本题满分 7 分)

23. 已知: 关于 x 的一元二次方程 $mx^2 - (3m+2)x + 2m+2 = 0 (m > 0)$.

- (1) 求证: 方程有两个不相等的实数根;
- (2) 设方程的两个实数根分别为 x_1, x_2 (其中 $x_1 < x_2$). 若 y 是关于 m 的函数, 且 $y = x_2 - 2x_1$, 求这个函数的解析式;
- (3) 在 (2) 的条件下, 结合函数的图象回答: 当自变量 m 的取值范围满足什么条件时, $y \leq 2m$.
- (1) 证明:

(2) 解:



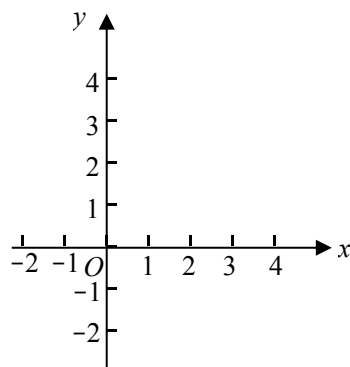
(3) 解:

八、解答题 (本题满分 7 分)

24. 在平面直角坐标系 xOy 中, 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A, B 两点 (点 A 在点 B 的左侧), 与 y 轴交于点 C , 点 B 的坐标为 $(3, 0)$, 将直线 $y = kx$ 沿 y 轴向上平移 3 个单位长度后恰好经过 B, C 两点.

- (1) 求直线 BC 及抛物线的解析式;
- (2) 设抛物线的顶点为 D , 点 P 在抛物线的对称轴上, 且 $\angle APD = \angle ACB$, 求点 P 的坐标;
- (3) 连结 CD , 求 $\angle OCA$ 与 $\angle OCD$ 两角和的度数.

解: (1)



(2)

(3)

九、解答题 (本题满分 8 分)

25. 请阅读下列材料:

问题: 如图 1, 在菱形 $ABCD$ 和菱形 $BEFG$ 中, 点 A, B, E 在同一条直线上, P 是线段 DF 的中点, 连结 PG, PC . 若 $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$, 探究 PG 与 PC 的位置关系及 $\frac{PG}{PC}$ 的值.

小聪同学的思路是: 延长 GP 交 DC 于点 H , 构造全等三角形, 经过推理使问题得到解决.

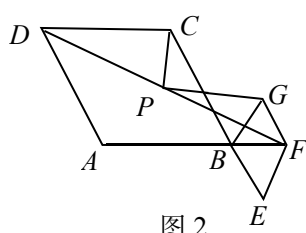


图 2

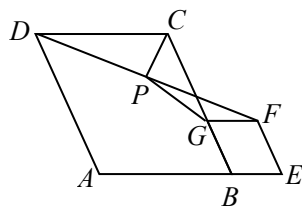


图 1

请你参考小聪同学的思路, 探究并解决下列问题:

- (1) 写出上面问题中线段 PG 与 PC 的位置关系及 $\frac{PG}{PC}$ 的值;
- (2) 将图 1 中的菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转, 使菱形 $BEFG$ 的对角线 BF 恰好与菱形 $ABCD$ 的边 AB 在同一条直线上, 原问题中的其他条件不变 (如图 2). 你在 (1) 中得到的两个结论是否发生变化? 写出你的猜想并加以证明.

(3) 若图 1 中 $\angle ABC = \angle BEF = 2\alpha (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$, 将菱形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转任意角度, 原问题中的其他条件不变, 请你直接写出 $\frac{PG}{PC}$ 的值 (用含 α 的式子表示).

解: (1) 线段 PG 与 PC 的位置关系是_____; $\frac{PG}{PC} =$ _____.

