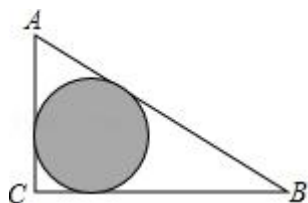


2016 年内蒙古呼和浩特市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (3 分) 互为相反数的两个数的和为 ()
A. 0 B. -1 C. 1 D. 2
2. (3 分) 将数字“6”旋转 180° ，得到数字“9”；将数字“9”旋转 180° ，得到数字“6”。现将数字“69”旋转 180° ，得到的数字是 ()
A. 96 B. 69 C. 66 D. 99
3. (3 分) 下列说法正确的是 ()
A. “任意画一个三角形，其内角和为 360° ”是随机事件
B. 已知某篮球运动员投篮投中的概率为 0.6，则他投十次可投中 6 次
C. 抽样调查选取样本时，所选样本可按自己的喜好选取
D. 检测某城市的空气质量，采用抽样调查法
4. (3 分) 某企业今年 3 月份产值为 a 万元，4 月份比 3 月份减少了 10%，5 月份比 4 月份增加了 15%，则 5 月份的产值是 ()
A. $(a - 10\%) (a + 15\%)$ 万元 B. $a (1 - 90\%) (1 + 85\%)$ 万元
C. $a (1 - 10\%) (1 + 15\%)$ 万元 D. $a (1 - 10\% + 15\%)$ 万元
5. (3 分) 下列运算正确的是 ()
A. $a^2 + a^3 = a^5$
B. $(-2a^2)^3 \div (\frac{a}{2})^2 = -16a^4$
C. $3a^{-1} = \frac{1}{3a}$
D. $(2\sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}a)^2 \div 3a^2 = 4a^2 - 4a + 1$

6. (3分) 如图, $\triangle ABC$ 是一块绿化带, 将阴影部分修建为花圃, 已知 $AB=15$, $AC=9$, $BC=12$, 阴影部分是 $\triangle ABC$ 的内切圆, 一只自由飞翔的小鸟将随机落在这块绿化带上, 则小鸟落在花圃上的概率为 ()

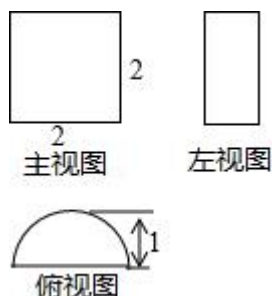


- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\pi}{6}$ C. $\frac{\pi}{8}$ D. $\frac{\pi}{5}$

7. (3分) 已知一次函数 $y=kx+b-x$ 的图象与 x 轴的正半轴相交, 且函数值 y 随自变量 x 的增大而增大, 则 k, b 的取值情况为 ()

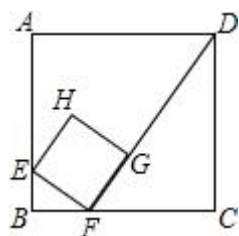
- A. $k > 1, b < 0$ B. $k > 1, b > 0$ C. $k > 0, b > 0$ D. $k > 0, b < 0$

8. (3分) 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ()



- A. 4π B. 3π C. $2\pi+4$ D. $3\pi+4$

9. (3分) 如图, 面积为 24 的正方形 $ABCD$ 中, 有一个小正方形 $EFGH$, 其中 E, F, G 分别在 AB, BC, FD 上. 若 $BF = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则小正方形的周长为 ()



- A. $\frac{5\sqrt{6}}{8}$ B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ C. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

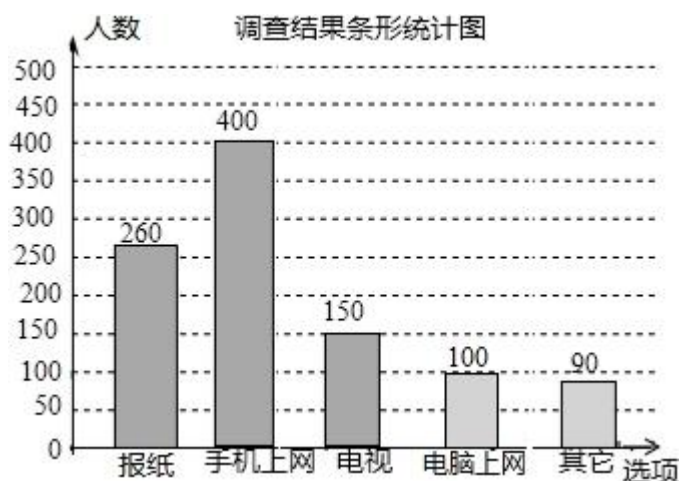
10. (3分) 已知 $a \geq 2$, $m^2 - 2am + 2 = 0$, $n^2 - 2an + 2 = 0$, $m \neq n$, 则 $(m-1)^2 +$

$(n-1)^2$ 的最小值是 ()

- A. 6 B. 3 C. -3 D. 0

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 本题要求把正确结果填在答题卡规定的横线上, 不要解答过程)

11. (3 分) 如图是某市电视台记者为了解市民获取新闻的主要途径, 通过抽样调查绘制的一个条形统计图. 若该市约有 230 万人, 则可估计其中将报纸和手机上网作为获取新闻的主要途径的总人数大约为_____万人.



12. (3 分) 已知函数 $y = -\frac{1}{x}$, 当自变量的取值为 $-1 < x < 0$ 或 $x \geq 2$, 函数值 y 的取值_____.
13. (3 分) 在学校组织的义务植树活动中, 甲、乙两组各四名同学的植树棵数如下, 甲组: 9, 9, 11, 10; 乙组: 9, 8, 9, 10; 分别从甲、乙两组中随机选取一名同学, 则这两名同学的植树总棵数为 19 的概率_____.
14. (3 分) 在周长为 26π 的 $\odot O$ 中, CD 是 $\odot O$ 的一条弦, AB 是 $\odot O$ 的切线, 且 $AB \parallel CD$, 若 AB 和 CD 之间的距离为 18, 则弦 CD 的长为_____.
15. (3 分) 已知平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 在第三象限, 对角线 AC 的中点在坐标原点, 一边 AB 与 x 轴平行且 $AB=2$, 若点 A 的坐标为 (a, b) , 则点 D

的坐标为_____.

16. (3 分) 以下四个命题:

①对应角和面积都相等的两个三角形全等;

②“若 $x^2 - x = 0$, 则 $x = 0$ ”的逆命题;

③若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} -x+y-a=0 \\ bx-y+1=0 \end{cases}$ 有无数多组解, 则 $a=b=1$;

④将多项式 $5xy+3y-2x^2y$ 因式分解, 其结果为 $-y(2x+1)(x-3)$.

其中正确的命题的序号为_____.

