

2019 年内蒙古呼和浩特市中考数学试卷

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。）

1. (3 分) 如图，检测排球，其中质量超过标准的克数记为正数，不足的克数记为负数，下面检测过的四个排球，在其上方标注了检测结果，其中质量最接近标准的一个是 ()



- A. B. C. D.

2. (3 分) 甲骨文是我国的一种古代文字，下面是“北”“比”“鼎”“射”四个字的甲骨文，其中不是轴对称图形的是 ()

- A. B.
C. D.

3. (3 分) 二次函数 $y = ax^2$ 与一次函数 $y = ax + a$ 在同一坐标系中的大致图象可能是 ()

- A.
B.
C.
D.

4. (3 分) 已知菱形的边长为 3，较短的一条对角线的长为 2，则该菱形较长的一条对角线

的长为（ ）

- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{5}$ C. $4\sqrt{2}$ D. $2\sqrt{10}$

5. (3分) 某学校近几年来通过“书香校园”主题系列活动，倡导学生整本阅读纸质课外书籍。下面的统计图是该校2013年至2018年纸质书人均阅读量的情况，根据统计图提供的信息，下列推断不合理的是（ ）

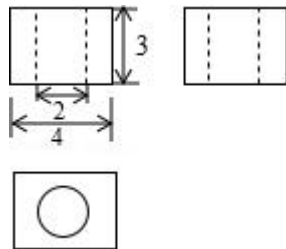


- A. 从2013年到2016年，该校纸质书人均阅读量逐年增长
 B. 2013年至2018年，该校纸质书人均阅读量的中位数是46.7本
 C. 2013年至2018年，该校纸质书人均阅读量的极差是45.3本
 D. 2013年至2018年，该校后三年纸质书人均阅读量总和是前三年纸质书人均阅读量总和的2倍

6. (3分) 若不等式 $\frac{2x+5}{3} - 1 \leq 2 - x$ 的解集中 x 的每一个值，都能使关于 x 的不等式 $3(x - 1) + 5 > 5x + 2(m+x)$ 成立，则 m 的取值范围是（ ）

- A. $m > -\frac{3}{5}$ B. $m < -\frac{1}{5}$ C. $m < -\frac{3}{5}$ D. $m > -\frac{1}{5}$

7. (3分) 如图是一个几何体的三视图，其中主视图与左视图完全一样，则这个几何体的表面积是（ ）



- A. $80 - 2\pi$ B. $80 + 4\pi$ C. 80 D. $80 + 6\pi$

8. (3分) 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根，则 $x_2^3 - 4x_1^2 + 17$ 的值为（ ）

- A. -2 B. 6 C. -4 D. 4

9. (3分) 已知正方形的对称中心在坐标原点, 顶点 A 、 B 、 C 、 D 按逆时针依次排列, 若 A 点的坐标为 $(2, \sqrt{3})$, 则 B 点与 D 点的坐标分别为 ()

- A. $(-2, \sqrt{3})$, $(2, -\sqrt{3})$ B. $(-\sqrt{3}, 2)$, $(\sqrt{3}, -2)$
C. $(-\sqrt{3}, 2)$, $(2, -\sqrt{3})$ D. $(-\frac{\sqrt{7}}{2}, \frac{\sqrt{21}}{2})$, $(\frac{\sqrt{7}}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{2})$

10. (3分) 以下四个命题: ①用换元法解分式方程 $-\frac{x^2+1}{x} + \frac{2x}{x^2+1} = 1$ 时, 如果设 $\frac{x^2+1}{x} =$

y , 那么可以将原方程化为关于 y 的整式方程 $y^2+y-2=0$; ②如果半径为 r 的圆的内接正五边形的边长为 a , 那么 $a = 2r\cos 54^\circ$; ③有一个圆锥, 与底面圆直径是 $\sqrt{3}$ 且体积为 $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ 的圆柱等高, 如果这个圆锥的侧面展开图是半圆, 那么它的母线长为 $\frac{4}{3}$; ④二次

函数 $y = ax^2 - 2ax + 1$, 自变量的两个值 x_1, x_2 对应的函数值分别为 y_1, y_2 , 若 $|x_1 - 1| > |x_2 - 1|$, 则 $a(y_1 - y_2) > 0$. 其中正确的命题的个数为 ()

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分, 本题要求把正确结果填在答题卡规定的横线上, 不需要解答过程)

11. (3分) 因式分解: $x^2y - 4y^3 =$ _____.

12. (3分) 下面三个命题: ①底边和顶角对应相等的两个等腰三角形全等; ②两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等; ③斜边和斜边上的中线对应相等的两个直角三角形全等, 其中正确的命题的序号为 _____.

13. (3分) 同时掷两枚质地均匀的骰子, 则至少有一枚骰子的点数是 6 这个随机事件的概率为 _____.

14. (3分) 关于 x 的方程 $mx^{2m-1} + (m-1)x - 2 = 0$ 如果是一元一次方程, 则其解为 _____.

15. (3分) 已知正方形 $ABCD$ 的面积是 2, E 为正方形一边 BC 在从 B 到 C 方向的延长线上的一点, 若 $CE = \sqrt{2}$, 连接 AE , 与正方形另外一边 CD 交于点 F , 连接 BF 并延长, 与线段 DE 交于点 G , 则 BG 的长为 _____.

16. (3分) 对任意实数 a , 若多项式 $2b^2 - 5ab + 3a^2$ 的值总大于 -3, 则实数 b 的取值范围是 _____.

三、解答题 (本大题共 9 小题, 满分 72 分, 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (10分) 计算

(1) 计算 $(1\frac{1}{2}) \div (-\frac{3}{4}) + \sqrt{3} \times \sqrt{12} - (\frac{1}{1-\sqrt{3}})^{-2}$

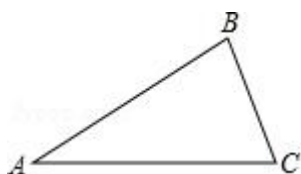
(2) 先化简，再求值： $(\frac{5x+3y}{x^2-y^2} + \frac{2x}{y^2-x^2}) \div \frac{x}{3(x-y)}$ ，其中 $x=3\sqrt{3}$ ， $y=\frac{1}{2}$ 。

18. (6分) 如图，在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c 。

(1) 若 $a=6$ ， $b=8$ ， $c=12$ ，请直接写出 $\angle A$ 与 $\angle B$ 的和与 $\angle C$ 的大小关系；

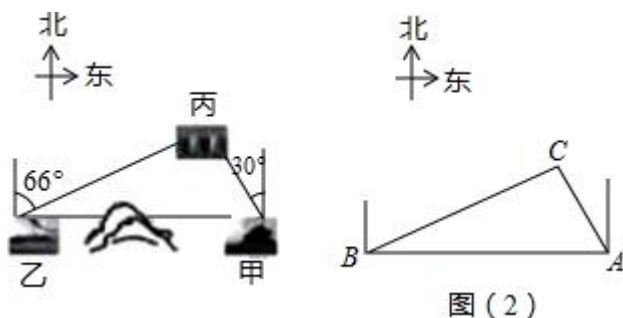
(2) 求证： $\triangle ABC$ 的内角和等于 180° ；

(3) 若 $\frac{a}{a-b+c} = \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)}{c}$ ，求证： $\triangle ABC$ 是直角三角形。



