

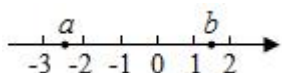
2019 年内蒙古包头市中考数学试卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分.

1. (3 分) 计算 $|\sqrt{9}| + (\frac{1}{3})^{-1}$ 的结果是 ()

- A. 0 B. $\frac{8}{3}$ C. $\frac{10}{3}$ D. 6

2. (3 分) 实数 a, b 在数轴上的对应点的位置如图所示. 下列结论正确的是 ()

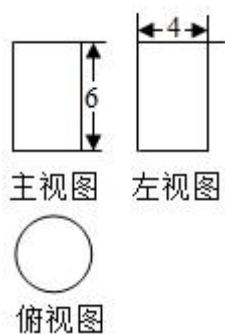


- A. $a > b$ B. $a > -b$ C. $-a > b$ D. $-a < b$

3. (3 分) 一组数据 2, 3, 5, x , 7, 4, 6, 9 的众数是 4, 则这组数据的中位数是 ()

- A. 4 B. $\frac{9}{2}$ C. 5 D. $\frac{11}{2}$

4. (3 分) 一个圆柱的三视图如图所示, 若其俯视图为圆, 则这个圆柱的体积为 ()



- A. 24 B. 24π C. 96 D. 96π

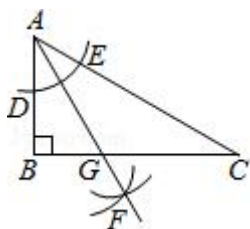
5. (3 分) 在函数 $y = \frac{3}{x-2} - \sqrt{x+1}$ 中, 自变量 x 的取值范围是 ()

- A. $x > -1$ B. $x \geq -1$ C. $x > -1$ 且 $x \neq 2$ D. $x \geq -1$ 且 $x \neq 2$

6. (3 分) 下列说法正确的是 ()

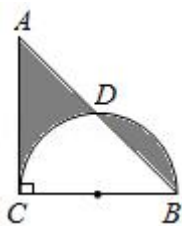
- A. 立方根等于它本身的数一定是 1 和 0
B. 顺次连接菱形四边中点得到的四边形是矩形
C. 在函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中, y 的值随着 x 值的增大而增大
D. 如果两个圆周角相等, 那么它们所对的弧长一定相等

7. (3 分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, 以点 A 为圆心, 适当长为半径画弧, 分别交 AB, AC 于点 D, E , 再分别以点 D, E 为圆心, 大于 $\frac{1}{2}DE$ 为半径画弧, 两弧交于点 F , 作射线 AF 交边 BC 于点 G , 若 $BG = 1, AC = 4$, 则 $\triangle ACG$ 的面积是 ()



- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. $\frac{5}{2}$

8. (3分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 2\sqrt{2}$, 以 BC 为直径作半圆, 交 AB 于点 D , 则阴影部分的面积是 ()



- A. $\pi - 1$ B. $4 - \pi$ C. $\sqrt{2}$ D. 2

9. (3分) 下列命题:

- ①若 $x^2 + kx + \frac{1}{4}$ 是完全平方式, 则 $k = 1$;
 ②若 $A(2, 6)$, $B(0, 4)$, $P(1, m)$ 三点在同一直线上, 则 $m = 5$;
 ③等腰三角形一边上的中线所在的直线是它的对称轴;
 ④一个多边形的内角和是它的外角和的 2 倍, 则这个多边形是六边形.

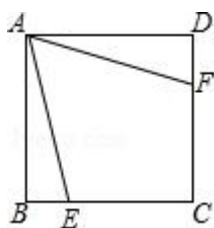
其中真命题个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. (3分) 已知等腰三角形的三边长分别为 a 、 b 、4, 且 a 、 b 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 12x + m + 2 = 0$ 的两根, 则 m 的值是 ()

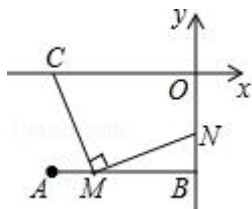
- A. 34 B. 30 C. 30 或 34 D. 30 或 36

11. (3分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 1$, 点 E , F 分别在边 BC 和 CD 上, $AE = AF$, $\angle EAF = 60^\circ$, 则 CF 的长是 ()



- A. $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\sqrt{3}-1$ D. $\frac{2}{3}$

12. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知 $A(-3, -2)$, $B(0, -2)$, $C(-3, 0)$, M 是线段 AB 上的一个动点, 连接 CM , 过点 M 作 $MN \perp MC$ 交 y 轴于点 N , 若点 M 、 N 在直线 $y=kx+b$ 上, 则 b 的最大值是 ()



- A. $-\frac{7}{8}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. -1 D. 0

二、填空题: 本大题有 6 小题, 每小题 3 分, 共 24 分.

13. (3分) 2018 年我国国内生产总值 (GDP) 是 900309 亿元, 首次突破 90 万亿大关, 90 万亿用科学记数法表示为_____.

14. (3分) 已知不等式组 $\begin{cases} 2x+9 > -6x+1 \\ x-k > 1 \end{cases}$ 的解集为 $x > -1$, 则 k 的取值范围是_____.

15. (3分) 化简: $1 - \frac{a-1}{a+2} \div \frac{a^2-1}{a^2+4a+4} =$ _____.

16. (3分) 甲、乙两班举行数学知识竞赛, 参赛学生的竞赛得分统计结果如下表:

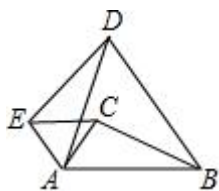
班级	参赛人数	平均数	中位数	方差
甲	45	83	86	82
乙	45	83	84	135

某同学分析上表后得到如下结论:

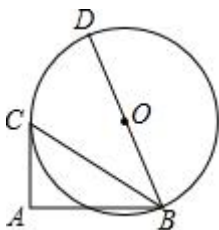
- ①甲、乙两班学生的平均成绩相同;
 ②乙班优秀的人数少于甲班优秀的人数 (竞赛得分 ≥ 85 分为优秀);
 ③甲班成绩的波动性比乙班小.

上述结论中正确的是_____. (填写所有正确结论的序号)

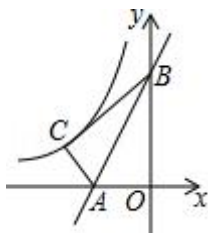
17. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle CAB = 55^\circ$, $\angle ABC = 25^\circ$, 在同一平面内, 将 $\triangle ABC$ 绕 A 点逆时针旋转 70° 得到 $\triangle ADE$, 连接 EC , 则 $\tan \angle DEC$ 的值是_____.