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 72 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 计算

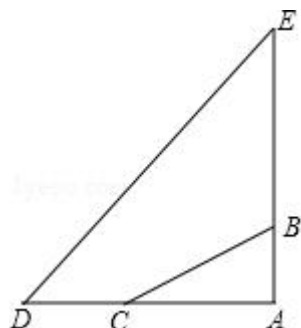
(1) 计算: $(\frac{1}{2})^{-2} + |\sqrt{3} - 2| + 3\tan 30^\circ$

(2) 先化简, 再求值: $\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{x^2-6x+9} \div \frac{x^2+x}{x-3}$, 其中 $x = -\frac{3}{2}$.

18. (6 分) 在一次综合实践活动中, 小明要测某地一座古塔 AE 的高度. 如图,

已知塔基顶端 B (和 A、E 共线) 与地面 C 处固定的绳索的长 BC 为 80m. 她

先测得 $\angle BCA=35^\circ$ ，然后从 C 点沿 AC 方向走 30m 到达 D 点，又测得塔顶 E 的仰角为 50° ，求塔高 AE. (人的高度忽略不计，结果用含非特殊角的三角函数表示)



19. (6 分) 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 5x+2 > 3(x-1) \\ \frac{1}{2}x \leq 8 - \frac{3}{2}x + 2a \end{cases}$ 有四个整数解，求实数 a 的取值范围.

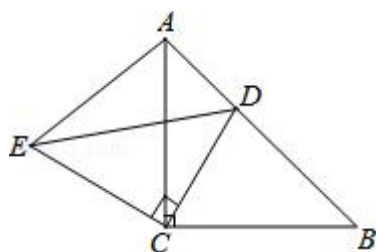
20. (7 分) 在一次男子马拉松长跑比赛中，随机抽得 12 名选手所用的时间 (单位：分钟) 得到如下样本数据：140 146 143 175 125 164 134 155 152 168 162 148

- (1) 计算该样本数据的中位数和平均数；
- (2) 如果一名选手的成绩是 147 分钟，请你依据样本数据中位数，推断他的成绩如何？

21. (7 分) 已知, 如图, $\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$, D 为 AB 边上一点.

(1) 求证: $\triangle ACE \cong \triangle BCD$;

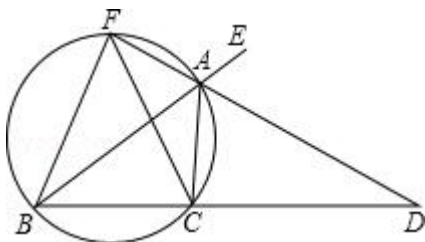
(2) 求证: $2CD^2 = AD^2 + DB^2$.



22. (7 分) 某一公路的道路维修工程, 准备从甲、乙两个工程队选一个队单独完成. 根据两队每天的工程费用和每天完成的工程量可知, 若由两队合做此项维修工程, 6 天可以完成, 共需工程费用 385200 元, 若单独完成此项维修工程, 甲队比乙队少用 5 天, 每天的工程费用甲队比乙队多 4000 元, 从节省资金的角度考虑, 应该选择哪个工程队?

23. (8分) 已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象在二四象限, 一次函数为 $y = kx + b$ ($b > 0$), 直线 $x = 1$ 与 x 轴交于点 B , 与直线 $y = kx + b$ 交于点 A , 直线 $x = 3$ 与 x 轴交于点 C , 与直线 $y = kx + b$ 交于点 D .
- (1) 若点 A, D 都在第一象限, 求证: $b > -3k$;
- (2) 在(1)的条件下, 设直线 $y = kx + b$ 与 x 轴交于点 E 与 y 轴交于点 F , 当 $\frac{ED}{EA} = \frac{3}{4}$ 且 $\triangle OFE$ 的面积等于 $\frac{27}{2}$ 时, 求这个一次函数的解析式, 并直接写出不等式 $\frac{k}{x} > kx + b$ 的解集.

24. (9分) 如图, 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle EAC$ 的平分线, 交 BC 的延长线于点 D , 延长 DA 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 F , 连接 FB, FC .
- (1) 求证: $\angle FBC = \angle FCB$;
- (2) 已知 $FA \cdot FD = 12$, 若 AB 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径, $FA = 2$, 求 CD 的长.



25. (12 分) 已知二次函数 $y=ax^2-2ax+c$ ($a<0$) 的最大值为 4, 且抛物线过点 $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$, 点 $P(t, 0)$ 是 x 轴上的动点, 抛物线与 y 轴交点为 C , 顶点为 D .

(1) 求该二次函数的解析式, 及顶点 D 的坐标;

(2) 求 $|PC-PD|$ 的最大值及对应的点 P 的坐标;

(3) 设 $Q(0, 2t)$ 是 y 轴上的动点, 若线段 PQ 与函数 $y=a|x|^2-2a|x|+c$ 的图

象只有一个公共点，求 t 的取值.

2016 年内蒙古呼和浩特市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (3 分) 互为相反数的两个数的和为 ()

- A. 0 B. -1 C. 1 D. 2

【考点】14: 相反数.

【分析】直接利用相反数的定义分析得出答案.

【解答】解：互为相反数的两个数的和为：0.

故选：A.

【点评】此题主要考查了相反数的定义，正确把握定义是解题关键.

2. (3 分) 将数字“6”旋转 180° ，得到数字“9”；将数字“9”旋转 180° ，得到数字“6”. 现将数字“69”旋转 180° ，得到的数字是 ()

- A. 96 B. 69 C. 66 D. 99

【考点】R1: 生活中的旋转现象.

【分析】直接利用中心对称图形的性质结合 69 的特点得出答案.

【解答】解：现将数字“69”旋转 180° ，得到的数字是：69.

故选：B.

【点评】此题主要考查了生活中的旋转现象，正确想象出旋转后图形是解题关键.

3. (3 分) 下列说法正确的是 ()

- A. “任意画一个三角形，其内角和为 360° ”是随机事件
B. 已知某篮球运动员投篮投中的概率为 0.6，则他投十次可投中 6 次

C. 抽样调查选取样本时，所选样本可按自己的喜好选取

D. 检测某城市的空气质量，采用抽样调查法

【考点】 V2: 全面调查与抽样调查; X1: 随机事件; X3: 概率的意义.

【分析】 根据概率是事件发生的可能性，可得答案.

【解答】 解：A、“任意画一个三角形，其内角和为 360° ”是不可能事件，故 A 错误；

B、已知某篮球运动员投篮投中的概率为 0.6，则他投十次可能投中 6 次，故 B 错误；

C、抽样调查选取样本时，所选样本要具有广泛性、代表性，故 C 错误；

D、检测某城市的空气质量，采用抽样调查法，故 D 正确；

故选：D.

【点评】 本题考查了概率的意义，概率是反映事件发生机会的大小的概念，只是表示发生的机会的大小，机会大也不一定发生，机会小也有可能发生.