19. (6分) 用配方法求一元二次方程 $(2x+3)(x-6) = 16$ 的实数根。

20. (7分) 如图，已知甲地在乙地的正东方向，因有大山阻隔，由甲地到乙地需要绕行丙地。已知丙地位于甲地北偏西 30° 方向，距离甲地 460km ，丙地位于乙地北偏东 66° 方向，现要打通穿山隧道，建成甲乙两地直达高速公路，如果将甲、乙、丙三地当作三个点 A 、 B 、 C ，可抽象成图(2)所示的三角形，求甲乙两地之间直达高速线路的长 AB (结果用含非特殊角的三角函数和根式表示即可)。



图(2)

21. (9分) 镇政府想了解对王家村进行“精准扶贫”一年来村民的经济情况，统计员小李用简单随机抽样的方法，在全村 130 户家庭中随机抽取 20 户，调查过去一年的收入(单位：万元)，从而去估计全村家庭年收入情况。

已知调查得到的数据如下：

1.9, 1.3, 1.7, 1.4, 1.6, 1.5, 2.7, 2.1, 1.5, 0.9, 2.6, 2.0, 2.1, 1.0, 1.8, 2.2, 2.4, 3.2, 1.3, 2.8

为了便于计算，小李在原数据的每个数上都减去 1.5，得到下面第二组数：

0.4, -0.2, 0.2, -0.1, 0.1, 0, 1.2, 0.6, 0, -0.6, 1.1, 0.5, 0.6, -0.5, 0.3, 0.7, 0.9, 1.7, -0.2, 1.3

(1) 请你用小李得到的第二组数计算这 20 户家庭的平均年收入, 并估计全村年收入及全村家庭年收入超过 1.5 万元的百分比; 已知某家庭过去一年的收入是 1.89 万元, 请你用调查得到的数据的中位数推测该家庭的收入情况在全村处于什么水平?

(2) 已知小李算得第二组数的方差是 S , 小王依据第二组数的方差得出原数据的方差为 $(1.5+S)^2$, 你认为小王的结果正确吗? 如果不正确, 直接写出你认为正确的结果.

22. (6 分) 滴滴快车是一种便捷的出行工具, 计价规则如下表:

计费项目	里程费	时长费	远途费
单价	1.8 元/公里	0.3 元/分钟	0.8 元/公里
注: 车费由里程费、时长费、远途费三部分构成, 其中里程费按行车的实际里程计算; 时长费按行车的实际时间计算; 远途费的收取方式为: 行车里程 7 公里以内 (含 7 公里) 不收远途费, 超过 7 公里的, 超出部分每公里收 0.8 元.			

小王与小张各自乘坐滴滴快车, 在同一地点约见, 已知到达约见地点时他们的实际行车里程分别为 6 公里与 8.5 公里, 两人付给滴滴快车的乘车费相同.

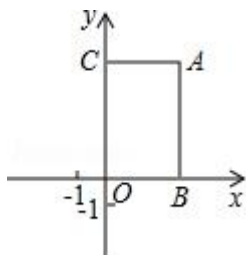
- (1) 求这两辆滴滴快车的实际行车时间相差多少分钟;
- (2) 实际乘车时间较少的人, 由于出发时间比另一人早, 所以提前到达约见地点在大厅等候. 已知他等候另一人的时间是他自己实际乘车时间的 1.5 倍, 且比另一人的实际乘车时间的一半多 8.5 分钟, 计算俩人各自的实际乘车时间.

23. (7 分) 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 $OCAB$ ($OC > OB$) 的对角线长为 5, 周长为

14. 若反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 的图象经过矩形顶点 A .

(1) 求反比例函数解析式; 若点 $(-a, y_1)$ 和 $(a+1, y_2)$ 在反比例函数的图象上, 试比较 y_1 与 y_2 的大小;

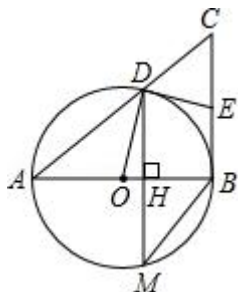
(2) 若一次函数 $y = kx + b$ 的图象过点 A 并与 x 轴交于点 $(-1, 0)$, 求出一函数解析式, 并直接写出 $kx + b - \frac{m}{x} < 0$ 成立时, 对应 x 的取值范围.



24. (9分) 如图, 以 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的直角边 AB 为直径的 $\odot O$ 交斜边 AC 于点 D , 过点 D 作 $\odot O$ 的切线与 BC 交于点 E , 弦 DM 与 AB 垂直, 垂足为 H .

(1) 求证: E 为 BC 的中点;

(2) 若 $\odot O$ 的面积为 12π , 两个三角形 $\triangle AHD$ 和 $\triangle BMH$ 的外接圆面积之比为 3, 求 $\triangle DEC$ 的内切圆面积 S_1 和四边形 $OBED$ 的外接圆面积 S_2 的比.



25. (12分) 已知二次函数 $y = ax^2 - bx + c$ 且 $a = b$, 若一次函数 $y = kx + 4$ 与二次函数的图象交于点 $A(2, 0)$.

(1) 写出一函数的解析式, 并求出二次函数与 x 轴交点坐标;

(2) 当 $a > c$ 时, 求证: 直线 $y = kx + 4$ 与抛物线 $y = ax^2 - bx + c$ 一定还有另一个异于点 A 的交点;

(3) 当 $c < a \leq c + 3$ 时, 求出直线 $y = kx + 4$ 与抛物线 $y = ax^2 - bx + c$ 的另一个交点 B 的坐标;

记抛物线顶点为 M , 抛物线对称轴与直线 $y = kx + 4$ 的交点为 N , 设 $S = \frac{25}{9}S_{\triangle AMN} - S_{\triangle BMN}$,

写出 S 关于 a 的函数, 并判断 S 是否有最大值? 如果有, 求出最大值; 如果没有, 请说明理由.

2019 年内蒙古呼和浩特市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分。）

1. 【分析】根据题意可知：质量最接近标准的排球就是检测结果的绝对值最小的.

【解答】解：由题意得：四个排球质量偏差的绝对值分别为：0.6，0.7，2.5，3.5，
绝对值最小的为 0.6，最接近标准.

故选：A.

【点评】此题主要考查了正数和负数，本题的解题关键是求出检测结果的绝对值，绝对值越小的数越接近标准.

2. 【分析】根据轴对称图形的概念对各选项分析判断即可得解.

【解答】解：A、是轴对称图形，故本选项错误；

B、不是轴对称图形，故本选项正确；

C、是轴对称图形，故本选项错误；

D、是轴对称图形，故本选项错误.

故选：B.

【点评】本题考查了轴对称图形的概念，轴对称图形的关键是寻找对称轴，图形两部分折叠后可重合.