(2)

2008 年北京市高级中等学校招生考试 数学试卷答案及评分参考

阅卷须知:

1. 一律用红钢笔或红圆珠笔批阅, 按要求签名.
2. 第 I 卷是选择题, 机读阅卷.
3. 第 II 卷包括填空题和解答题. 为了阅卷方便, 解答题中的推导步骤写得较为详细, 考生只要写明主要过程即可. 若考生的解法与本解法不同, 正确者可参照评分参考给分. 解答右端所注分数, 表示考生正确做到这一步应得的累加分数.

第 I 卷 (机读卷 共 32 分)

一、选择题 (共 8 道小题, 每小题 4 分, 共 32 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	D	C	C	B	B	B	D

第 II 卷 (非机读卷 共 88 分)

二、填空题 (共 4 道小题, 每小题 4 分, 共 16 分)

题号	9	10	11	12	
答案	$x \neq \frac{1}{2}$	$a(a+b)(a-b)$	4	$-\frac{b^{20}}{a^7}$	$(-1)^n \frac{b^{3n-1}}{a^n}$

三、解答题 (共 5 道小题, 共 25 分)

13. (本小题满分 5 分)

解: $\sqrt{8}-2 \sin 45^{\circ}+(2-\pi)^0-\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$=2 \sqrt{2}-2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}+1-3 \cdots \cdots 4$ 分

$=\sqrt{2}-2 . \cdots \cdots 5$ 分

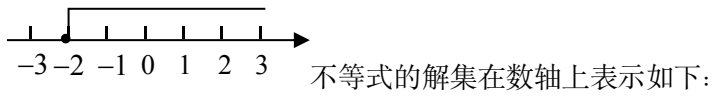
14. (本小题满分 5 分)

解: 去括号, 得 $5 x-12 \leqslant 8 x-6 . \cdots \cdots 1$ 分

移项, 得 $5 x-8 x \leqslant-6+12 . \cdots \cdots 2$ 分

合并, 得 $-3 x \leqslant 6 . \cdots \cdots 3$ 分

系数化为 1, 得 $x \geqslant-2 . \cdots \cdots 4$ 分



$\cdots \cdots 5$ 分

15. (本小题满分 5 分)

证明: $\because A B \parallel E D$,

$\therefore \angle B=\angle E . \cdots \cdots 2$ 分

在 $\triangle A B C$ 和 $\triangle C E D$ 中,

$$\left\{\begin{array}{l} A B=C E, \\ \angle B=\angle E, \\ B C=E D, \end{array}\right.$$

$\therefore \triangle A B C \cong \triangle C E D . \cdots \cdots 4$ 分

$\therefore A C=C D . \cdots \cdots 5$ 分

16. (本小题满分 5 分)

解: 由图象可知, 点 $M(-2,1)$ 在直线 $y=k x-3$ 上, $\cdots \cdots 1$ 分

$\therefore-2 k-3=1 .$

解得 $k=-2 . \cdots \cdots 2$ 分

$\therefore$ 直线的解析式为 $y=-2 x-3 . \cdots \cdots 3$ 分

令 $y=0$, 可得 $x=-\frac{3}{2} .$

$\therefore$ 直线与 x 轴的交点坐标为 $\left(-\frac{3}{2}, 0\right) . \cdots \cdots 4$ 分

令 $x=0$, 可得 $y=-3 .$

∴ 直线与 y 轴的交点坐标为 $(0, -3)$5 分

17. (本小题满分 5 分)

解: $\frac{2x+y}{x^2-2xy+y^2} \cdot (x-y)$

$= \frac{2x+y}{(x-y)^2} \cdot (x-y)$ 2 分

$= \frac{2x+y}{x-y}$ 3 分

当 $x-3y=0$ 时, $x=3y$ 4 分

原式 $= \frac{6y+y}{3y-y} = \frac{7y}{2y} = \frac{7}{2}$ 5 分

四、解答题 (共 2 道小题, 共 10 分)

18. (本小题满分 5 分)

解法一: 如图 1, 分别过点 A, D 作 $AE \perp BC$ 于点 E ,

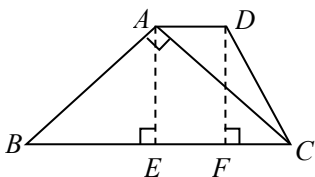


图 1

$DF \perp BC$ 于点 F1 分

∴ $AE \parallel DF$.
又 $AD \parallel BC$,
∴ 四边形 $AEFD$ 是矩形.