4. (3 分) 某企业今年 3 月份产值为 a 万元，4 月份比 3 月份减少了 10%，5 月份比 4 月份增加了 15%，则 5 月份的产值是 ()

A. $(a - 10\%) (a + 15\%)$ 万元 B. $a (1 - 90\%) (1 + 85\%)$ 万元

C. $a (1 - 10\%) (1 + 15\%)$ 万元 D. $a (1 - 10\% + 15\%)$ 万元

【考点】 32: 列代数式.

【分析】 由题意可得：4 月份的产值为： $a (1 - 10\%)$ ，5 月份的产值为：4 月份的产值 $\times (1 + 15\%)$ ，进而得出答案.

【解答】 解：由题意可得：4 月份的产值为： $a (1 - 10\%)$ ，5 月份的产值为： $a (1 - 10\%) (1 + 15\%)$ ，

故选：C.

【点评】此题主要考查了列代数式，正确理解增长率的定义是解题关键.

5. (3分) 下列运算正确的是 ()

A. $a^2+a^3=a^5$

B. $(-2a^2)^3 \div (\frac{a}{2})^2 = -16a^4$

C. $3a^{-1}=\frac{1}{3a}$

D. $(2\sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}a)^2 \div 3a^2 = 4a^2 - 4a + 1$

【考点】35：合并同类项；47：幂的乘方与积的乘方；4H：整式的除法；6F：负整数指数幂.

【分析】分别利用合并同类项法则以及整式的除法运算法则和负整数指数幂的性质分别化简求出答案.

【解答】解：A、 a^2+a^3 ，无法计算，故此选项错误；

B、 $(-2a^2)^3 \div (\frac{a}{2})^2 = -8a^6 \div \frac{a^2}{4} = -32a^4$ ，故此选项错误；

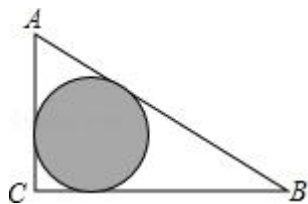
C、 $3a^{-1}=\frac{3}{a}$ ，故此选项错误；

D、 $(2\sqrt{3}a^2 - \sqrt{3}a)^2 \div 3a^2 = 4a^2 - 4a + 1$ ，正确.

故选：D.

【点评】此题主要考查了合并同类项以及整式的除法运算和负整数指数幂的性质等知识，正确掌握相关运算法则是解题关键.

6. (3分) 如图， $\triangle ABC$ 是一块绿化带，将阴影部分修建为花圃，已知 $AB=15$ ， $AC=9$ ， $BC=12$ ，阴影部分是 $\triangle ABC$ 的内切圆，一只自由飞翔的小鸟将随机落在这块绿化带上，则小鸟落在花圃上的概率为 ()



A. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{8}$

D. $\frac{\pi}{5}$

【考点】MI: 三角形的内切圆与内心; X5: 几何概率.

【分析】由 $AB=15$, $BC=12$, $AC=9$, 得到 $AB^2=BC^2+AC^2$, 根据勾股定理的逆定理得到 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 于是得到 $\triangle ABC$ 的内切圆半径 $=\frac{12+9-15}{2}=3$, 求得直角三角形的面积和圆的面积, 即可得到结论.

【解答】解: $\because AB=15$, $BC=12$, $AC=9$,

$$\therefore AB^2=BC^2+AC^2,$$

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形,

$$\therefore \triangle ABC \text{ 的内切圆半径} = \frac{12+9-15}{2} = 3,$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \times 12 \times 9 = 54,$$

$$S_{\text{圆}} = 9\pi,$$

$$\therefore \text{小鸟落在花圃上的概率} = \frac{9\pi}{54} = \frac{\pi}{6},$$

故选: B.

【点评】本题考查了几何概率, 直角三角形内切圆的半径等于两直角边的和与斜边差的一半. 同时也考查了勾股定理的逆定理.

7. (3 分) 已知一次函数 $y=kx+b-x$ 的图象与 x 轴的正半轴相交, 且函数值 y 随自变量 x 的增大而增大, 则 k , b 的取值情况为 ()

A. $k>1$, $b<0$ B. $k>1$, $b>0$ C. $k>0$, $b>0$ D. $k>0$, $b<0$

【考点】F7: 一次函数图象与系数的关系.

【分析】先将函数解析式整理为 $y=(k-1)x+b$, 再根据图象在坐标平面内的位置关系确定 k , b 的取值范围, 从而求解.

【解答】解: 一次函数 $y=kx+b-x$ 即为 $y=(k-1)x+b$,

$\therefore$ 函数值 y 随 x 的增大而增大,

$$\therefore k-1>0, \text{ 解得 } k>1;$$

∴ 图象与 x 轴的正半轴相交,

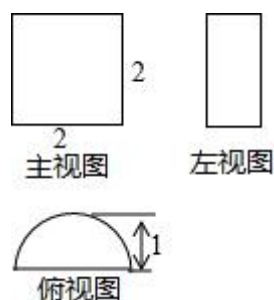
∴ 图象与 y 轴的负半轴相交,

∴ $b < 0$.

故选: A.

【点评】 本题考查的是一次函数的图象与系数的关系, 由于 $y=kx+b$ 与 y 轴交于 $(0, b)$, 当 $b > 0$ 时, $(0, b)$ 在 y 轴的正半轴上, 直线与 y 轴交于正半轴; 当 $b < 0$ 时, $(0, b)$ 在 y 轴的负半轴, 直线与 y 轴交于负半轴. 熟知一次函数的增减性是解答此题的关键.

8. (3 分) 一个几何体的三视图如图所示, 则该几何体的表面积为 ()



A. 4π

B. 3π

C. $2\pi+4$

D. $3\pi+4$

【考点】 U3: 由三视图判断几何体.

【分析】 首先根据三视图判断几何体的形状, 然后计算其表面积即可.

【解答】 解: 观察该几何体的三视图发现其为半个圆柱,

半圆柱的直径为 2, 长方体的长为 2, 宽为 1, 高为 1,

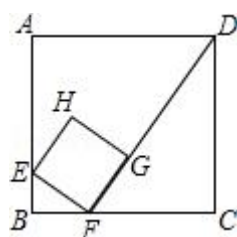
故其表面积为: $\pi \times 1^2 + (\pi+2) \times 2 = 3\pi+4$,

故选: D.

【点评】 本题考查了由三视图判断几何体的知识, 解题的关键是首先根据三视图得到几何体的形状, 难度不大.

9. (3 分) 如图, 面积为 24 的正方形 ABCD 中, 有一个小正方形 EFGH, 其中

E、F、G 分别在 AB、BC、FD 上. 若 $BF = \frac{\sqrt{6}}{2}$, 则小正方形的周长为 ()



A. $\frac{5\sqrt{6}}{8}$

B. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$

C. $\frac{5\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{10\sqrt{6}}{3}$

【考点】LE：正方形的性质.