3. 【分析】由一次函数 $y = ax + a$ 可知，一次函数的图象与 x 轴交于点 $(-1, 0)$ ，即可排除 A、B，然后根据二次函数的开口方向，与 y 轴的交点；一次函数经过的象限，与 y 轴的交点可得相关图象进行判断.

【解答】解：由一次函数 $y = ax + a$ 可知，一次函数的图象与 x 轴交于点 $(-1, 0)$ ，排除 A、B；

当 $a > 0$ 时，二次函数 $y = ax^2$ 开口向上，一次函数 $y = ax + a$ 经过一、二、三象限，当 $a < 0$ 时，二次函数开口向下，一次函数经过二、三、四象限，排除 C；

故选：D.

【点评】本题主要考查一次函数和二次函数的图象，解题的关键是熟练掌握二次函数的图象和一次函数的图象与系数之间的关系.

4. 【分析】首先根据题意画出图形，然后由菱形的性质，求得 $OA = 1$ ， $AC \perp BD$ ，然后由勾股定理求得 OB 的长，继而求得答案.

【解答】解：如图，

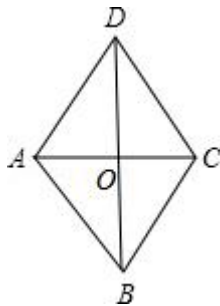
∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，

$$\therefore OA = OC = \frac{1}{2}AC = 1, OB = OD, AC \perp BD,$$

$$\therefore OB = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\therefore BD = 2OB = 4\sqrt{2};$$

故选：C.



【点评】此题考查了菱形的性质以及勾股定理．注意根据题意画出图形，结合图形求解是关键．

5. 【分析】利用折线统计图结合相应数据，分别分析得出符合题意的答案．

【解答】解：A、从 2013 年到 2016 年，该校纸质书人均阅读量逐年增长，正确；

B、2013 年至 2018 年，该校纸质书人均阅读量的中位数是 $\frac{43.3+50.1}{2}=46.7$ 本，正确；

C、2013 年至 2018 年，该校纸质书人均阅读量的极差是 $60.8 - 15.5 = 45.3$ 本，正确；

D、2013 年至 2018 年，该校后三年纸质书人均阅读量总和是前三年纸质书人均阅读量总和的 $\frac{60.8+50.1+58.4}{43.3+38.5+15.5} \approx 1.74 \neq 2$ 倍，错误；

故选：D.

【点评】此题主要考查了折线统计图，利用折线统计图获取正确信息是解题关键．

6. 【分析】求出不等式 $\frac{2x+5}{3} - 1 \leq 2 - x$ 的解，求出不等式 $3(x-1)+5 > 5x+2(m+x)$ 的解

集，得出关于 m 的不等式，求出 m 即可．

【解答】解：解不等式 $\frac{2x+5}{3} - 1 \leq 2 - x$ 得： $x \leq \frac{4}{5}$,

∵ 不等式 $\frac{2x+5}{3} - 1 \leq 2 - x$ 的解集中 x 的每一个值，都能使关于 x 的不等式 $3(x-1)+5 > 5x+2(m+x)$ 成立，

$$\therefore x < \frac{1-m}{2},$$

$$\therefore \frac{1-m}{2} > \frac{4}{5},$$

$$\text{解得: } m < -\frac{3}{5},$$

故选: C.

【点评】 本题主要对解一元一次不等式组, 不等式的性质等知识点的理解和掌握, 能根据已知得到关于 m 的不等式是解此题的关键.

7. **【分析】** 由三视图可知, 该几何体是长方体, 中间是空心圆柱体, 长方体的长宽高分别为 4, 4, 3, 圆柱体直径为 2, 高为 3, 据此解答即可.

【解答】 解: 由三视图可知, 该几何体是长方体, 中间是空心圆柱体, 长方体的长宽高分别为 4, 4, 3, 圆柱体直径为 2, 高为 3,

长方体表面积: $4 \times 4 \times 2 + 4 \times 3 \times 4 = 80$, 圆柱体侧面积 $2\pi \times 3 = 6\pi$, 上下表面空心圆面积: 2π ,

$\therefore$ 这个几何体的表面积是: $80 + 6\pi - 2\pi = 80 + 4\pi$,

故选: B.

【点评】 本题考查了几何体的表面积, 熟练掌握三视图是解题的关键.

8. **【分析】** 利用根与系数的关系可得出 $x_1 + x_2 = -1$ 、 $x_1 \cdot x_2 = -3$, 将代数式 $x_2^3 - 4x_1^2 + 17$ 进行转化后得出 $(x_2 - 1)(x_2^2 + x_2 + 1) - 4x_1^2 + 18$, 再代入数据即可得出结论.

【解答】 解: $\because x_1, x_2$ 是一元二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个实数根,

$$\therefore x_1 + x_2 = -1, x_1 \cdot x_2 = -3, x^2 + x = 3,$$

$$\therefore x_2^3 - 4x_1^2 + 17 = x_2^3 - 1 - 4x_1^2 + 18 = (x_2 - 1)(x_2^2 + x_2 + 1) - 4x_1^2 + 18 = (-1 - x_1 - 1) \times 4 - 4x_1^2 + 18 = -8 - 4x_1 - 4x_1^2 + 18 = -8 - 4(x_1^2 + x_1) + 18 = 10 - 4 \times 3 = -2,$$

故选: A.

【点评】 本题考查了方程的解、根与系数的关系: 若 x_1, x_2 是一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) 的两根时, 则 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

9. **【分析】** 连接 OA 、 OD , 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴于点 F , 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E , 易证 $\triangle AFO \cong \triangle OED$ (AAS), 则 $OE = AF = \sqrt{3}$, $DE = OF = 2$, $D(\sqrt{3}, -2)$, 因为 B 、 D 关于原点对称, 所以 $B(-\sqrt{3}, 2)$.

【解答】 解: 如图, 连接 OA 、 OD , 过点 A 作 $AF \perp x$ 轴于点 F , 过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于

点 E ,

易证 $\triangle AFO \cong \triangle OED$ (AAS),

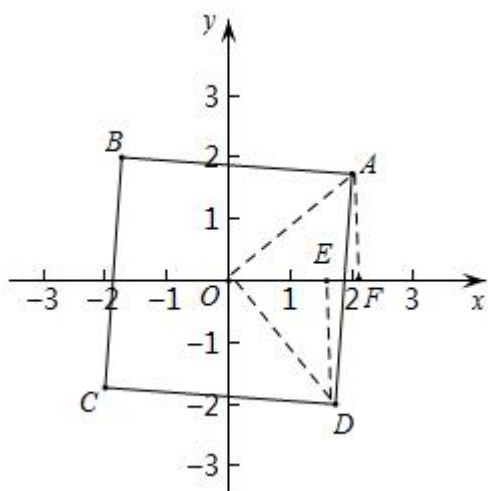
$$\therefore OE = AF = \sqrt{3}, DE = OF = 2,$$

$$\therefore D(\sqrt{3}, -2),$$

$\because B, D$ 关于原点对称,

$$\therefore B(-\sqrt{3}, 2),$$

故选: B .