18. (3分) 如图, BD 是 $\odot O$ 的直径, A 是 $\odot O$ 外一点, 点 C 在 $\odot O$ 上, AC 与 $\odot O$ 相切于点 C , $\angle CAB = 90^\circ$, 若 $BD = 6$, $AB = 4$, $\angle ABC = \angle CBD$, 则弦 BC 的长为_____.



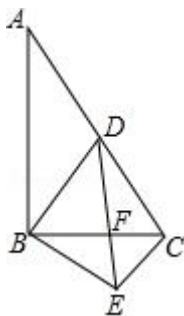
19. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知 $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, 将 $\triangle ABO$ 沿直线 AB 翻折后得到 $\triangle ABC$, 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x < 0$) 的图象经过点 C , 则 $k =$ _____.



20. (3分) 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BC = 3$, D 为斜边 AC 的中点, 连接 BD , 点 F 是 BC 边上的动点 (不与点 B 、 C 重合), 过点 B 作 $BE \perp BD$ 交 DF 延长线交于点 E , 连接 CE , 下列结论:

- ①若 $BF = CF$, 则 $CE^2 + AD^2 = DE^2$;
- ②若 $\angle BDE = \angle BAC$, $AB = 4$, 则 $CE = \frac{15}{8}$;
- ③ $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBE$ 一定相似;
- ④若 $\angle A = 30^\circ$, $\angle BCE = 90^\circ$, 则 $DE = \sqrt{21}$.

其中正确的是_____ (填写所有正确结论的序号)



三、解答题：本大题共有 6 小题，共 60 分.

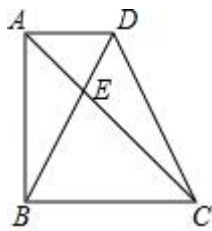
21. (8 分) 某校为了解九年级学生的体育达标情况，随机抽取 50 名九年级学生进行体育达标项目测试，测试成绩如下表，请根据表中的信息，解答下列问题：

测试成绩(分)	23	25	26	28	30
人数(人)	4	18	15	8	5

- (1) 该校九年级有 450 名学生，估计体育测试成绩为 25 分的学生人数；
- (2) 该校体育老师要对本次抽测成绩为 23 分的甲、乙、丙、丁 4 名学生进行分组强化训练，要求两人一组，求甲和乙恰好分在同一组的概率。(用列表或树状图方法解答)

22. (8 分) 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $AB = BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ， AC 交 BD 于点 E ， $\angle ABD = 30^\circ$ ， $AD = \sqrt{3}$ ，求线段 AC 和 BE 的长.

(注： $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$)

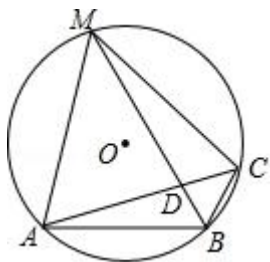


23. (10 分) 某出租公司有若干辆同一型号的货车对外出租，每辆货车的日租金实行淡季、旺季两种价格标准，旺季每辆货车的日租金比淡季上涨 $\frac{1}{3}$ 。据统计，淡季该公司平均每天有 10 辆货车未出租，日租金总收入为 1500 元；旺季所有的货车每天能全部租出，日租金总收入为 4000 元.

- (1) 该出租公司这批对外出租的货车共有多少辆？淡季每辆货车的日租金多少元？
- (2) 经市场调查发现，在旺季如果每辆货车的日租金每上涨 20 元，每天租出去的货车就会减少 1 辆，不考虑其它因素，每辆货车的日租金上涨多少元时，该出租公司的日租金总收入最高？

24. (10 分) 如图，在 $\odot O$ 中， B 是 $\odot O$ 上的一点， $\angle ABC = 120^\circ$ ，弦 $AC = 2\sqrt{3}$ ，弦 BM 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于点 D ，连接 MA ， MC .

- (1) 求 $\odot O$ 半径的长；
- (2) 求证： $AB + BC = BM$.



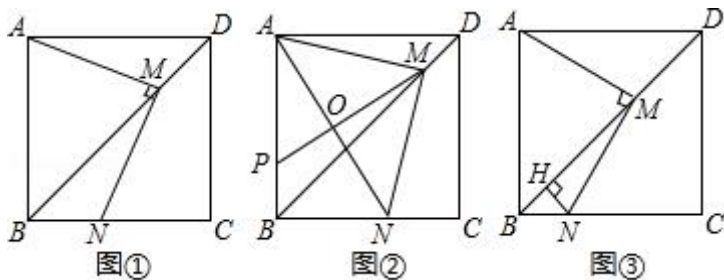
25. (12分) 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 6$, M 是对角线 BD 上的一个动点 ($0 < DM < \frac{1}{2}BD$), 连接 AM , 过点 M 作 $MN \perp AM$ 交 BC 于点 N .

(1) 如图①, 求证: $MA = MN$;

(2) 如图②, 连接 AN , O 为 AN 的中点, MO 的延长线交边 AB 于点 P , 当 $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{13}{18}$

时, 求 AN 和 PM 的长;

(3) 如图③, 过点 N 作 $NH \perp BD$ 于 H , 当 $AM = 2\sqrt{5}$ 时, 求 $\triangle HMN$ 的面积.



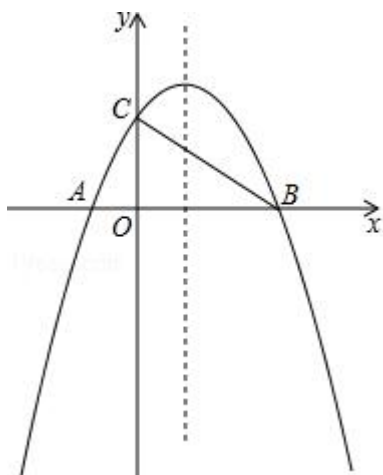
26. (12分) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ ($a \neq 0$) 与 x 轴交于 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点, 与 y 轴交于点 C , 连接 BC .

(1) 求该抛物线的解析式, 并写出它的对称轴;

(2) 点 D 为抛物线对称轴上一点, 连接 CD 、 BD , 若 $\angle DCB = \angle CBD$, 求点 D 的坐标;

(3) 已知 $F(1, 1)$, 若 $E(x, y)$ 是抛物线上一个动点 (其中 $1 < x < 2$), 连接 CE 、 CF 、 EF , 求 $\triangle CEF$ 面积的最大值及此时点 E 的坐标.

(4) 若点 N 为抛物线对称轴上一点, 抛物线上是否存在点 M , 使得以 B , C , M , N 为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 请直接写出所有满足条件的点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2019 年内蒙古包头市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分.