【分析】先利用勾股定理求出 DF ，再根据 $\triangle BEF \sim \triangle CFD$ ，得 $\frac{EF}{DF} = \frac{BF}{DC}$ 求出 EF 即可解决问题.

【解答】解： $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，面积为 24，

$$\therefore BC = CD = 2\sqrt{6}, \quad \angle B = \angle C = 90^\circ,$$

$\because$ 四边形 $EFGH$ 是正方形，

$$\therefore \angle EFG = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EFB + \angle DFC = 90^\circ, \quad \angle BEF + \angle EFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BEF = \angle DFC, \quad \because \angle EBF = \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BEF \sim \triangle CFD,$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{BF}{DC},$$

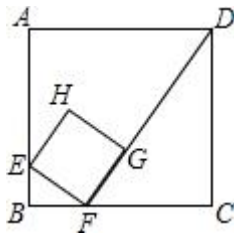
$$\therefore BF = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad CF = \frac{3\sqrt{6}}{2}, \quad DF = \sqrt{CD^2 + CF^2} = \frac{5\sqrt{6}}{2},$$

$$\therefore \frac{EF}{\frac{5\sqrt{6}}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{2\sqrt{6}},$$

$$\therefore EF = \frac{5\sqrt{6}}{8},$$

$$\therefore \text{正方形 } EFGH \text{ 的周长为 } \frac{5\sqrt{6}}{2}.$$

故选：C.



【点评】 本题考查正方形的性质、相似三角形的判定和性质等知识，解题的关键是正确寻找相似三角形，利用相似三角形的性质解决问题，属于中考常考题型.

10. (3 分) 已知 $a \geq 2$, $m^2 - 2am + 2 = 0$, $n^2 - 2an + 2 = 0$, $m \neq n$, 则 $(m - 1)^2 + (n - 1)^2$ 的最小值是 ()

- A. 6 B. 3 C. -3 D. 0

【考点】 AB: 根与系数的关系; H7: 二次函数的最值.

【分析】 根据已知条件得到 m, n 是关于 x 的方程 $x^2 - 2ax + 2 = 0$ 的两个根, 根据根与系数的关系得到 $m + n = 2a$, $mn = 2$, 于是得到 $4(a - \frac{1}{2})^2 - 3$, 当 $a = 2$ 时, $(m - 1)^2 + (n - 1)^2$ 有最小值, 代入即可得到结论.

【解答】 解: $\because m^2 - 2am + 2 = 0$, $n^2 - 2an + 2 = 0$,

$\therefore m, n$ 是关于 x 的方程 $x^2 - 2ax + 2 = 0$ 的两个根,

$\therefore m + n = 2a$, $mn = 2$,

$\therefore (m - 1)^2 + (n - 1)^2 = m^2 - 2m + 1 + n^2 - 2n + 1 = (m + n)^2 - 2mn - 2(m + n) + 2 = 4a^2 - 4 - 4a + 2 = 4(a - \frac{1}{2})^2 - 3$,

$\because a \geq 2$,

$\therefore$ 当 $a = 2$ 时, $(m - 1)^2 + (n - 1)^2$ 有最小值,

$\therefore (m - 1)^2 + (n - 1)^2$ 的最小值 $= 4(a - \frac{1}{2})^2 - 3 = 4(2 - \frac{1}{2})^2 - 3 = 6$,

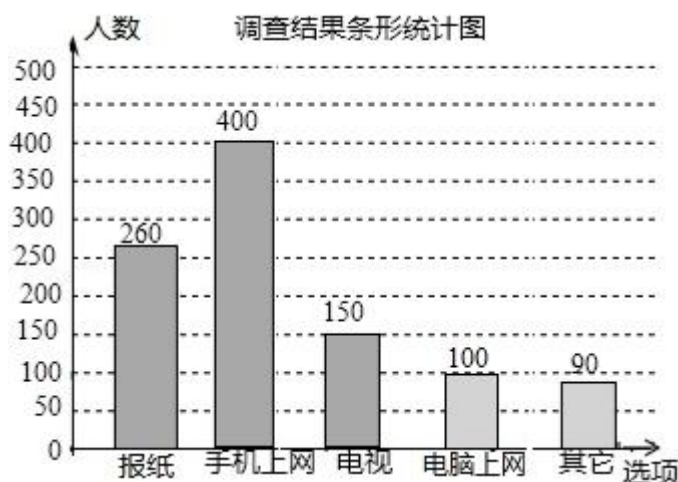
故选: A.

【点评】 本题考查了根与系数的关系, 二次函数的最值, 熟练掌握根与系数的关

系是解题的关键.

二、填空题 (本题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 本题要求把正确结果填在答题卡规定的横线上, 不要解答过程)

11. (3 分) 如图是某市电视台记者为了解市民获取新闻的主要途径, 通过抽样调查绘制的一个条形统计图. 若该市约有 230 万人, 则可估计其中将报纸和手机上网作为获取新闻的主要途径的总人数大约为 151.8 万人.



【考点】V5: 用样本估计总体; VC: 条形统计图.

【分析】利用样本估计总体的思想, 用总人数 230 万乘以报纸和手机上网的人数所占样本的百分比即可求解.

【解答】解:

由统计图可知调查的人数为 $260+400+150+100+90=1000$ 人,

所以报纸和手机上网作为获取新闻的主要途径的人数所占百分比 $=\frac{260+400}{1000} \times$

$100\%=66\%$,

则该市约有 230 万人, 则可估计其中将报纸和手机上网作为获取新闻的主要途径的总人数大约 $=230 \times 66\%=151.8$ 万,

故答案为: 151.8.

【点评】 本题考查读频数分布直方图的能力和利用统计图获取信息的能力，本题用到的知识点是：频率=频数÷总数，用样本估计整体让整体×样本的百分比即可.

12. (3分) 已知函数 $y = -\frac{1}{x}$ ，当自变量的取值为 $-1 < x < 0$ 或 $x \geq 2$ ，函数值 y 的取值 $y > 1$ 或 $-\frac{1}{2} \leq y < 0$.

【考点】 G4: 反比例函数的性质.

【分析】 画出图形，先计算当 $x = -1$ 和 $x = 2$ 时的对应点的坐标，并描出这两点，根据图象写出 y 的取值.