∴ $EF = AD = \sqrt{2}$ 2 分

∵ $AB \perp AC$, $\angle B = 45^\circ$, $BC = 4\sqrt{2}$,

∴ $AB = AC$.

∴ $AE = EC = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{2}$.

∴ $DF = AE = 2\sqrt{2}$,

$CF = EC - EF = \sqrt{2}$ 4 分

在 $\text{Rt}\triangle DFC$ 中, $\angle DFC = 90^\circ$,

∴ $DC = \sqrt{DF^2 + CF^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$ 5 分

解法二: 如图 2, 过点 D 作 $DF \parallel AB$, 分别交 AC, BC 于点 E, F1 分

∵ $AB \perp AC$,

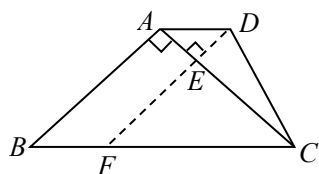


图 2

$$\therefore \angle AED = \angle BAC = 90^\circ.$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = 180^\circ - \angle B - \angle BAC = 45^\circ.$$

$$\text{在 Rt} \triangle ABC \text{ 中, } \angle BAC = 90^\circ, \angle B = 45^\circ, BC = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore AC = BC \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4 \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{在 Rt} \triangle ADE \text{ 中, } \angle AED = 90^\circ, \angle DAE = 45^\circ, AD = \sqrt{2},$$

$$\therefore DE = AE = 1.$$

$$\therefore CE = AC - AE = 3. \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{在 Rt} \triangle DEC \text{ 中, } \angle CED = 90^\circ,$$

$$\therefore DC = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 5 分)

解: (1) 直线 BD 与 $\odot O$ 相切. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

证明: 如图 1, 连结 OD .

$$\because OA = OD,$$

$$\therefore \angle A = \angle ADO.$$

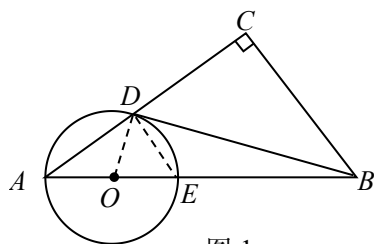


图 1

$$\because \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CBD + \angle CDB = 90^\circ.$$

$$\text{又} \because \angle CBD = \angle A,$$

$$\therefore \angle ADO + \angle CDB = 90^\circ.$$

$$\therefore \angle ODB = 90^\circ.$$

$$\therefore \text{直线 } BD \text{ 与 } \odot O \text{ 相切.} \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

(2) 解法一: 如图 1, 连结 DE .

$$\because AE \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径,} \therefore \angle ADE = 90^\circ.$$

$$\because AD : AO = 8 : 5,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AD}{AE} = \frac{4}{5}. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad \angle CBD = \angle A,$$

$$\therefore \cos \angle CBD = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{5}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because BC = 2, \quad \therefore BD = \frac{5}{2}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

解法二：如图 2，过点 O 作 $OH \perp AD$ 于点 H . $\therefore AH = DH = \frac{1}{2}AD$.

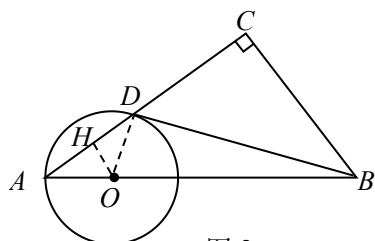


图 2

$$\because AD : AO = 8 : 5,$$

$$\therefore \cos A = \frac{AH}{AO} = \frac{4}{5}. \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\because \angle C = 90^\circ, \quad \angle CBD = \angle A,$$

$$\therefore \cos \angle CBD = \frac{BC}{BD} = \frac{4}{5}. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\because BC = 2,$$

$$\therefore BD = \frac{5}{2}. \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