1. 【分析】先根据二次根式的性质，绝对值的秘技，负指数幂的法则进行计算，然后进行有理数的加法运算.

【解答】解：原式 $= 3+3 = 6$.

故选：D.

【点评】本题是实数的运算，主要考查了二次根式的性质，绝对值的性质，负指数幂的运算，有理数的加法，关键是熟记法则.

2. 【分析】根据数轴可以发现 $a < b$ ，且 $-3 < a < -2$ ， $1 < b < 2$ ，由此即可判断以上选项正确与否.

【解答】解： $\because -3 < a < -2$ ， $1 < b < 2$ ， $\therefore$ 答案 A 错误；

$\because a < 0 < b$ ，且 $|a| > |b|$ ， $\therefore a+b < 0$ ， $\therefore a < -b$ ， $\therefore$ 答案 B 错误；

$\therefore -a > b$ ，故选项 C 正确，选项 D 错误.

故选：C.

【点评】本题考查的是数轴与实数的大小比较等相关内容，会利用数轴比较实数的大小是解决问题的关键.

3. 【分析】根据题意由众数是 4，可知 $x = 4$ ，然后根据中位数的定义求解即可.

【解答】解： $\because$ 这组数据的众数 4，

$\therefore x = 4$ ，

将数据从小到大排列为：2，3，4，4，5，6，7，9

则中位数为：4.5.

故选：B.

【点评】本题考查了众数、中位数的定义，属于基础题，掌握基本定义是关键.

4. 【分析】由已知三视图为圆柱，首先得到圆柱底面半径，从而根据圆柱体积 = 底面积乘高求出它的体积.

【解答】解：由三视图可知圆柱的底面直径为 4，高为 6，

$\therefore$ 底面半径为 2，

$\therefore V = \pi r^2 h = 2^2 \times 6 \cdot \pi = 24\pi$ ，

故选：B.

【点评】此题考查的是圆柱的体积及由三视图判断几何体，关键是先判断圆柱的底面半径和高，然后求其体积.

5. 【分析】根据分母不等于0和二次根式的被开方数非负，列出不等式组，进行解答便可.

【解答】解：根据题意得，

$$\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+1 \geq 0 \end{cases},$$

解得， $x \geq -1$ ，且 $x \neq 2$.

故选：D.

【点评】本题考查的知识点为：分式有意义，分母不为0. 二次根式有意义，被开方数是非负数. 自变量的取值范围必须使含有自变量的表达式都有意义：①当表达式的分母不含有自变量时，自变量取全体实数. 例如 $y = 2x + 13$ 中的 x . ②当表达式的分母中含有自变量时，自变量取值要使分母不为零. 例如 $y = x + 2x - 1$. ③当函数的表达式是偶次根式时，自变量的取值范围必须使被开方数不小于零. ④对于实际问题中的函数关系式，自变量的取值除必须使表达式有意义外，还要保证实际问题有意义.

6. 【分析】根据立方根的定义，中点四边形，一次函数的性质，弧，弦，圆心角的关系即可得到结论

【解答】解：A、立方根等于它本身的数一定是 ± 1 和 0，故错误；

B、顺次连接菱形四边中点得到的四边形是矩形，故正确；

C、在函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 中，当 $k > 0$ 时， y 的值随着 x 值的增大而增大，故错误；

D、在同圆或等圆中，如果两个圆周角相等，那么它们所对的弧长一定相等，故错误.

故选：B.

【点评】本题考查了立方根的定义，中点四边形，一次函数的性质，弧，弦，圆心角的关系，熟练掌握各知识点是解题的关键.

7. 【分析】利用基本作图得到 AG 平分 $\angle BAC$ ，利用角平分线的性质得到 G 点到 AC 的距离为 1，然后根据三角形面积公式计算 $\triangle ACG$ 的面积.

【解答】解：由作法得 AG 平分 $\angle BAC$ ，

$\therefore G$ 点到 AC 的距离等于 BG 的长，即 G 点到 AC 的距离为 1，

所以 $\triangle ACG$ 的面积 $= \frac{1}{2} \times 4 \times 1 = 2$.

故选：C.

【点评】 本题考查了作图 - 基本作图：熟练掌握基本作图（作一条线段等于已知线段；作一个角等于已知角；作已知线段的垂直平分线；作已知角的角平分线；过一点作已知直线的垂线）. 也考查了角平分线的性质.

8. 【分析】 连接 CD ，根据圆周角定理得到 $CD \perp AB$ ，推出 $\triangle ACB$ 是等腰直角三角形，得到 $CD = BD$ ，根据三角形的面积公式即可得到结论.

【解答】 解：连接 CD ，

$\because BC$ 是半圆的直径，

$\therefore CD \perp AB$ ，

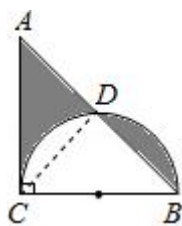
$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore \triangle ACB$ 是等腰直角三角形，

$\therefore CD = AD = 2$ ，

$\therefore$ 阴影部分的面积 $= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$ ，

故选：D.



【点评】 本题考查了扇形的面积的计算，等腰直角三角形的性质，正确的作出辅助线是解题的关键.

9. 【分析】 利用完全平方公式对①进行判断；利用待定系数法求出直线 AB 的解析式，然后求出 m ，则可对②进行判断；根据等腰三角形的性质对③进行判断；根据多边形的内角和和外角和对④进行判断.

【解答】 解：若 $x^2 + kx + \frac{1}{4}$ 是完全平方式，则 $k = \pm 1$ ，所以①错误；

若 $A(2, 6)$ ， $B(0, 4)$ ， $P(1, m)$ 三点在同一直线上，而直线 AB 的解析式为 $y = x + 4$ ，则 $x = 1$ 时， $m = 5$ ，所以②正确；

等腰三角形底边上的中线所在的直线是它的对称轴，所以③错误；

一个多边形的内角和是它的外角和的 2 倍，则这个多边形是六边形，所以④正确.

故选：B.

【点评】 本题考查了命题与定理：命题的“真”“假”是就命题的内容而言. 任何一个命

题非真即假. 要说明一个命题的正确性, 一般需要推理、论证, 而判断一个命题是假命题, 只需举出一个反例即可.