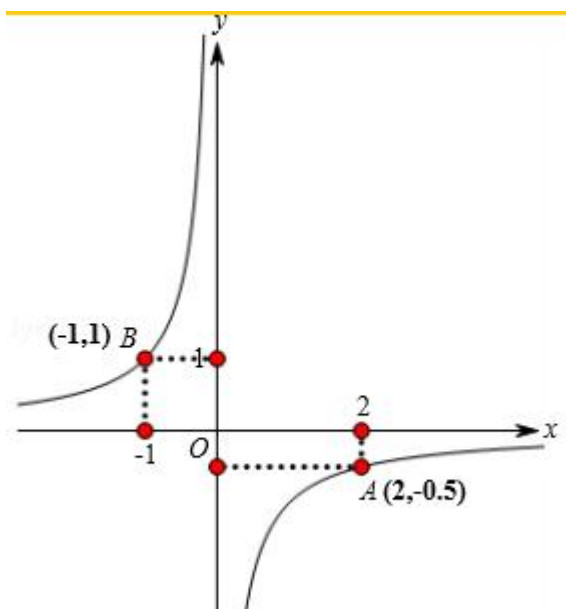
【解答】 解：当 $x = -1$ 时， $y = -\frac{1}{-1} = 1$ ，

当 $x = 2$ 时， $y = -\frac{1}{2}$ ，

由图象得：当 $-1 < x < 0$ 时， $y > 1$ ，

当 $x \geq 2$ 时， $-\frac{1}{2} \leq y < 0$ ，

故答案为： $y > 1$ 或 $-\frac{1}{2} \leq y < 0$.



【点评】 本题结合图形考查了反比例函数的性质. 注意：反比例函数的增减性只指在同一象限内.

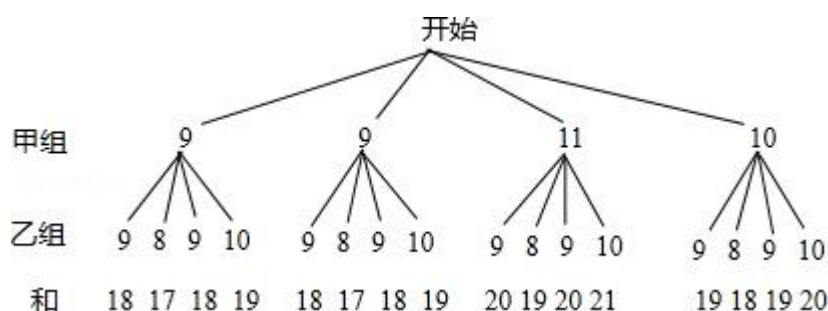
13. (3分) 在学校组织的义务植树活动中，甲、乙两组各四名同学的植树棵数

如下，甲组：9，9，11，10；乙组：9，8，9，10；分别从甲、乙两组中随机选取一名同学，则这两名同学的植树总棵数为 19 的概率 $\frac{5}{16}$ 。

【考点】 X6：列表法与树状图法。

【分析】 首先根据题意画出树状图，然后由树状图求得所有等可能的结果与两名同学的植树总棵数为 19 的情况，再利用概率公式即可求得答案。

【解答】 解：画树状图如图：



∴ 共有 16 种等可能结果，两名同学的植树总棵数为 19 的结果有 5 种结果，

∴ 这两名同学的植树总棵数为 19 的概率为 $\frac{5}{16}$ ，

故答案为： $\frac{5}{16}$ 。

【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率．列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件，树状图法适合两步或两步以上完成的事件．注意概率=所求情况数与总情况数之比．

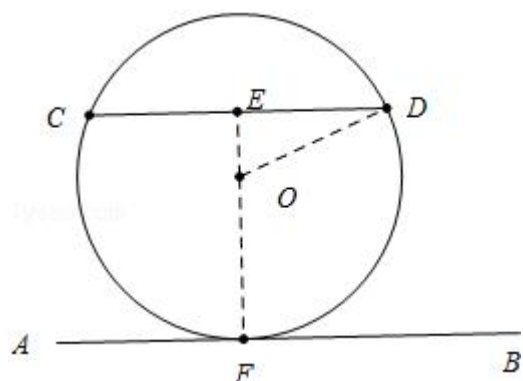
14. (3 分) 在周长为 26π 的 $\odot O$ 中，CD 是 $\odot O$ 的一条弦，AB 是 $\odot O$ 的切线，且 $AB \parallel CD$ ，若 AB 和 CD 之间的距离为 18，则弦 CD 的长为 24。

【考点】 MC：切线的性质．

【分析】 如图，设 AB 与 $\odot O$ 相切于点 F，连接 OF，OD，延长 FO 交 CD 于点 E，首先证明 $OE \perp CD$ ，在 $RT\triangle EOD$ 中，利用勾股定理即可解决问题．

【解答】 解：如图，设 AB 与 $\odot O$ 相切于点 F，连接 OF，OD，延长 FO 交 CD

于点 E.



$$\therefore 2\pi R = 26\pi,$$

$$\therefore R = 13,$$

$$\therefore OF = OD = 13,$$

$\therefore AB$ 是 $\odot O$ 切线,

$$\therefore OF \perp AB,$$

$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore EF \perp CD \text{ 即 } OE \perp CD,$$

$$\therefore CE = ED,$$

$$\therefore EF = 18, OF = 13,$$

$$\therefore OE = 5,$$

在 $\text{RT}\triangle OED$ 中, $\therefore \angle OED = 90^\circ$, $OD = 13$, $OE = 5$,

$$\therefore ED = \sqrt{OD^2 - OE^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12,$$

$$\therefore CD = 2ED = 24.$$

故答案为 24.

【点评】 本题考查切线的性质、垂径定理、勾股定理等知识, 解题的关键是正确添加辅助线, 利用垂径定理解决问题, 属于中考常考题型.

15. (3 分) 已知平行四边形 $ABCD$ 的顶点 A 在第三象限, 对角线 AC 的中点在

坐标原点，一边 AB 与 x 轴平行且 $AB=2$ ，若点 A 的坐标为 (a, b) ，则点 D 的坐标为 $(-2-a, -b)$ $(2-a, -b)$ 。

【考点】 D5：坐标与图形性质；L5：平行四边形的性质.

【分析】 根据平行四边形的性质得到 $CD=AB=2$ ，根据已知条件得到 $B(2+a, b)$ ，或 $(a-2, b)$ ， $\therefore$ 由于点 D 与点 B 关于原点对称，即可得到结论.