【点评】 本题考查了正方形, 熟练运用正方形的性质、全等三角形的性质以及中心对称的性质是解题的关键.

10. **【分析】** ①利用换元法代入并化简;

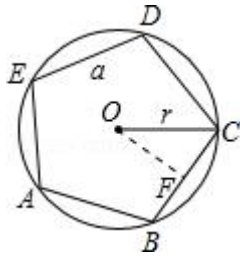
②作 $OF \perp BC$, 在 $\text{Rt}\triangle OCF$ 中, 利用三角函数求出 a 的长;

③这个圆锥母线长为 R , 利用圆锥的侧面展开图为一扇形, 这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长和弧长公式得到 $2\pi \cdot r = \frac{180 \cdot \pi \cdot R}{180}$, 然后解关于 R 的方程即可;

④根据二次函数图象的性质判断.

【解答】 解: ①设 $\frac{x^2+1}{x} = y$, 那么可以将原方程化为关于 y 的整式方程 $y^2 + y - 2 = 0$, 故正确;

②作 $OF \perp BC$.



$$\because \angle COF = 72^\circ \div 2 = 36^\circ,$$

$$\therefore CF = r \cdot \sin 36^\circ,$$

$$\therefore CB = 2r \sin 36^\circ, \text{ 即 } a = 2r \sin 36^\circ = 2r \cos 54^\circ.$$

故正确;

③设圆锥的高为 h , 底面半径为 r , 母线长为 R ,

$$\text{根据题意得 } 2\pi \cdot r = \frac{180 \cdot \pi \cdot R}{180},$$

$$\text{则 } R:r = 2:1.$$

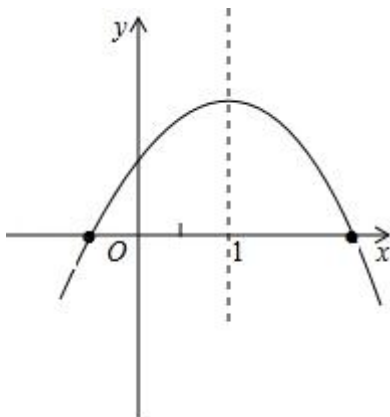
$$\text{由 } \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 h = \frac{\sqrt{3} \pi}{2} \text{ 得到 } h = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{所以 } h^2 + r^2 = R^2, \text{ 即 } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \frac{1}{4}R^2 = R^2, \text{ 则 } R = \frac{4}{3}$$

$$\text{即它的母线长是 } \frac{4}{3}.$$

故正确;

④二次函数 $y = ax^2 - 2ax + 1$ 的对称轴是 $x = 1$, 若 $a < 0$ 时, 如图:



$$\text{当 } x_1 < x_2 < 1 \text{ 时, } y_1 < y_2$$

$$\text{此时 } |x_1 - 1| > |x_2 - 1|, y_1 < y_2,$$

$$\text{所以 } a(y_1 - y_2) > 0.$$

故正确.

综上所述，正确的命题的个数为 4 个．

故选：D．

【点评】考查了命题与定理．考查了换元法解分式方程，弧长的计算，二次函数图象的性质，解直角三角形等知识，需要对相关知识有一个系统的掌握．

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分，本题要求把正确结果填在答题卡规定的横线上，不需要解答过程）

11. 【分析】首先提公因式 y ，再利用平方差进行分解即可．

【解答】解：原式 $= y(x^2 - 4y^2) = y(x - 2y)(x + 2y)$ ．

故答案为： $y(x - 2y)(x + 2y)$ ．

【点评】此题主要考查了提公因式法与公式法分解因式，要求灵活使用各种方法对多项式进行因式分解，一般来说，如果可以先提取公因式的要先提取公因式，再考虑运用公式法分解．

12. 【分析】由全等三角形的判定方法得出①②正确，③不正确．

【解答】解：①底边和顶角对应相等的两个等腰三角形全等；正确；

理由：已知：如图 1，2，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， $AB = AC$ ， $A'B' = A'C'$ ， $BC = BC$ ， $\angle A = \angle A'$ ，

求证： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，

证明：在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

$$\therefore \angle B = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\text{同理：}\angle B' = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A',$$

$$\because \angle A = \angle A',$$

$$\therefore \angle B = \angle B',$$

$$\because BC = B'C',$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' (AAS)$$

②两边及其中一边上的中线对应相等的两个三角形全等；正确；

理由：已知：如图 3，4

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中， AD ， $A'D'$ 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中线，且 $AD = A'D'$ ， $AB = A'B'$ ，

$$BC = B'C',$$

求证: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

证明: $\because AD, A'D'$ 是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的中线,

$$\therefore BD = \frac{1}{2}BC, B'D' = \frac{1}{2}B'C',$$

$$\because BC = B'C',$$

$$\therefore BD = B'D',$$

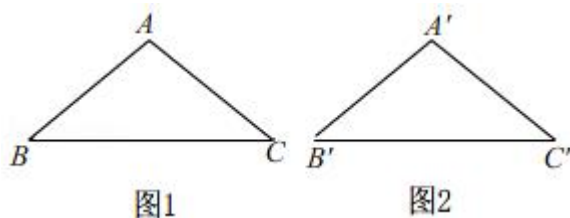
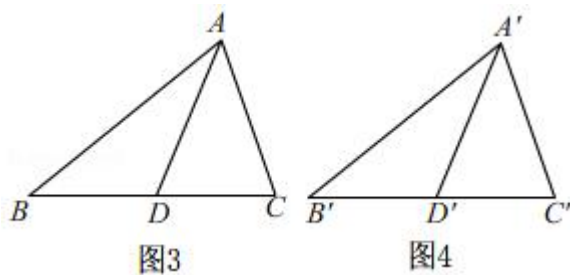
$$\because AB = A'B', AD = A'D',$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C' \text{ (SSS)}$$

③斜边和斜边上的中线对应相等的两个直角三角形全等; 不正确;

例如: 两直角三角形的斜边都是 10, 斜边的中线都是 5, 而其中一个直角三角形的两锐角是 30° 和 60° , 另一个直角三角形的两锐角是 40° 和 50°

故答案为: ①②.



【点评】 本题考查了命题与定理、全等三角形的判定方法; 熟练掌握全等三角形的判定方法是解题的关键.

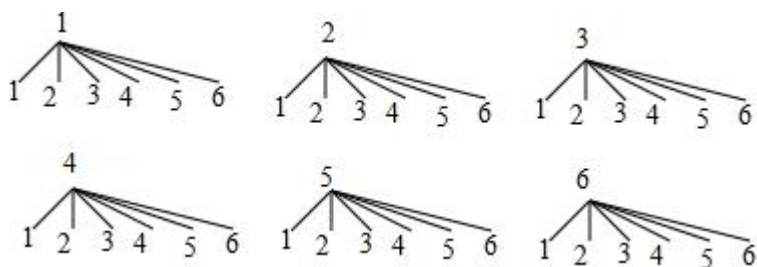
13. **【分析】** 画树状图展示所有 36 种等可能的结果数, 再找出至少有一枚骰子的点数是 6 的结果数, 然后根据概率公式求解.