五、解答题 (本题满分 6 分)

解：(1) 补全图 1 见下图. $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

“限塑令”实施前，平均一次购物使用不同数量塑料购物袋的人数统计图

人数 / 位

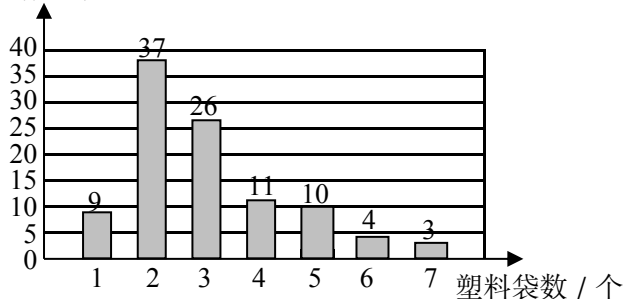


图 1

$$\frac{9 \times 1 + 37 \times 2 + 26 \times 3 + 11 \times 4 + 10 \times 5 + 4 \times 6 + 3 \times 7}{100} = \frac{300}{100} = 3 \text{ (个)}.$$

这 100 位顾客平均一次购物使用塑料购物袋的平均数为 3 个. 3 分

$$2000 \times 3 = 6000.$$

估计这个超市每天需要为顾客提供 6000 个塑料购物袋. 4 分

(2) 图 2 中, 使用收费塑料购物袋的人数所占百分比为 25%. 5 分

根据图表回答正确给 1 分, 例如: 由图 2 和统计表可知, 购物时应尽量使用自备袋和押金式环保袋, 少用塑料购物袋; 塑料购物袋应尽量循环使用, 以便减少塑料购物袋的使用量, 为环保做贡献. 6 分

六、解答题 (共 2 道小题, 共 9 分)

21. 解: 设这次试车时, 由北京到天津的平均速度是每小时 x 千米, 则由天津返回北京的平均速度是每小时 $(x + 40)$ 千米. 1 分

依题意, 得 $\frac{30+6}{60}x = \frac{1}{2}(x+40)$ 3 分

解得 $x = 200$ 4 分

答: 这次试车时, 由北京到天津的平均速度是每小时 200 千米. 5 分

22. 解: (1) 重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{3}$ 1 分

(2) 用含 m 的代数式表示重叠三角形 $A'B'C'$ 的面积为 $\sqrt{3}(4-m)^2$; 2 分

m 的取值范围为 $\frac{8}{3} \leq m < 4$ 4 分

七、解答题 (本题满分 7 分)

23. (1) 证明: $\because mx^2 - (3m+2)x + 2m+2 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程,

$$\therefore \Delta = [-(3m+2)]^2 - 4m(2m+2) = m^2 + 4m + 4 = (m+2)^2.$$

$\because$ 当 $m > 0$ 时, $(m+2)^2 > 0$, 即 $\Delta > 0$.

$\therefore$ 方程有两个不相等的实数根. 2 分

$$(2) \text{ 解: 由求根公式, 得 } x = \frac{(3m+2) \pm (m+2)}{2m}.$$

$$\therefore x = \frac{2m+2}{m} \text{ 或 } x = 1. \text{ 3 分}$$

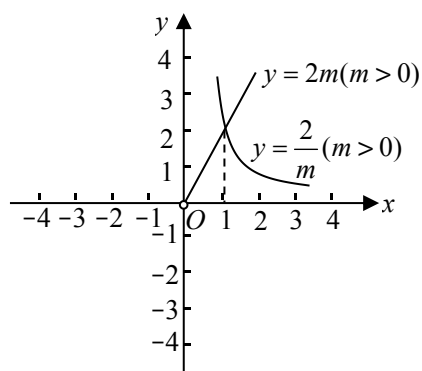
$\because m > 0$,

$$\therefore \frac{2m+2}{m} = \frac{2(m+1)}{m} > 1.$$

$\therefore x_1 < x_2$,

$$\therefore x_1 = 1, x_2 = \frac{2m+2}{m}. \text{ 4 分}$$

$$\therefore y = x_2 - 2x_1 = \frac{2m+2}{m} - 2 \times 1 = \frac{2}{m}.$$



即 $y = \frac{2}{m} (m > 0)$ 为所求. 5 分

(3) 解: 在同一平面直角坐标系中分别画出

$y = \frac{2}{m} (m > 0)$ 与 $y = 2m (m > 0)$ 的图象.