10. 【分析】分三种情况讨论, ①当 $a = 4$ 时, ②当 $b = 4$ 时, ③当 $a = b$ 时; 结合韦达定理即可求解;

【解答】解: 当 $a = 4$ 时, $b < 8$,

$\because a, b$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 12x + m + 2 = 0$ 的两根,

$$\therefore 4 + b = 12,$$

$\therefore b = 8$ 不符合;

当 $b = 4$ 时, $a < 8$,

$\because a, b$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 12x + m + 2 = 0$ 的两根,

$$\therefore 4 + a = 12,$$

$\therefore a = 8$ 不符合;

当 $a = b$ 时,

$\because a, b$ 是关于 x 的一元二次方程 $x^2 - 12x + m + 2 = 0$ 的两根,

$$\therefore 12 = 2a = 2b,$$

$$\therefore a = b = 6,$$

$$\therefore m + 2 = 36,$$

$$\therefore m = 34;$$

故选: A.

【点评】本题考查一元二次方程根与系数的关系; 根据等腰三角形的性质进行分类讨论, 结合韦达定理和三角形三边关系进行解题是关键.

11. 【分析】由正方形的性质得出 $\angle B = \angle D = \angle BAD = 90^\circ$, $AB = BC = CD = AD = 1$, 证明 $\text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ADF$ 得出 $\angle BAE = \angle DAF$, 求出 $\angle DAF = 15^\circ$, 在 AD 上取一点 G , 使 $\angle GFA = \angle DAF = 15^\circ$, 则 $AG = FG$, $\angle DGF = 30^\circ$, 由直角三角形的性质得出 $DF = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}AG$, $DG = \sqrt{3}DF$, 设 $DF = x$, 则 $DG = \sqrt{3}x$, $AG = FG = 2x$, 则 $2x + \sqrt{3}x = 1$, 解得: $x = 2 - \sqrt{3}$, 得出 $DF = 2 - \sqrt{3}$, 即可得出结果.

【解答】解: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle B = \angle D = \angle BAD = 90^\circ, AB = BC = CD = AD = 1,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 和 $\text{Rt}\triangle ADF$ 中, $\begin{cases} AE=AF \\ AB=AD \end{cases}$,

$\therefore \text{Rt}\triangle ABE \cong \text{Rt}\triangle ADF$ (HL),

$\therefore \angle BAE = \angle DAF$,

$\because \angle EAF = 60^\circ$,

$\therefore \angle BAE + \angle DAF = 30^\circ$,

$\therefore \angle DAF = 15^\circ$,

在 AD 上取一点 G , 使 $\angle GFA = \angle DAF = 15^\circ$, 如图所示:

$\therefore AG = FG$, $\angle DGF = 30^\circ$,

$\therefore DF = \frac{1}{2}FG = \frac{1}{2}AG$, $DG = \sqrt{3}DF$,

设 $DF = x$, 则 $DG = \sqrt{3}x$, $AG = FG = 2x$,

$\therefore AG + DG = AD$,

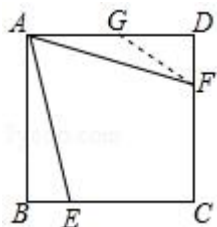
$\therefore 2x + \sqrt{3}x = 1$,

解得: $x = 2 - \sqrt{3}$.

$\therefore DF = 2 - \sqrt{3}$,

$\therefore CF = CD - DF = 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$;

故选: C.



【点评】 本题考查了正方形的性质、全等三角形的判定与性质、等腰三角形的判定、直角三角形的性质等知识; 熟练掌握正方形的性质, 证明三角形全等是解题的关键.

12. **【分析】** 当点 M 在 AB 上运动时, $MN \perp MC$ 交 y 轴于点 N , 此时点 N 在 y 轴的负半轴移动, 定有 $\triangle AMC \sim \triangle NBM$; 只要求出 ON 的最小值, 也就是 BN 最大值时, 就能确定点 N 的坐标, 而直线 $y = kx + b$ 与 y 轴交于点 $N(0, b)$, 此时 b 的值最大, 因此根据相似三角形的对应边成比例, 设未知数构造二次函数, 通过求二次函数的最值得以解决.

【解答】 解: 连接 AC , 则四边形 $ABOC$ 是矩形, $\therefore \angle A = \angle ABO = 90^\circ$,

又 $\because MN \perp MC$,

$\therefore \angle CMN = 90^\circ$,

$$\therefore \angle AMC = \angle MNB,$$

$$\therefore \triangle AMC \sim \triangle NBM,$$

$$\therefore \frac{AC}{MB} = \frac{AM}{BN},$$

设 $BN = y$, $AM = x$. 则 $MB = 3 - x$, $ON = 2 - y$,

$$\therefore \frac{2}{3-x} = \frac{x}{y},$$

$$\text{即: } y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x$$

$$\therefore \text{当 } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{3}{2}}{2 \times (-\frac{1}{2})} = \frac{3}{2} \text{ 时, } y_{\text{最大}} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8},$$

$\therefore$ 直线 $y = kx + b$ 与 y 轴交于 $N(0, b)$

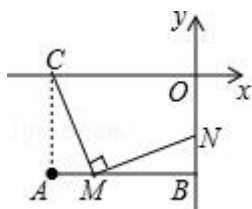
当 BN 最大, 此时 ON 最小, 点 $N(0, b)$ 越往上, b 的值最大,

$$\therefore ON = OB - BN = 2 - \frac{9}{8} = \frac{7}{8},$$

此时, $N(0, \frac{7}{8})$

b 的最大值为 $\frac{7}{8}$.

故选: A.



【点评】 综合考查相似三角形的性质、二次函数的性质、二次函数的最值以及一次函数的性质等知识; 构造相似三角形、利用二次函数的最值是解题的关键所在.

二、填空题: 本大题有 6 小题, 每小题 3 分, 共 24 分.

13. **【分析】** 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 10 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】 解: 90 万亿用科学记数法表示成: 9.0×10^{13} ,

故答案为: 9.0×10^{13} .

【点评】 此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

14. 【分析】 求出每个不等式的解集，根据已知得出关于 k 的不等式，求出不等式的解集即可.

【解答】 解：
$$\begin{cases} 2x+9 > -6x+1 & \text{①} \\ x-k > 1 & \text{②} \end{cases}$$

由①得 $x > -1$;

由②得 $x > k+1$.

$\therefore$ 不等式组 $\begin{cases} 2x+9 > -6x+1 \\ x-k > 1 \end{cases}$ 的解集为 $x > -1$,

$\therefore k+1 \leq -1$,

解得 $k \leq -2$.

故答案为 $k \leq -2$.

【点评】 本题考查了解一元一次不等式组的应用，解此题的关键是能根据不等式的解集和已知得出关于 k 的不等式，难度适中.

15. 【分析】 根据分式混合运算的法则计算即可.