【解答】 解: 画树状图如图所示:

共有 36 种等可能的结果数, 其中至少有一枚骰子的点数是 6 的结果数为 11,

所以至少有一枚骰子的点数是 6 的概率 $= \frac{11}{36}$.

故答案为: $\frac{11}{36}$.



【点评】本题考查了列表法与树状图法：利用列表法或树状图法展示所有等可能的结果 n ，再从中选出符合事件 A 或 B 的结果数目 m ，然后利用概率公式计算事件 A 或事件 B 的概率。

14. 【分析】利用一元一次方程的定义判断即可。

【解答】解：∵关于 x 的方程 $mx^{2m-1} + (m-1)x - 2 = 0$ 如果是一元一次方程，

∴当 $m = 1$ 时，方程为 $x - 2 = 0$ ，解得： $x = 2$ ；

当 $m = 0$ 时，方程为 $-x - 2 = 0$ ，解得： $x = -2$ ；

当 $2m - 1 = 0$ ，即 $m = \frac{1}{2}$ 时，方程为 $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x - 2 = 0$ ，

解得： $x = -3$ ，

故答案为： $x = 2$ 或 $x = -2$ 或 $x = -3$ 。

【点评】此题考查了一元一次方程的定义，熟练掌握一元一次方程的定义是解本题的关键。

15. 【分析】根据题意画出，根据已知条件可得到点 F 是 CD 的中点，通过作辅助线，将问题转化证 $\triangle HDG \sim \triangle BEG$ ，得出对应边成比例，由相似比转化为 BG 等于 BH 的三分之二，而 BH 可以通过勾股定理求出，使问题得以解决。

【解答】解：如图：延长 AD 、 BG 相交于点 H ，

∵正方形 $ABCD$ 的面积是 2，

∴ $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$ ，

又 ∵ $CE = \sqrt{2}$ ， $\triangle EFC \sim \triangle EAB$ ，

∴ $\frac{EC}{EB} = \frac{FC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，

即： F 是 CD 的中点，

∴ $AH \parallel BE$ ，

∴ $\angle H = \angle FBC$ ，

$\angle BCF = \angle HDF = 90^\circ$

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle HDF \quad (AAS),$$

$$\therefore DH = BC = \sqrt{2},$$

$$\because AH \parallel BE,$$

$$\therefore \angle H = \angle FBC, \quad \angle HDG = \angle BEG$$

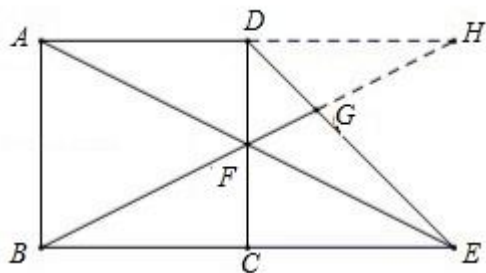
$$\therefore \triangle HDG \sim \triangle BEG,$$

$$\therefore \frac{DH}{BE} = \frac{1}{2} = \frac{HG}{BG},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ABH \text{ 中, } BH = \sqrt{AB^2 + AH^2} = \sqrt{10},$$

$$\therefore BG = \frac{2}{3}BH = \frac{2\sqrt{10}}{3},$$

$$\text{故答案为: } \frac{2\sqrt{10}}{3}$$



【点评】考查正方形的性质、全等三角形的性质和判定、相似三角形的性质以及勾股定理等知识的综合应用，转化思想方法的应用和画出相应的图形则显得尤为重要．

16. **【分析】**将已知转化为对任意实数 a , $3a^2 - 5ab + 2b^2 + 3 > 0$ 恒成立，利用 $\Delta < 0$ 即可求解．

【解答】解：由题意可知： $2b^2 - 5ab + 3a^2 > -3$ ，

$$\therefore 3a^2 - 5ab + 2b^2 + 3 > 0,$$

$\therefore$ 对任意实数 a , $3a^2 - 5ab + 2b^2 + 3 > 0$ 恒成立，

令 $y = 3a^2 - 5ab + 2b^2 + 3$ 是关于 a 的二次函数，函数开口向上，

当 $y > 0$ 恒成立，只需 $\Delta < 0$ ，

$$\therefore \Delta = 25b^2 - 12(2b^2 + 3) = b^2 - 36 < 0,$$

$$\therefore -6 < b < 6;$$

故答案为 $-6 < b < 6$ ．

【点评】本题考查二次函数与一元二次不等式的关系；熟练掌握判别式与一元二次不等式值的的关系是解题的关键．

三、解答题（本大题共 9 小题，满分 72 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤

17. 【分析】(1) 根据实数的混合运算法则计算；

(2) 根据分式的混合运算法则把原式化简，代入计算即可．

$$\begin{aligned} \text{【解答】解：(1)} & \left(1\frac{1}{2}\right) \div \left(-\frac{3}{4}\right) + \sqrt{3} \times \sqrt{12} - \left(\frac{1}{1-\sqrt{3}}\right)^{-2} \\ &= -\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} + \sqrt{3} \times \sqrt{12} - (1-\sqrt{3})^2 \\ &= -2+6-4+2\sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2)} & \left(\frac{5x+3y}{x^2-y^2} + \frac{2x}{y^2-x^2}\right) \div \frac{x}{3(x-y)} \\ &= \frac{5x+3y-2x}{x^2-y^2} \div \frac{x}{3(x-y)} \\ &= \frac{3(x+y)}{(x+y)(x-y)} \cdot \frac{3(x-y)}{x} \\ &= \frac{9}{x}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } x=3\sqrt{3}, y=\frac{1}{2} \text{ 时, 原式} = \frac{9}{3\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查的是分式的化简求值、实数的混合运算，掌握分式的混合运算法则、实数的混合运算法则是解题的关键．

18. 【分析】(1) 根据三角形中大角对大边，即可得到结论；

(2) 画出图形，写出已知，求证；过点 A 作直线 $MN \parallel BC$ ，根据平行线性质的性质得出 $\angle MAB = \angle B$ ， $\angle NAC = \angle C$ ，代入 $\angle MAB + \angle BAC + \angle NAC = 180^\circ$ 即可求出答案；

(3) 化简等式即可得到 $a^2 + c^2 = b^2$ ，根据勾股定理的逆定理即可得到结论．

【解答】解：(1) $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $a=6$ ， $b=8$ ， $c=12$ ，

$$\therefore \angle A + \angle B < \angle C;$$

(2) 如图，过点 B 作 $MN \parallel AC$ ，

$$\because MN \parallel AC,$$

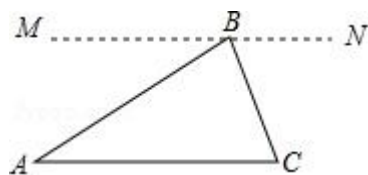
$$\therefore \angle MBA = \angle A, \angle NBC = \angle C \text{ (两直线平行, 内错角相等),}$$

$$\therefore \angle MBA + \angle ABC + \angle NBC = 180^\circ \text{ (平角的定义),}$$

$$\therefore \angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ \text{ (等量代换),}$$