..... 6 分

由图象可得, 当 $m \geq 1$ 时, $y \leq 2m$ 7 分

八、解答题 (本题满分 7 分)

24. 解: (1) $\because y = kx$ 沿 y 轴向上平移 3 个单位长度后经过 y 轴上的点 C ,

$\therefore C(0,3)$.

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + 3$.

$\because B(3,0)$ 在直线 BC 上,

$\therefore 3k + 3 = 0$.

解得 $k = -1$.

$\therefore$ 直线 BC 的解析式为 $y = -x + 3$ 1 分

$\because$ 抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 过点 B, C ,

$\therefore \begin{cases} 9 + 3b + c = 0, \\ c = 3. \end{cases}$

解得 $\begin{cases} b = -4, \\ c = 3. \end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = x^2 - 4x + 3$ 2 分

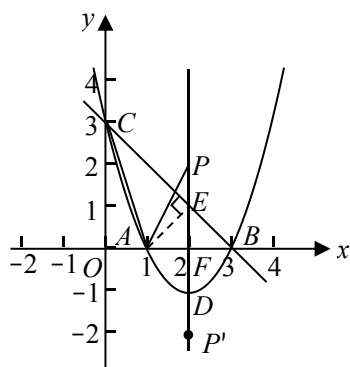


图 1

(2) 由 $y = x^2 - 4x + 3$.

可得 $D(2, -1)$, $A(1, 0)$.

$\therefore OB = 3$, $OC = 3$, $OA = 1$, $AB = 2$.

可得 $\triangle OBC$ 是等腰直角三角形.

$\therefore \angle OBC = 45^\circ$, $CB = 3\sqrt{2}$.

如图 1, 设抛物线对称轴与 x 轴交于点 F ,

$\therefore AF = \frac{1}{2}AB = 1$.

过点 A 作 $AE \perp BC$ 于点 E .

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$.

可得 $BE = AE = \sqrt{2}$, $CE = 2\sqrt{2}$.

在 $\triangle AEC$ 与 $\triangle AFP$ 中, $\angle AEC = \angle AFP = 90^\circ$, $\angle ACE = \angle APF$,

$\therefore \triangle AEC \sim \triangle AFP$.

$\therefore \frac{AE}{AF} = \frac{CE}{PF}$, $\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2\sqrt{2}}{PF}$.

解得 $PF = 2$.

$\because$ 点 P 在抛物线的对称轴上,

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(2, 2)$ 或 $(2, -2)$ 5 分

(3) 解法一: 如图 2, 作点 $A(1, 0)$ 关于 y 轴的对称点 A' , 则 $A'(-1, 0)$.

连结 $A'C$, $A'D$,

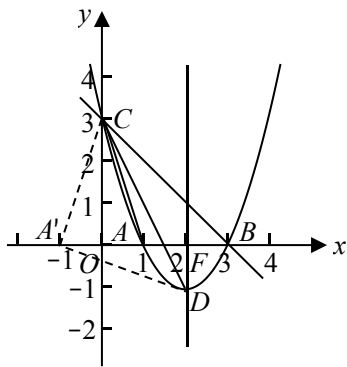


图 2

可得 $A'C = AC = \sqrt{10}$, $\angle OCA' = \angle OCA$.

由勾股定理可得 $CD^2 = 20$, $A'D^2 = 10$.