【解答】 解： $1 - \frac{a-1}{a+2} \div \frac{a^2-1}{a^2+4a+4} = 1 - \frac{a-1}{a+2} \cdot \frac{(a+2)^2}{(a+1)(a-1)} = 1 - \frac{a+2}{a+1} = -\frac{1}{a+1}$,

故答案为： $-\frac{1}{a+1}$.

【点评】 本题考查了分式的混合运算，熟记法则是解题的关键.

16. 【分析】 根据平均数、中位数、方差的定义即可判断;

【解答】 解：由表格可知，甲、乙两班学生的成绩平均成绩相同;

根据中位数可以确定，乙班优秀的人数少于甲班优秀的人数;

根据方差可知，甲班成绩的波动性比乙班小.

故①②③正确，

故答案为：①②③.

【点评】 本题考查平均数、中位数、方差等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型.

17. 【分析】 根据旋转的性质以及锐角三角函数的定义即可求出答案.

【解答】 解：由旋转的性质可知： $AE = AC$ ， $\angle CAE = 70^\circ$ ，

$\therefore \angle ACE = \angle AEC = 55^\circ$ ，

又 $\because \angle AED = \angle ACB$, $\angle CAB = 55^\circ$, $\angle ABC = 25^\circ$,

$$\therefore \angle ACB = \angle AED = 100^\circ,$$

$$\therefore \angle DEC = 100^\circ - 55^\circ = 45^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle DEC = \tan 45^\circ = 1,$$

故答案为: 1

【点评】 本题考查旋转的性质, 解题的关键是熟练运用旋转的性质, 本题属于中等题型.

18. **【分析】** 连接 CD , 由圆周角定理得出 $\angle BCD = 90^\circ = \angle CAB$, 证明 $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, 得

出 $\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$, 即可得出结果.

【解答】 解: 连接 CD , 如图:

$\because BD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle BCD = 90^\circ = \angle CAB,$$

$$\because \angle ABC = \angle CBD,$$

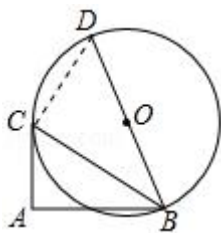
$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CBD,$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD},$$

$$\therefore BC^2 = AB \times BD = 4 \times 6 = 24,$$

$$\therefore BC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6};$$

故答案为: $2\sqrt{6}$.



【点评】 本题考查了圆周角定理、相似三角形的判定与性质; 熟练掌握圆周角定理, 证明三角形相似是解题的关键.

19. **【分析】** 由 $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, 可知 OA , OB , 由折叠得 $OA = AC = 1$, $OB = BC = 2$, 要求 k 的值只要求出点 C 的坐标即可, 因此过点 C 作垂线, 构造相似三角形, 得出线段之间的关系, 设合适的未知数, 在直角三角形中由勾股定理, 解出未知数, 进而确定点 C 的坐标, 最终求出 k 的值.

【解答】 解: 过点 C 作 $CD \perp x$ 轴, 过点 B 作 $BE \perp y$ 轴, 与 DC 的延长线相交于点 E ,

由折叠得: $OA = AC = 1$, $OB = BC = 2$,

$$\because \angle E = \angle CDA = \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ECB + \angle EBC = 90^\circ, \quad \angle ECB + \angle ACD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle ACD,$$

$$\therefore \triangle ACD \sim \triangle CBE,$$

$$\therefore \frac{CD}{BE} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } CD = m, \text{ 则 } BE = 2m, \quad CE = 2 - m, \quad AD = 2m - 1$$

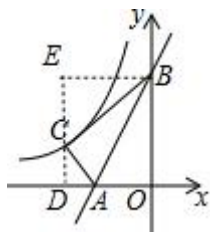
$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, 由勾股定理得: } AD^2 + CD^2 = AC^2,$$

$$\text{即: } m^2 + (2m - 1)^2 = 1^2, \text{ 解得: } m_1 = \frac{4}{5}, \quad m^2 = 0 \text{ (舍去);}$$

$$\therefore CD = \frac{4}{5}, \quad BE = OD = \frac{8}{5},$$

$$\therefore C\left(-\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ 代入 } y = \frac{k}{x} \text{ 得, } k = -\frac{8}{5} \times \frac{4}{5} = -\frac{32}{25},$$

$$\text{故答案为: } -\frac{32}{25}$$



【点评】考查折叠得性质、相似三角形的性质、直角三角形的勾股定理、反比例函数图象上点的坐标特征等知识，求出点 C 的坐标是解决问题的关键．

20. **【分析】**①由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，得 $AD = BD$ ，由 $BF = CF$ ， $BD = CD$ 得 DE 是 BC 的垂直平分线，得 $BE = CE$ ，再由勾股定理便可得结论，由此判断结论的正误；

②证明 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ ，求得 BE ，再证明 $DE \parallel AB$ ，得 DE 垂直平分 BC ，得 $CE = BE$ ，便可判断结论的正误；

③证明 $\angle ABD = \angle CBE$ ，再证明 BE 与 BC 或 BC 与 BE 两边的比不一定等于 AB 与 BD 的比，便可判断结论正误；

④先求出 AC ，进而得 BD ，再在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中，求得 BE ，进而由勾股定理求得结果，便可判断正误．

【解答】解：① $\because \angle ABC = 90^\circ$ ， D 为斜边 AC 的中点，

$$\therefore AD = BD = CD,$$

$$\because BF = CF,$$

$$\therefore DE \perp BC,$$

$$\therefore BE = CE,$$

$$\because BE \perp BD,$$

$$\therefore BD^2 + BE^2 = DE^2,$$

$$\therefore CE^2 + AD^2 = DE^2,$$

故①正确；

$$\textcircled{2} \because AB = 4, BC = 3,$$

$$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5,$$

$$\therefore BD = AD = CD = \frac{5}{2},$$

$$\because \angle A = \angle BDE, \angle ABC = \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBE,$$

$$\therefore \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BE},$$

$$\text{即} \frac{4}{\frac{5}{2}} = \frac{3}{BE}.$$

$$\therefore BE = \frac{15}{8},$$

$$\because AD = BD,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD,$$

$$\because \angle A = \angle BDE, \angle BDC = \angle A + \angle ABD,$$

$$\therefore \angle A = \angle CDE,$$

$$\therefore DE \parallel AB,$$

$$\therefore DE \perp BC,$$

$$\because BD = CD,$$

$$\therefore DE \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore BE = CE,$$

$$\therefore CE = \frac{15}{8},$$

故②正确；

$$\textcircled{3} \because \angle ABC = \angle DBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD = \angle CBE,$$

$$\therefore \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{5}{2}}{4} = \frac{5}{8},$$

但随着 F 点运动, BE 的长度会改变, 而 $BC = 3$, $\frac{BE}{3}$

$$\therefore \frac{BE}{3} \text{ 或 } \frac{3}{BE} \text{ 不一定等于 } \frac{5}{8},$$

$\therefore \triangle ABD$ 和 $\triangle CBE$ 不一定相似,

故③错误;

$$\textcircled{4} \because \angle A = 30^\circ, BC = 3,$$

$$\therefore \angle A = \angle ABD = \angle CBE = 30^\circ, AC = 2BC = 6,$$

$$\therefore BD = \frac{1}{2}AC = 3,$$

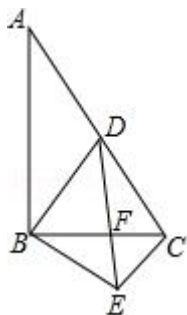
$$\because BC = 3, \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore BE = \frac{BC}{\cos 30^\circ} = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = \sqrt{BD^2 + BE^2} = \sqrt{21}.$$

故④正确;

故答案为: ①②④.