即：三角形三个内角的和等于 180° ；

$$\begin{aligned}
 (3) \because \frac{a}{a-b+c} &= \frac{\frac{1}{2}(a+b+c)}{c}, \\
 \therefore ac &= \frac{1}{2}(a+b+c)(a-b+c) = \frac{1}{2}[(a^2+2ac+c^2) - b^2], \\
 \therefore 2ac &= a^2+2ac+c^2 - b^2, \\
 \therefore a^2+c^2 &= b^2, \\
 \therefore \triangle ABC &\text{ 是直角三角形.}
 \end{aligned}$$



【点评】 本题考查了三角形内角和定理以及平行线的性质，根据证明过程运用转化思想是解题的关键。

19. **【分析】** 首先把方程化为一般形式为 $2x^2 - 9x - 34 = 0$ ，然后变形为 $x^2 - \frac{9}{2}x = 17$ ，然后利用配方法解方程。

【解答】 解：原方程化为一般形式为 $2x^2 - 9x - 34 = 0$ ，

$$\begin{aligned}
 x^2 - \frac{9}{2}x &= 17, \\
 x^2 - \frac{9}{2}x + \frac{81}{16} &= 17 + \frac{81}{16}, \\
 (x - \frac{9}{4})^2 &= \frac{353}{16}, \\
 x - \frac{9}{4} &= \pm \frac{\sqrt{353}}{4}, \\
 \text{所以 } x_1 &= \frac{9+\sqrt{353}}{4}, \quad x_2 = \frac{9-\sqrt{353}}{4}.
 \end{aligned}$$

【点评】 本题考查了一元二次方程的解法。解一元二次方程常用的方法有直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，要根据方程的特点灵活选用合适的方法。

20. **【分析】** 过点 B 作 $BD \perp AC$ 于点 D ，利用锐角三角函数的定义求出 AD 及 CD 的长，进而可得出结论。

【解答】 解：过点 C 作 $CD \perp AB$ 于点 D ，

在 $\text{Rt}\triangle ACD$ 中， $\angle ACD = 30^\circ$ ，

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AC = 230\text{km}.$$

$$CD = \frac{\sqrt{3}}{2}AC = 230\sqrt{3}km.$$

∵ 丙地位于乙地北偏东 66° 方向,

在 $Rt\triangle BDC$ 中, $\angle CBD = 24^\circ$,

$$\therefore BD = \frac{CD}{\tan 24^\circ} = \frac{230\sqrt{3}}{\tan 24^\circ} (km).$$

$$\therefore AB = BD + AD = 230 + \frac{230\sqrt{3}}{\tan 24^\circ} (km).$$

答: 公路 AB 的长为 $(230 + \frac{230\sqrt{3}}{\tan 24^\circ}) km$.

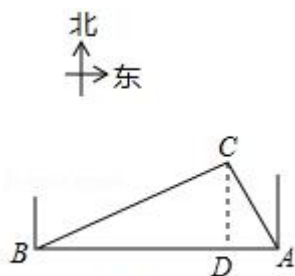


图 (2)

【点评】 本题考查的是解直角三角形的应用 - 方向角问题, 熟记锐角三角函数的定义是解答此题的关键.

21. **【分析】** (1) 计算出第二组数据的平均数, 则把这个平均数加上 1.5 得到得到这 20 户家庭的平均年收入; 用这 20 户家庭的平均年收入乘以 130 可估计全村年收入; 用样本中家庭年收入超过 1.5 万元的百分比表示全村家庭年收入超过 1.5 万元的百分比, 利用中位数的意义判断某家庭过去一年的收入是 1.89 万元, 该家庭的收入情况在全村处于什么水平; (2) 利用方差的意义可判断小王的结果错误, 然后根据方差公式计算第二组的方差即可.

【解答】 解: (1) 第二组数据的平均数为 $\frac{1}{20} (0.4 - 0.2 + 0.2 - 0.1 + 0.1 + 0 + 1.2 + 0.6 + 0 -$

$$0.6 + 1.1 + 0.5 + 0.6 - 0.5 + 0.3 + 0.7 + 0.9 + 1.7 - 0.2 + 1.3) = 0.4,$$

所以这 20 户家庭的平均年收入 $= 1.5 + 0.4 = 1.9$ (万元),

$$130 \times 1.9 = 247,$$

估计全村年收入为 247 万元;

全村家庭年收入超过 1.5 万元的百分比为 $\frac{13}{20} \times 100\% = 65\%$;

第二组数据排序为: $-0.6, -0.5, -0.2, -0.2, -0.1, 0, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5,$

$0.6, 0.6, 0.7, 0.9, 1.1, 1.2, 1.3, 1.7,$

$$\therefore \text{这组数据的中位数为} \frac{0.3+0.4}{2} = 0.35,$$

$$\therefore \text{原数据的中位数为: } 1.5+0.35 = 1.85,$$

某家庭过去一年的收入是 1.89 万元, 则该家庭的收入情况在全村处于中上游;

(2) 小王的结果不正确.

第一组数据的方差和第二组数据的方差一样.

$$\text{它们的方差} = \frac{1}{20}[(0.4 - 0.4)^2 + (-0.2 - 0.4)^2 + (0.2 - 0.4)^2 + \cdots + (1.3 - 0.4)^2] = 0.34.$$

【点评】 本题考查方差的定义: 一般地设 n 个数据, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$, 则方差 $s^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \cdots + (x_n - \bar{x})^2]$, 它反映了一组数据的波动大小, 方差越大, 波动性越大, 反之也成立. 也考查了样本估计整体.

22. **【分析】** (1) 设小王的实际车时间为 x 分钟, 小张的实际行车时间为 y 分钟, 根据两人付给滴滴快车的乘车费相同列方程求解即可;

(2) 根据“等候另一人的时间是他自己实际乘车时间的 1.5 倍, 且比另一人的实际乘车时间的一半多 8.5 分钟”列二元一次方程, 将其与 (1) 中的二元一次方程联立即可求解.

【解答】 解: (1) 设小王的实际行车时间为 x 分钟, 小张的实际行车时间为 y 分钟, 由题意得:

$$1.8 \times 6 + 0.3x = 1.8 \times 8.5 + 0.3y + 0.8 \times (8.5 - 7)$$

$$\therefore 10.8 + 0.3x = 16.5 + 0.3y$$

$$0.3(x - y) = 5.7$$

$$\therefore x - y = 19$$

$\therefore$ 这两辆滴滴快车的实际行车时间相差 19 分钟.

$$(2) \text{ 由 (1) 及题意得: } \begin{cases} x - y = 19 \\ 1.5y = \frac{1}{2}x + 8.5 \end{cases}$$

$$\text{化简得} \begin{cases} x - y = 19 \text{ ①} \\ 3y - x = 17 \text{ ②} \end{cases}$$

$$\text{①} + \text{②} \text{ 得 } 2y = 36$$

$$\therefore y = 18 \quad \text{③}$$

将③代入①得 $x = 37$

$\therefore$ 小王的实际乘车时间为 37 分钟, 小张的实际乘车时间为 18 分钟.