【解答】 解：当 B 点在 A 点的右边时，如图 1，

$\therefore AB$ 与 x 轴平行且 $AB=2$ ， $A(a, b)$ ，

$\therefore B(a+2, b)$ ，

$\therefore$ 对角线 AC 的中点在坐标原点，

$\therefore$ 点 A 、 C 关于原点对称，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 为平行四边形，

$\therefore$ 点 B 、 D 关于原点对称，

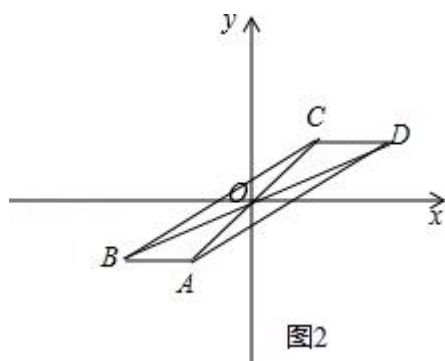
$\therefore D(-a-2, -b)$ ；

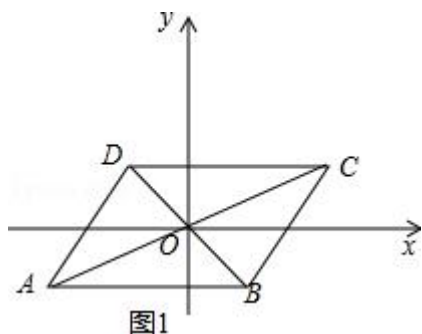
当 B 点在 A 点的左边，如图 2，

同理可得 $B(a-2, b)$ ，则 $D(-a+2, -b)$ 。

故点 D 的坐标为 $(-a-2, -b)$ 或 $(-a+2, -b)$ 。

故答案为： $(-2-a, -b)$ ， $(2-a, -b)$ 。





【点评】 本题考查了平行四边形的性质，坐标与图形的性质，关于原点对称的点的坐标特征，注意分类思想的应用.

16. (3 分) 以下四个命题:

- ①对应角和面积都相等的两个三角形全等;
- ②“若 $x^2 - x = 0$, 则 $x = 0$ ”的逆命题;
- ③若关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} -x+y-a=0 \\ bx-y+1=0 \end{cases}$ 有无数多组解, 则 $a=b=1$;
- ④将多项式 $5xy+3y-2x^2y$ 因式分解, 其结果为 $-y(2x+1)(x-3)$.

其中正确的命题的序号为 ①②③④.

【考点】 O1: 命题与定理.

【分析】 ①正确, 根据相似比为 1 的两个三角形全等即可判断.

②正确. 写出逆命题即可判断.

③正确. 根据方程组有无数多组解的条件即可判断.

④正确. 首先提公因式, 再利用十字相乘法即可判断.

【解答】 解: ①正确. 对应角相等的两个三角形相似, 又因为面积相等, 所以相似比为 1, 所以两个三角形全等, 故正确.

②正确. 理由: “若 $x^2 - x = 0$, 则 $x = 0$ ”的逆命题为 $x = 0$, 则 $x^2 - x = 0$, 故正确.

③正确. 理由: $\because$ 关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} -x+y-a=0 \\ bx-y+1=0 \end{cases}$ 有无数多组解,

$$\therefore \frac{-1}{b} = \frac{1}{-1} = \frac{-a}{1},$$

$\therefore a=b=1$, 故正确.

④正确. 理由: $5xy+3y-2x^2y = -y(2x^2-5x-3) = -y(2x+1)(x-3)$, 故正

确.

故答案为①②③④.

【点评】 本题考查命题由定理, 相似三角形的定义. 全等三角形的定义、方程组的解等知识, 解题的关键是灵活运用这些知识解决问题, 属于中考常考题型.

三、解答题 (本题共 9 小题, 满分 72 分, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 计算

(1) 计算: $(\frac{1}{2})^{-2} + |\sqrt{3} - 2| + 3\tan 30^\circ$

(2) 先化简, 再求值: $\frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{x^2-6x+9} \div \frac{x^2+x}{x-3}$, 其中 $x = -\frac{3}{2}$.

【考点】 2C: 实数的运算; 6D: 分式的化简求值; 6F: 负整数指数幂; T5: 特殊角的三角函数值.

【分析】 (1) 分别根据负整数指数幂的计算法则、绝对值的性质及特殊角的三角函数值计算出各数, 再根据实数混合运算的法则进行计算即可;

(2) 先算除法, 再算加减, 最后把 x 的值代入进行计算即可.

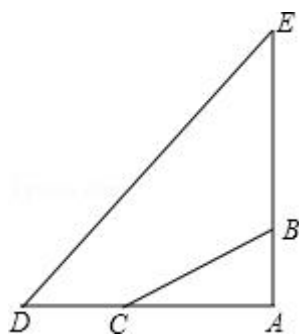
【解答】 解: (1) 原式 $= 4 + 2 - \sqrt{3} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$
 $= 6 - \sqrt{3} + \sqrt{3}$
 $= 6;$

(2) 原式 $= \frac{1}{x+1} - \frac{3-x}{(x-3)^2} \cdot \frac{x-3}{x(x+1)}$
 $= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)}$
 $= \frac{x+1}{x(x+1)}$
 $= \frac{1}{x},$

当 $x = -\frac{3}{2}$ 时, 原式 $= \frac{1}{\frac{3}{-\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{3}$.

【点评】 本题考查的是分式的化简求值, 分式求值题中比较多的题型主要有三种: 转化已知条件后整体代入求值; 转化所求问题后将条件整体代入求值; 既要转化条件, 也要转化问题, 然后再代入求值.

18. (6 分) 在一次综合实践活动中, 小明要测某地一座古塔 AE 的高度. 如图, 已知塔基顶端 B (和 A、E 共线) 与地面 C 处固定的绳索的长 BC 为 80m. 她先测得 $\angle BCA = 35^\circ$, 然后从 C 点沿 AC 方向走 30m 到达 D 点, 又测得塔顶 E 的仰角为 50° , 求塔高 AE. (人的高度忽略不计, 结果用含非特殊角的三角函数表示)



【考点】 TA: 解直角三角形的应用 – 仰角俯角问题.

【分析】 根据锐角三角函数关系, 得出 $\cos \angle ACB = \frac{AC}{BC}$, 得出 AC 的长即可; 利用锐角三角函数关系, 得出 $\tan \angle ADE = \frac{AE}{AD}$, 求出 AE 即可.

【解答】 解: 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 35^\circ$, $BC = 80\text{m}$,

$$\therefore \cos \angle ACB = \frac{AC}{BC},$$

$$\therefore AC = 80 \cos 35^\circ,$$

$$\text{在 } \text{Rt} \triangle ADE \text{ 中, } \tan \angle ADE = \frac{AE}{AD},$$

$$\therefore AD = AC + DC = 80 \cos 35^\circ + 30,$$

$$\therefore AE = (80 \cos 35^\circ + 30) \tan 50^\circ.$$

答: 塔高 AE 为 $(80 \cos 35^\circ + 30) \tan 50^\circ \text{m}$.

【点评】此题主要考查了解直角三角形的应用，根据已知正确得出锐角三角函数关系是解题关键.

19. (6 分) 已知关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 5x+2>3(x-1) \\ \frac{1}{2}x\leq 8-\frac{3}{2}x+2a \end{cases}$ 有四个整数解，求实数 a 的取值范围.

【考点】CC: 一元一次不等式组的整数解.