【点评】 本题是三角形的一个综合题, 主要考查了勾股定理, 相似三角形的性质与判定, 全等三角形的性质与判定, 解直角三角形, 直角三角形的性质, 线段垂直平分线的判定与性质, 考试的内容多, 难度较大, 关键是综合应用以上性质灵活解题.

三、解答题: 本大题共有 6 小题, 共 60 分.

21. **【分析】** (1) 由总人数乘以 25 分的学生所占的比例即可;

(2) 画树状图可知: 共有 12 个等可能的结果, 甲和乙恰好分在同一组的结果有 4 个, 由概率公式即可得出结果.

【解答】解：（1） $450 \times \frac{18}{50} = 162$ （人），

答：该校九年级有 450 名学生，估计体育测试成绩为 25 分的学生人数为 162 人；

（2）画树状图如图：

共有 12 个等可能的结果，

$\therefore$ 丙丁分到一组时，甲乙也恰好在同一组，

$\therefore$ 甲和乙恰好分在同一组的结果有 4 个，

$\therefore$ 甲和乙恰好分在同一组的概率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ．



【点评】本题考查了列表法与树状图法，统计表等知识，解题的关键是熟练掌握基本知识，属于中考常考题型．

22. 【分析】直接利用相似三角形的判定与性质得出 $\frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，进而得出 AC ， BE 的长．

【解答】解：在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中

$\therefore \angle BAD = 90^\circ$ ， $\angle ABD = 30^\circ$ ， $AD = \sqrt{3}$ ，

$\therefore \tan \angle ABD = \frac{AD}{AB}$ ，

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{AB}$ ，

$\therefore AB = 3$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \angle BAD + \angle ABC = 180^\circ$ ，

$\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\therefore AB = BC = 3$ ，

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 3\sqrt{2}$ ，

$\therefore AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle ADE \sim \triangle CBE$ ，

$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{AD}{CB}$ ，

$\therefore \frac{DE}{BE} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

设 $DE = \sqrt{3}x$, 则 $BE = 3x$,

$$\therefore BD = DE + BE = (\sqrt{3} + 3)x,$$

$$\therefore \frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}},$$

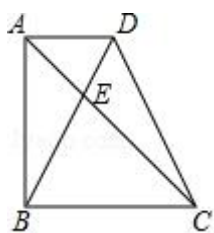
$\because$ 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $\angle ABD = 30^\circ$,

$$\therefore BD = 2AD = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore DE = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}},$$

$$\therefore DE = 3 - \sqrt{3},$$

$$\therefore BE = \sqrt{3}(3 - \sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 3.$$



【点评】 此题主要考查了相似三角形的判定与性质, 正确得出 DE , BD 之间关系是解题关键.

23. **【分析】** (1) 根据题意可以列出方程, 进而求得结论;

(2) 根据题意可以求得总收入和上涨价格之间的函数解析式, 然后化为顶点式即可解答本题.

【解答】 解: (1) 该出租公司这批对外出租的货车共有 x 辆,

$$\text{根据题意得, } \frac{1500}{x-10} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{4000}{x},$$

解得: $x = 20$,

经检验: $x = 20$ 是分式方程的根,

$$\therefore 1500 \div (20 - 10) = 150 \text{ (元)},$$

答: 该出租公司这批对外出租的货车共有 20 辆, 淡季每辆货车的日租金 150 元;

(2) 设每辆货车的日租金上涨 a 元时, 该出租公司的日租金总收入为 W 元,

$$\text{根据题意得, } W = \left[a + 150 \times \left(1 + \frac{1}{3}\right)\right] \times \left(20 - \frac{a}{20}\right),$$

$$\therefore W = -\frac{1}{20}a^2 + 10a + 4000 = -\frac{1}{20}(a - 100)^2 + 4500,$$

$$\because -\frac{1}{20} < 0,$$

$\therefore$ 当 $a = 100$ 时, W 有最大值,

答：每辆货车的日租金上涨 100 元时，该出租公司的日租金总收入最高．

【点评】 本题考查二次函数的应用，解答本题的关键是明确题意，找出所求问题需要的条件，利用二次函数的性质解答．

24. 【分析】(1) 连接 OA 、 OC ，过 O 作 $OH \perp AC$ 于点 H ，由圆内接四边形的性质求得 $\angle AMC$ ，再求得 $\angle AOC$ ，最后解直角三角形得 OA 便可；

(2) 在 BM 上截取 $BE = BC$ ，连接 CE ，证明 $BC = BE$ ，再证明 $\triangle ACB \cong \triangle MCE$ ，得 $AB = ME$ ，进而得结论．

【解答】 解：(1) 连接 OA 、 OC ，过 O 作 $OH \perp AC$ 于点 H ，如图 1，

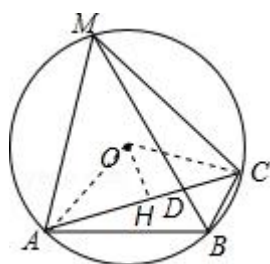


图1

$$\because \angle ABC = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle AMC = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle AMC = 120^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOH = \frac{1}{2}\angle AOC = 60^\circ ,$$

$$\therefore AH = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3},$$

$$\therefore OA = \frac{AH}{\sin 60^\circ} = 2,$$

故 $\odot O$ 的半径为 2．

(2) 证明：在 BM 上截取 $BE = BC$ ，连接 CE ，如图 2，

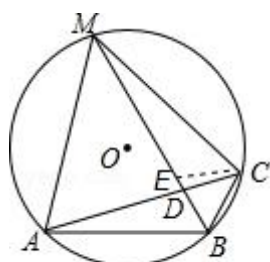


图2

$$\because \angle MBC = 60^\circ , BE = BC,$$

$\therefore \triangle EBC$ 是等边三角形,
 $\therefore CE = CB = BE, \angle BCE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle BCD + \angle DCE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ACM = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ECM + \angle DCE = 60^\circ$,
 $\therefore \angle ECM = \angle BCD$,
 $\therefore \angle ABC = 120^\circ$, BM 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle ABM = \angle CBM = 60^\circ$,
 $\therefore \angle CAM = \angle CBM = 60^\circ$, $\angle ACM = \angle ABM = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle ACM$ 是等边三角形,
 $\therefore AC = CM$,
 $\therefore \triangle ACB \cong \triangle MCE$,
 $\therefore AB = ME$,
 $\therefore ME + EB = BM$,
 $\therefore AB + BC = BM$.