【点评】 本题考查了二元一次方程和二元一次方程组在实际问题中的应用, 根据等量关

系列方程或方程组是解题的关键.

23. 【分析】(1) 根据已知条件求出矩形的边长, 得 A 点坐标, 再用待定系数法求反比例函数解析式, 根据反比例函数的性质比较 y_1 与 y_2 的大小;

(2) 用待定系数求得一次函数的解析式, 再求一次函数图象与反比例函数图象的交点坐标便可根据函数图象的位置关系求得不等式的解集.

【解答】解: (1) 根据题意得: $OB+OC=7$, $OB^2+OC^2=5^2$,

$$\because OC > OB,$$

$$\therefore OB=3, OC=4,$$

$$\therefore A(3, 4),$$

把 $A(3, 4)$ 代入反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 中, 得 $m = 3 \times 4 = 12$,

$$\therefore \text{反比例函数为: } y = \frac{12}{x},$$

$\because$ 点 $(-a, y_1)$ 和 $(a+1, y_2)$ 在反比例函数的图象上,

$$\therefore -a \neq 0, \text{ 且 } a+1 \neq 0,$$

$$\therefore a \neq -1, \text{ 且 } a \neq 0,$$

$\therefore$ 当 $a < -1$ 时, $-a > 0$, $a+1 < 0$, 则点 $(-a, y_1)$ 和 $(a+1, y_2)$ 分别在第一象限和第三象限的反比例函数的图象上, 于是有 $y_1 > y_2$;

当 $-1 < a < 0$ 时, $-a > 0$, $a+1 > 0$, 若 $-a > a+1$, 即 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 时, $y_1 < y_2$, 若 $-a = a+1$, 即 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $y_1 = y_2$, 若 $-a < a+1$, 即 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $y_1 > y_2$;

当 $a > 0$ 时, $-a < 0$, $a+1 > 0$, 则点 $(-a, y_1)$ 和 $(a+1, y_2)$ 分别在第三象限和第一象限的反比例函数的图象上, 于是有 $y_1 < y_2$;

综上, 当 $a < -1$ 时, $y_1 > y_2$; 当 $-1 < a < -\frac{1}{2}$ 时, $y_1 < y_2$; 当 $a = -\frac{1}{2}$ 时, $y_1 = y_2$; 当 $-\frac{1}{2} < a < 0$ 时, $y_1 > y_2$; 当 $a > 0$ 时, $y_1 < y_2$.

(2) $\because$ 一次函数 $y = kx + b$ 的图象过点 $A(3, 4)$ 并与 x 轴交于点 $(-1, 0)$,

$$\therefore \begin{cases} 3k+b=4 \\ -k+b=0 \end{cases}, \text{ 解得, } \begin{cases} k=1 \\ b=1 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数的解析式为: $y = x + 1$;

$$\text{解方程组 } \begin{cases} y=x+1 \\ y=\frac{12}{x} \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} x_1=-4 \\ y_1=-3 \end{cases}, \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=4 \end{cases},$$

$\therefore$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图象与反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象相交于两点 $(-4, -3)$ 和 $(3, 4)$,

当一次函数 $y=kx+b$ 的图象在反比例函数 $y=\frac{m}{x}$ 的图象下方时, $x < -4$ 或 $0 < x < 3$,

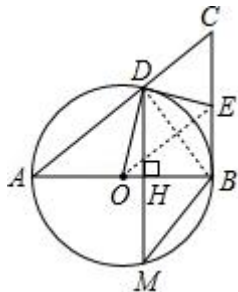
$\therefore kx+b - \frac{m}{x} < 0$ 成立时, 对应 x 的取值范围: $x < -4$ 或 $0 < x < 3$.

【点评】 本题是一次函数图象与反比例函数图象的交点问题, 主要考查了待定系数法求函数解析式, 一次函数图象与性质, 反比例函数图象与性质, 利用函数图象求不等式的解集, 矩形的性质, 勾股定理, 第(1)题的关键是求出矩形的边长, 难点是分情况讨论 y_1 与 y_2 的大小. 第(2)关键是观察函数图象的位置与自变量的取值范围的关系.

24. **【分析】** (1) 证明 $\angle EDB = \angle EBD$, $\angle BDC = 90^\circ$, E 为直角三角形 BDC 的中线, 即可求解;

(2) $\triangle AHD$ 和 $\triangle BMH$ 的外接圆面积之比为 3, 确定 $AD: BM = \sqrt{3}$, 即 $HM: BH = \sqrt{3}$, 得 $\angle BMH = 30^\circ = \angle BAC$, 即可求解.

【解答】 解: (1) 连接 BD 、 OE ,



$\because AB$ 是直径, 则 $\angle ADB = 90^\circ = \angle ADO + \angle ODB$,

$\because DE$ 是切线,

$\therefore \angle ODE = 90^\circ = \angle EDB + \angle BDO$,

$\therefore \angle EDB = \angle ADO = \angle CAB$,

$\because \angle ABC = 90^\circ$, 即 BC 是圆的切线,

$\therefore \angle DBC = \angle CAB$,

$\therefore \angle EDB = \angle EBD$, 而 $\angle BDC = 90^\circ$,

$\therefore E$ 为 BC 的中点;

(2) $\triangle AHD$ 和 $\triangle BMH$ 的外接圆面积之比为 3,

则两个三角形的外接圆的直径分别为 AD 、 BM ,

$$\therefore AD: BM = \sqrt{3},$$

而 $\triangle ADH \sim \triangle MBH$,

$$\therefore DH: BH = \sqrt{3},$$

则 $DH = HM$,

$$\therefore HM: BH = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BMH = 30^\circ = \angle BAC,$$

$\therefore \angle C = 60^\circ$, DE 是直角三角形的中线,

$$\therefore DE = CE,$$

$\therefore \triangle DEC$ 为等边三角形,

$$\odot O \text{ 的面积: } 12\pi = \left(\frac{1}{2}AB\right)^2\pi,$$

则 $AB = 4\sqrt{3}$, $\angle CAB = 30^\circ$,

$$\therefore BD = 2\sqrt{3}, BC = 4, AC = 8, \text{ 而 } OE = \frac{1}{2}AC = 4,$$

四边形 $OBED$ 的外接圆面积 $S_2 = \pi(2)^2 = 4\pi$,

等边三角形 $\triangle DEC$ 边长为 2, 则其内切圆的半径为: $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 面积为 $\frac{\pi}{3}$,

故 $\triangle DEC$ 的内切圆面积 S_1 和四边形 $OBED$ 的外接圆面积 S_2 的比为: $\frac{1}{12}$.

【点评】 本题为圆的综合运用题, 涉及到三角形的外接圆和内切圆的相关知识, 本题的关键是通过 $\triangle AHD$ 和 $\triangle BMH$ 的外接圆面积之比为 3, 确定 $\angle BMH = 30^\circ = \angle BAC$, 进而求解.