【分析】分别求出不等式组中两不等式的解集，根据不等式组有四个整数解，即可确定出 a 的范围.

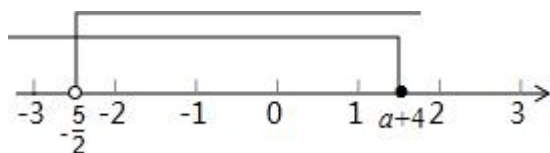
【解答】解：解不等式组 $\begin{cases} 5x+2>3(x-1) & \text{①} \\ \frac{1}{2}x\leq 8-\frac{3}{2}x+2a & \text{②} \end{cases}$,

解不等式①得： $x>-\frac{5}{2}$,

解不等式②得： $x\leq a+4$,

$\therefore$ 不等式组有四个整数解，

$\therefore$ 不等式组的解集再数轴上表示为：



$\therefore 1\leq a+4<2$,

解得： $-3\leq a<-2$.

【点评】此题考查了一元一次不等式组的整数解，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

20. (7 分) 在一次男子马拉松长跑比赛中，随机抽得 12 名选手所用的时间（单位：分钟）得到如下样本数据：140 146 143 175 125 164 134 155 152 168 162 148

(1) 计算该样本数据的中位数和平均数；

(2) 如果一名选手的成绩是 147 分钟，请你依据样本数据中位数，推断他的成

绩如何?

【考点】W1: 算术平均数; W4: 中位数.

【分析】(1) 根据中位数和平均数的概念求解;

(2) 根据 (1) 求得的中位数, 与 147 进行比较, 然后推断该选手的成绩.

【解答】解: (1) 将这组数据按照从小到大的顺序排列为: 125, 134, 140,

143, 146, 148, 152, 155, 162, 164, 168, 175,

则中位数为: $\frac{148+152}{2}=150$,

平均数为: $\frac{125+134+140+143+146+148+152+155+162+164+168+175}{12}=151$;

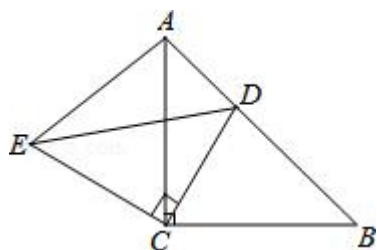
(2) 由 (1) 可得, 中位数为 150, 可以估计在这次马拉松比赛中, 大约有一半选手的成绩快于 150 分钟, 有一半选手的成绩慢于 150 分钟, 这名选手的成绩为 147 分钟, 快于中位数 150 分钟, 可以推断他的成绩估计比一半以上选手的成绩好.

【点评】本题考查了中位数和平均数的概念: 将一组数据按照从小到大 (或从大到小) 的顺序排列, 如果数据的个数是奇数, 则处于中间位置的数就是这组数据的中位数; 如果这组数据的个数是偶数, 则中间两个数据的平均数就是这组数据的中位数; 平均数是指在一组数据中所有数据之和再除以数据的个数.

21. (7 分) 已知, 如图, $\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$, D 为 AB 边上一点.

(1) 求证: $\triangle ACE \cong \triangle BCD$;

(2) 求证: $2CD^2 = AD^2 + DB^2$.



【考点】KD: 全等三角形的判定与性质.

【专题】14: 证明题.

【分析】(1) 本题要判定 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$, 已知 $\triangle ACB$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形, $\angle ACB = \angle ECD = 90^\circ$, 则 $DC = EA$, $AC = BC$, $\angle ACB = \angle ECD$, 又因为两角有一个公共的角 $\angle ACD$, 所以 $\angle BCD = \angle ACE$, 根据SAS得出 $\triangle ACE \cong \triangle BCD$.

(2) 由(1)的论证结果得出 $\angle DAE = 90^\circ$, $AE = DB$, 从而求出 $AD^2 + DB^2 = DE^2$, 即 $2CD^2 = AD^2 + DB^2$.

【解答】证明: (1) $\because \triangle ABC$ 和 $\triangle ECD$ 都是等腰直角三角形,

$$\therefore AC = BC, CD = CE,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle DCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle ACD = \angle BCD + \angle ACD,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BCD,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCD$ 中,

$$\begin{cases} AC = BC \\ \angle ACE = \angle BCD, \\ CE = CD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle BDC \text{ (SAS)};$$

(2) $\because \triangle ACB$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore \angle B = \angle BAC = 45^\circ.$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle BCD,$$

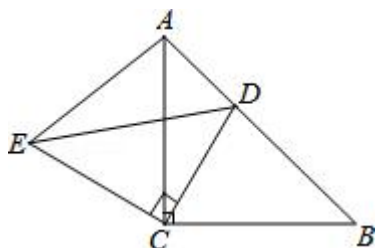
$$\therefore \angle B = \angle CAE = 45^\circ$$

$$\therefore \angle DAE = \angle CAE + \angle BAC = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ,$$

$$\therefore AD^2 + AE^2 = DE^2.$$

由 (1) 知 $AE = DB$,

$$\therefore AD^2 + DB^2 = DE^2, \text{ 即 } 2CD^2 = AD^2 + DB^2.$$



【点评】 本题考查了全等三角形的判定与性质，等腰直角三角形的性质，以及等角的余角相等的性质，熟记各性质是解题的关键.

22. (7 分) 某一公路的道路维修工程，准备从甲、乙两个工程队选一个队单独完成. 根据两队每天的工程费用和每天完成的工程量可知，若由两队合做此项维修工程，6 天可以完成，共需工程费用 385200 元，若单独完成此项维修工程，甲队比乙队少用 5 天，每天的工程费用甲队比乙队多 4000 元，从节省资金的角度考虑，应该选择哪个工程队？

【考点】 B7：分式方程的应用.

【分析】 设甲队单独完成此项工程需要 x 天，乙队单独完成需要 $(x+5)$ 天，然后依据 6 天可以完成，列出关于 x 的方程，从而可求得甲、乙两队单独完成需要的天数，然后设甲队每天的工程费为 y 元，则可表示出乙队每天的工程费，接下来，根据两队合作 6 天的工程费用为 385200 元列方程求解，于是可得到两队独做一天各自的工程费，然后可求得完成此项工程的工程费，从而可得出问题的答案.

【解答】 解：设甲队单独完成此项工程需要 x 天，乙队单独完成需要 $(x+5)$ 天.

依据题意可列方程：
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{6},$$

解得： $x_1 = 10$, $x_2 = -3$ (舍去).

经检验： $x = 10$ 是原方程的解.

设甲队每天的工程费为 y 元.

依据题意可列方程: $6y+6(y-4000)=385200$,

解得: $y=34100$.

甲队完成此项工程费用为 $34100 \times 10=341000$ 元.

乙队完成此项工程费用为 $30100 \times 15=451500$ 元.

答: 从节省资金的角度考虑, 应该选择甲工程队.