【点评】 本题是圆的一个综合题，主要考查圆的圆内接四边形定理，圆周角定理，垂径定理，角平分线定义，三角形全等的性质与判定，等边三角形的性质与判定，解直角三角形，内容较多，有一定难度，第一题关键在于求 $\angle AOC$ 的度数，第二题的关键在于构造全等三角形.

25. **【分析】** (1) 过点 M 作 $MF \perp AB$ 于 F ，作 $MG \perp BC$ 于 G ，由正方形的性质得出 $\angle ABD = \angle DBC = 45^\circ$ ，由角平分线的性质得出 $MF = MG$ ，证得四边形 $FBGM$ 是正方形，得出 $\angle FMG = 90^\circ$ ，证出 $\angle AMF = \angle NMG$ ，证明 $\triangle AMF \cong \triangle NMG$ ，即可得出结论；

(2) 证明 $\text{Rt}\triangle AMN \sim \text{Rt}\triangle BCD$ ，得出 $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\frac{AN}{BD}\right)^2$ ，求出 $AN = 2\sqrt{13}$ ，由勾股定理得出 $BN = \sqrt{AN^2 - AB^2} = 4$ ，由直角三角形的性质得出 $OM = OA = ON = \frac{1}{2}AN = \sqrt{13}$ ，

$OM \perp AN$ ，证明 $\triangle PAO \sim \triangle NAB$ ，得出 $\frac{OP}{BN} = \frac{OA}{AB}$ ，求出 $OP = \frac{2\sqrt{13}}{3}$ ，即可得出结果；

(3) 过点 A 作 $AF \perp BD$ 于 F ，证明 $\triangle AFM \cong \triangle MHN$ 得出 $AF = MH$ ，求出 $AF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ，得出 $MH = 3\sqrt{2}$ ， $MN = 2\sqrt{5}$ ，由勾股定理得出 $HN = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \sqrt{2}$.

由三角形面积公式即可得出结果.

【解答】(1) 证明: 过点 M 作 $MF \perp AB$ 于 F , 作 $MG \perp BC$ 于 G , 如图①所示:

$$\therefore \angle AFM = \angle MFB = \angle BGM = \angle NGM = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore \angle ABC = \angle DAB = 90^\circ, AD = AB, \angle ABD = \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\because MF \perp AB, MG \perp BC,$$

$$\therefore MF = MG,$$

$$\because \angle ABC = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四边形 $FBGM$ 是正方形,

$$\therefore \angle FMG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FMN + \angle NMG = 90^\circ,$$

$$\because MN \perp AM,$$

$$\therefore \angle AMF + \angle FMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMF = \angle NMG,$$

$$\text{在 } \triangle AMF \text{ 和 } \triangle NMG \text{ 中, } \begin{cases} \angle AFM = \angle NGM \\ MF = MG \\ \angle AMF = \angle NMG \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AMF \cong \triangle NMG \text{ (ASA)},$$

$$\therefore MA = MN;$$

(2) 解: 在 $\text{Rt}\triangle AMN$ 中, 由 (1) 知: $MA = MN$,

$$\therefore \angle MAN = 45^\circ,$$

$$\because \angle DBC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle MAN = \angle DBC,$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle AMN \sim \text{Rt}\triangle BCD,$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle BCD}} = \left(\frac{AN}{BD}\right)^2,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AB = AD = 6$,

$$\therefore BD = 6\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{AN^2}{(6\sqrt{2})^2} = \frac{13}{18},$$

$$\text{解得: } AN = 2\sqrt{13}.$$

$$\therefore \text{在 Rt}\triangle ABN \text{ 中, } BN = \sqrt{AN^2 - AB^2} = \sqrt{(2\sqrt{13})^2 - 6^2} = 4,$$

$\therefore$ 在 Rt $\triangle AMN$ 中, $MA = MN$, O 是 AN 的中点,

$$\therefore OM = OA = ON = \frac{1}{2}AN = \sqrt{13}, \quad OM \perp AN,$$

$$\therefore \angle AOP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOP = \angle ABN,$$

$$\therefore \angle PAO = \angle NAB,$$

$$\therefore \triangle PAO \sim \triangle NAB,$$

$$\therefore \frac{OP}{BN} = \frac{OA}{AB}, \text{ 即: } \frac{OP}{4} = \frac{\sqrt{13}}{6},$$

$$\text{解得: } OP = \frac{2\sqrt{13}}{3},$$

$$\therefore PM = OM + OP = \sqrt{13} + \frac{2\sqrt{13}}{3} = \frac{5\sqrt{13}}{3};$$

(3) 解: 过点 A 作 $AF \perp BD$ 于 F , 如图③所示:

$$\therefore \angle AFM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAM + \angle AMF = 90^\circ,$$

$$\therefore MN \perp AM,$$

$$\therefore \angle AMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AMF + \angle HMN = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAM = \angle HMN,$$

$$\therefore NH \perp BD,$$

$$\therefore \angle AFM = \angle MHN = 90^\circ,$$

$$\text{在 } \triangle AFM \text{ 和 } \triangle MHN \text{ 中, } \begin{cases} \angle FAM = \angle HMN \\ \angle AFM = \angle MHN, \\ AM = MN \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AFM \cong \triangle MHN \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AF = MH,$$

在等腰直角 $\triangle ABD$ 中, $\therefore AF \perp BD$,

$$\therefore AF = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2},$$

$$\therefore MH = 3\sqrt{2},$$

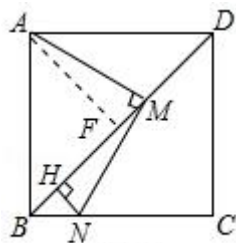
$$\therefore AM = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore MN = 2\sqrt{5},$$

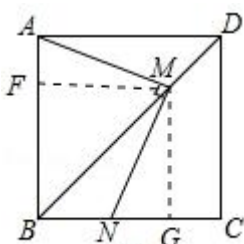
$$\therefore HN = \sqrt{MN^2 - MH^2} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{2},$$

$$\therefore S_{\triangle HMN} = \frac{1}{2}MH \cdot HN = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 3,$$

$\therefore \triangle HMN$ 的面积为 3.