25. **【分析】** (1) 把点 A 坐标代入一次函数解析式即求得 k 的值; 把点 A 坐标代入二次函数解析式, 且把 $a = b$ 代入, 求得 $c = -2a$, 所有二次函数解析式为 $y = ax^2 - ax - 2a$, 令 $y = 0$ 即求得与 x 轴交点的坐标.

(2) 由 (1) 得直线解析式为 $y = -2x + 4$, 抛物线解析式为 $y = ax^2 - ax - 2a$, 两方程联立消去 y 后, 得到关于 x 的一元二次方程, 求得其 $\Delta = (3a + 2)^2$. 由于 $a > c$, $c = -2a$, 求得 $a > 0$, 故 $\Delta = (3a + 2)^2 > 0$, 方程有两个不相等实数根, 即直线与抛物线除了点 A 还有另一个交点.

(3) 由 $c < a \leq c + 3$ 和 $c = -2a$ 求得 $0 < a \leq 1$, 故抛物线开口向上, 可画出抛物线与直线的大致图象. 联立直线与抛物线解方程即求得点 B 坐标 (用 a 表示). 将抛物线解析式配

方求得顶点 M 和对称轴，求抛物线对称轴与直线交点 N 的坐标，点 N 纵坐标减去点 M 纵坐标得 MN 的长，进而能用含 a 的式子表示 $S_{\triangle AMN}$ 与 $S_{\triangle BMN}$ ，代入即写出 S 关于 a 的函数关系式。由 $0 < a \leq 1$ 得到当 $a = 1$ 时， S 能有最大值，并能求出最大值。

【解答】解：（1）把点 $A(2, 0)$ 代入 $y = kx + 4$ 得： $2k + 4 = 0$

$$\therefore k = -2$$

$$\therefore \text{一次函数的解析式为 } y = -2x + 4$$

$\because$ 二次函数 $y = ax^2 - bx + c$ 的图象过点 $A(2, 0)$ ，且 $a = b$

$$\therefore 4a - 2a + c = 0$$

$$\text{解得： } c = -2a$$

$$\therefore \text{二次函数解析式为 } y = ax^2 - ax - 2a \quad (a \neq 0)$$

$$\text{当 } ax^2 - ax - 2a = 0, \text{ 解得： } x_1 = 2, x_2 = -1$$

$$\therefore \text{二次函数与 } x \text{ 轴交点坐标为 } (2, 0), (-1, 0).$$

（2）证明：由（1）得：直线解析式为 $y = -2x + 4$ ，抛物线解析式为 $y = ax^2 - ax - 2a$

$$\begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = ax^2 - ax - 2a \end{cases}$$

$$\text{整理得： } ax^2 + (2 - a)x - 2a - 4 = 0$$

$$\therefore \Delta = (2 - a)^2 - 4a(-2a - 4) = a^2 - 4a + 4 + 8a^2 + 16a = 9a^2 + 12a + 4 = (3a + 2)^2$$

$$\because a > c, c = -2a$$

$$\therefore a > -2a$$

$$\therefore a > 0$$

$$\therefore 3a + 2 > 0$$

$$\therefore \Delta = (3a + 2)^2 > 0$$

$\therefore$ 关于 x 的一元二次方程有两个不相等的实数根

$\therefore$ 直线与抛物线还有另一个异于点 A 的交点

$$(3) \because c < a \leq c + 3, c = -2a$$

$$\therefore -2a < a \leq -2a + 3$$

$$\therefore 0 < a \leq 1, \text{ 抛物线开口向上}$$

$$\therefore \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = ax^2 - ax - 2a \end{cases} \quad \text{整理得: } ax^2 + (2-a)x - 2a - 4 = 0, \text{ 且 } \Delta = (3a+2)^2 > 0$$

$$\therefore x = \frac{-(2-a) \pm \sqrt{(3a+2)^2}}{2a} = \frac{-(2-a) \pm (3a+2)}{2a}$$

$$\therefore x_1 = 2 \text{ (即点 } A \text{ 横坐标)}, x_2 = -1 - \frac{2}{a}$$

$$\therefore y_2 = -2\left(-1 - \frac{2}{a}\right) + 4 = \frac{4}{a} + 6$$

$$\therefore \text{直线 } y = kx + 4 \text{ 与抛物线 } y = ax^2 - bx + c \text{ 的另一个交点 } B \text{ 的坐标为 } \left(-1 - \frac{2}{a}, \frac{4}{a} + 6\right)$$

$$\therefore \text{抛物线 } y = ax^2 - ax - 2a = a\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}a$$

$$\therefore \text{顶点 } M\left(\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}a\right), \text{ 对称轴为直线 } x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{抛物线对称轴与直线 } y = -2x + 4 \text{ 的交点 } N\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$\therefore \text{如图, } MN = 3 - \left(-\frac{9}{4}a\right) = 3 + \frac{9}{4}a$$

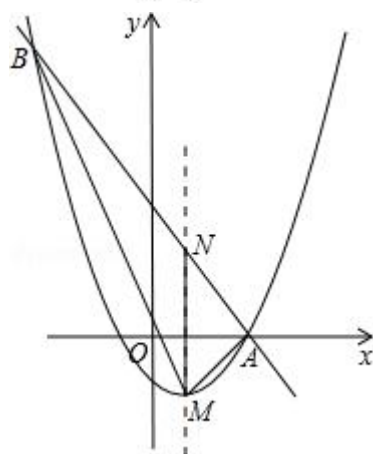
$$\begin{aligned} \therefore S &= \frac{25}{9}S_{\triangle AMN} - S_{\triangle BMN} = \frac{25}{9} \times \frac{1}{2}MN\left(x_A - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}MN\left(\frac{1}{2} - x_B\right) = \frac{25}{18}\left(3 + \frac{9}{4}a\right)\left(2 - \frac{1}{2}\right) \\ &- \frac{1}{2}\left(3 + \frac{9}{4}a\right)\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{2}{a}\right) = \left(3 + \frac{9}{4}a\right)\left(\frac{75}{36} - \frac{3}{4} - \frac{1}{a}\right) = 3a - \frac{3}{a} + \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore 0 < a \leq 1$$

$$\therefore 0 < 3a \leq 3, \quad -\frac{3}{a} \leq -3$$

$$\therefore \text{当 } a = 1 \text{ 时, } 3a = 3, \quad -\frac{3}{a} = -3 \text{ 均取得最大值}$$

$$\therefore S = 3a - \frac{3}{a} + \frac{7}{4} \text{ 有最大值, 最大值为 } \frac{7}{4}.$$



【点评】 本题考查了二次函数的图象与性质，一次函数的图象与性质，解一元二次方程，

一元二次方程根与系数的关系，不等式的应用．其中第（1）（2）题求解的结论是没有附加条件的，故在后续证明或计算时能直接使用．在没有图象的情况下考查二次函数和一次函数的相关性质，体现数形结合的应用，在解题时要根据题意画出大致图象再进行解题．