又 $A'C^2 = 10$,

$$\therefore A'D^2 + A'C^2 = CD^2.$$

$\therefore \triangle A'DC$ 是等腰直角三角形, $\angle CA'D = 90^\circ$,

$$\therefore \angle DCA' = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle OCA' + \angle OCD = 45^\circ.$$

$$\therefore \angle OCA + \angle OCD = 45^\circ.$$

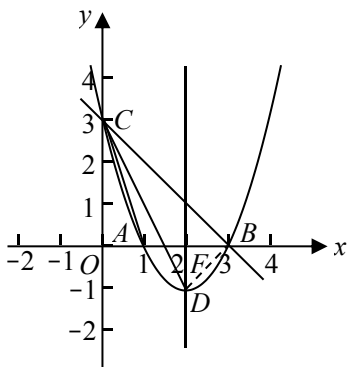


图 3

即 $\angle OCA$ 与 $\angle OCD$ 两角和的度数为 45° 7 分

解法二: 如图 3, 连结 BD .

同解法一可得 $CD = \sqrt{20}$, $AC = \sqrt{10}$.

在 $\text{Rt}\triangle DBF$ 中, $\angle DFB = 90^\circ$, $BF = DF = 1$,

$$\therefore DB = \sqrt{DF^2 + BF^2} = \sqrt{2}.$$

在 $\triangle CBD$ 和 $\triangle COA$ 中,

$$\frac{DB}{AO} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}, \quad \frac{BC}{OC} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}, \quad \frac{CD}{CA} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}.$$

$$\therefore \frac{DB}{AO} = \frac{BC}{OC} = \frac{CD}{CA}.$$

$$\therefore \triangle CBD \sim \triangle COA.$$

$$\therefore \angle BCD = \angle OCA.$$

$$\because \angle OCB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OCA + \angle OCD = 45^\circ.$$

即 $\angle OCA$ 与 $\angle OCD$ 两角和的度数为 45° 7 分

九、解答题 (本题满分 8 分)

25. 解: (1) 线段 PG 与 PC 的位置关系是 $PG \perp PC$;

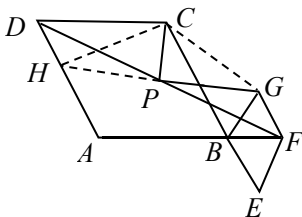
$$\frac{PG}{PC} = \sqrt{3}. \quad \text{..... 2 分}$$

(2) 猜想: (1) 中的结论没有发生变化.

证明: 如图, 延长 GP 交 AD 于点 H , 连结 CH , CG .

$\because P$ 是线段 DF 的中点,

$$\therefore FP = DP.$$



由题意可知 $AD \parallel FG$.

$$\therefore \angle GFP = \angle HDP.$$

$$\because \angle GPF = \angle HPD,$$

$$\therefore \triangle GFP \cong \triangle HDP.$$

$$\therefore GP = HP, \quad GF = HD.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是菱形,

$$\therefore CD = CB, \quad \angle HDC = \angle ABC = 60^\circ.$$

由 $\angle ABC = \angle BEF = 60^\circ$, 且菱形 $BEFG$ 的对角线 BF 恰好与菱形 $ABCD$ 的边 AB 在同一条直线上,

可得 $\angle GBC = 60^\circ$.

$$\therefore \angle HDC = \angle GBC.$$

$\because$ 四边形 $BEFG$ 是菱形,

$$\therefore GF = GB.$$

$$\therefore HD = GB.$$

$$\therefore \triangle HDC \cong \triangle GBC.$$

$$\therefore CH = CG, \quad \angle DCH = \angle BCG.$$

$$\therefore \angle DCH + \angle HCB = \angle BCG + \angle HCB = 120^\circ .$$

$$\text{即 } \angle HCG = 120^\circ .$$

$$\because CH = CG , \quad PH = PG ,$$

$$\therefore PG \perp PC , \quad \angle GCP = \angle HCP = 60^\circ .$$

$$\therefore \frac{PG}{PC} = \sqrt{3} . \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(3) \quad \frac{PG}{PC} = \underline{\tan(90^\circ - \alpha)} . \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$