图③



图①

【点评】 本题是相似形综合题目，考查了相似三角形的判定与性质、全等三角形的判定与性质、正方形的判定与性质、直角三角形的性质、勾股定理、角平分线的性质等知识；本题综合性强，有一定难度，证明三角形相似和三角形全等是解题的关键。

26. **【分析】** (1) 将点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 2$ 即可；

(2) 过点 D 作 $DG \perp y$ 轴于 G , 作 $DH \perp x$ 轴于 H , 设点 $D(1, y)$, 在 $\text{Rt}\triangle CGD$ 中, $CD^2 = CG^2 + GD^2 = (2 - y)^2 + 1$, 在 $\text{Rt}\triangle BHD$ 中, $BD^2 = BH^2 + HD^2 = 4 + y^2$, 可以证明 $CD = BD$, 即可求 y 的值；

(3) 过点 E 作 $EQ \perp y$ 轴于点 Q , 过点 F 作直线 $FR \perp y$ 轴于 R , 过点 E 作 $FP \perp FR$ 于 P , 证明四边形 $QRPE$ 是矩形, 根据 $S_{\triangle CEF} = S_{\text{矩形} QRPE} - S_{\triangle CRF} - S_{\triangle EFP} + S_{\triangle CQE}$, 代入边即可；

(4) 根据平行四边形对边平行且相等的性质可以得到存在点 M 使得以 B, C, M, N 为顶点的四边形是平行四边形, 点 $M(2, 2)$ 或 $M(4, -\frac{10}{3})$ 或 $M(-2, -\frac{10}{3})$;

【解答】 解: (1) 将点 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 2$

$$\text{可得 } a = -\frac{2}{3}, b = \frac{4}{3},$$

$$\therefore y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2;$$

$\therefore$ 对称轴 $x = 1$;

(2) 如图 1: 过点 D 作 $DG \perp y$ 轴于 G , 作 $DH \perp x$ 轴于 H ,

设点 $D(1, y)$,

$\because C(0, 2), B(3, 0)$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle CGD$ 中, $CD^2 = CG^2 + GD^2 = (2-y)^2 + 1$,

$\therefore$ 在 $\text{Rt}\triangle BHD$ 中, $BD^2 = BH^2 + HD^2 = 4 + y^2$,

在 $\triangle BCD$ 中, $\because \angle DCB = \angle CBD$,

$\therefore CD = BD$,

$\therefore CD^2 = BD^2$,

$\therefore (2-y)^2 + 1 = 4 + y^2$,

$\therefore y = \frac{1}{4}$,

$\therefore D(1, \frac{1}{4})$;

(3) 如图 2: 过点 E 作 $EQ \perp y$ 轴于点 Q , 过点 F 作直线 $FR \perp y$ 轴于 R , 过点 E 作 $FP \perp FR$ 于 P ,

$\therefore \angle EQR = \angle QRP = \angle RPE = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $QRPE$ 是矩形,

$\because S_{\triangle CEF} = S_{\text{矩形} QRPE} - S_{\triangle CRF} - S_{\triangle EFP} + S_{\triangle CQE}$

$\because E(x, y), C(0, 2), F(1, 1)$,

$\therefore S_{\triangle CEF} = EQ \cdot QR + \frac{1}{2} \times EQ \cdot QC - \frac{1}{2} CR \cdot RF - \frac{1}{2} FP \cdot EP$,

$\therefore S_{\triangle CEF} = x(y-1) + \frac{1}{2}x(2-y) - \frac{1}{2} \times 1 \times 1 - \frac{1}{2}(x-1)(y-1)$,

$\therefore y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 2$,

$\therefore S_{\triangle CEF} = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{6}x$,

$\therefore$ 当 $x = \frac{7}{4}$ 时, 面积有最大值 $\frac{49}{48}$,

此时 $E(\frac{7}{4}, \frac{55}{24})$;

(4) 存在点 M 使得以 B, C, M, N 为顶点的四边形是平行四边形,

设 $N(1, n), M(x, y)$,

① 四边形 $CMNB$ 是平行四边形时, $CM \parallel NB, CN \parallel MN$,

$\frac{1}{2} = \frac{3+x}{2}$,

$\therefore x = -2$,

$$\therefore M\left(-2, -\frac{10}{3}\right);$$

② 四边形 $CNBM$ 是平行四边形时, $CN \parallel BM$, $CM \parallel BN$,

$$\frac{3}{2} = \frac{1+x}{2},$$

$$\therefore x = 2,$$

$$\therefore M(2, 2);$$

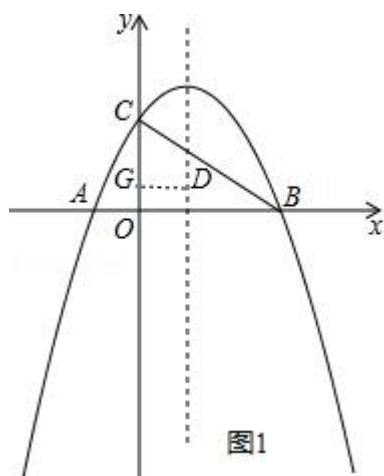
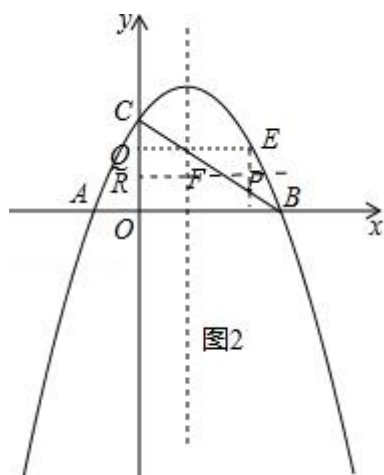
③ 四边形 $CNMB$ 是平行四边形时, $CM \parallel MN$, $NC \parallel BM$,

$$\frac{1+3}{2} = \frac{x}{2},$$

$$\therefore x = 4,$$

$$\therefore M\left(4, -\frac{10}{3}\right);$$

综上所述: $M(2, 2)$ 或 $M\left(4, -\frac{10}{3}\right)$ 或 $M\left(-2, -\frac{10}{3}\right)$;



【点评】 本题考查二次函数的图象及性质; 熟练掌握二次函数的性质, 灵活运用勾股定理求边长, 掌握平行四边形的判定方法是解题的关键.