【点评】 本题主要考查的是分式方程的应用、一元一次方程的应用, 根据题意列出关于 x 的方程是解题的关键.

23. (8 分) 已知反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在二四象限, 一次函数为 $y=kx+b$ ($b > 0$), 直线 $x=1$ 与 x 轴交于点 B , 与直线 $y=kx+b$ 交于点 A , 直线 $x=3$ 与 x 轴交于点 C , 与直线 $y=kx+b$ 交于点 D .

(1) 若点 A , D 都在第一象限, 求证: $b > -3k$;

(2) 在 (1) 的条件下, 设直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交于点 E 与 y 轴交于点 F , 当 $\frac{ED}{EA}=\frac{3}{4}$ 且 $\triangle OFE$ 的面积等于 $\frac{27}{2}$ 时, 求这个一次函数的解析式, 并直接写出不等式 $\frac{k}{x} > kx+b$ 的解集.

【考点】 GB: 反比例函数综合题.

【分析】 (1) 由反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在二四象限, 得到 $k < 0$, 于是得到一次函数为 $y=kx+b$ 随 x 的增大而减小, 根据 A , D 都在第一象限, 得到不等式即可得到结论;

(2) 根据题意得到 $\frac{3k+b}{k+b}=\frac{3}{4}$, 由三角形的面积公式得到 $S_{\triangle OFE}=\frac{1}{2} \times (-\frac{b}{k}) \times b=\frac{27}{2}$ 联立方程组解得 $k=-\frac{1}{3}$, $b=3$, 即可得到结论.

【解答】 解: (1) 证明: $\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象在二四象限,

$\therefore k < 0$,

∴ 一次函数为 $y=kx+b$ 随 x 的增大而减小,

∴ A, D 都在第一象限,

∴ $3k+b > 0$,

∴ $b > -3k$;

(2) 由题意知: $\frac{ED}{EA} = \frac{CD}{AB}$,

$$\therefore \frac{3k+b}{k+b} = \frac{3}{4} \text{ ①},$$

∴ $E(-\frac{b}{k}, 0), F(0, b)$,

$$\therefore S_{\triangle OEF} = \frac{1}{2} \times (-\frac{b}{k}) \times b = \frac{27}{2} \text{ ②},$$

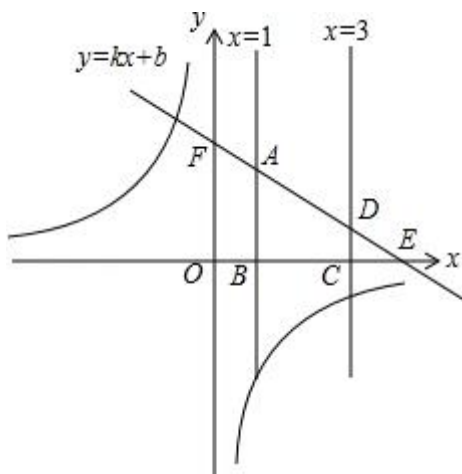
由①②联立方程组解得: $k = -\frac{1}{3}, b = 3$,

∴ 这个一次函数的解析式为 $y = -\frac{1}{3}x + 3$,

解 $-\frac{1}{3x} = -\frac{1}{3}x + 3$ 得 $x_1 = \frac{9-\sqrt{85}}{2}, x_2 = \frac{9+\sqrt{85}}{2}$,

∴ 直线 $y=kx+b$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的交点坐标的横坐标是 $\frac{9-\sqrt{85}}{2}$ 或 $\frac{9+\sqrt{85}}{2}$,

∴ 不等式 $\frac{k}{x} > kx+b$ 的解集为 $\frac{9-\sqrt{85}}{2} < x < 0$ 或 $x > \frac{9+\sqrt{85}}{2}$.



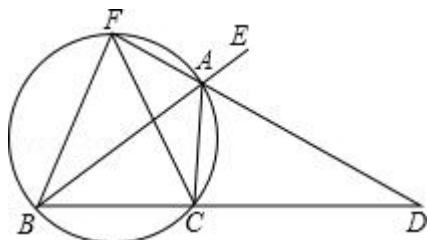
【点评】 本题考查了反比例函数和一次函数的性质, 求函数的解析式, 三角形面积公式的应用, 熟练掌握反比例函数和一次函数的性质是解题的关键.

24. (9 分) 如图, 已知 AD 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle EAC$ 的平分线, 交 BC 的延长线

于点 D，延长 DA 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 F，连接 FB，FC。

(1) 求证： $\angle FBC = \angle FCB$ ；

(2) 已知 $FA \cdot FD = 12$ ，若 AB 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径， $FA = 2$ ，求 CD 的长。



【考点】 MA：三角形的外接圆与外心； S9：相似三角形的判定与性质。

【分析】 (1) 由圆内接四边形的性质和邻补角关系证出 $\angle FBC = \angle CAD$ ，再由角平分线和对顶角相等得出 $\angle FAB = \angle CAD$ ，由圆周角定理得出 $\angle FAB = \angle FCB$ ，即可得出结论；

(2) 由 (1) 得： $\angle FBC = \angle FCB$ ，由圆周角定理得出 $\angle FAB = \angle FBC$ ，由公共角 $\angle BFA = \angle BFD$ ，证出 $\triangle AFB \sim \triangle BFD$ ，得出对应边成比例求出 BF，得出 FD、AD 的长，由圆周角定理得出 $\angle BFA = \angle BCA = 90^\circ$ ，由三角函数求出 $\angle FBA = 30^\circ$ ，再由三角函数求出 CD 的长即可。

【解答】 (1) 证明： $\because$ 四边形 AFBC 内接于圆，

$$\therefore \angle FBC + \angle FAC = 180^\circ,$$

$$\because \angle CAD + \angle FAC = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle FBC = \angle CAD,$$

$\because$ AD 是 $\triangle ABC$ 的外角 $\angle EAC$ 的平分线，

$$\therefore \angle EAD = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle EAD = \angle FAB,$$

$$\therefore \angle FAB = \angle CAD,$$

又 $\because \angle FAB = \angle FCB$,

$\therefore \angle FBC = \angle FCB$;

(2) 解: 由 (1) 得: $\angle FBC = \angle FCB$,

又 $\because \angle FCB = \angle FAB$,

$\therefore \angle FAB = \angle FBC$,

$\therefore \angle BFA = \angle BFD$,

$\therefore \triangle AFB \sim \triangle BFD$,

$$\therefore \frac{BF}{FD} = \frac{FA}{BF},$$

$$\therefore BF^2 = FA \cdot FD = 12,$$

$$\therefore BF = 2\sqrt{3},$$

$$\therefore FA = 2,$$

$$\therefore FD = 6, AD = 4,$$

$\therefore AB$ 为圆的直径,

$$\therefore \angle BFA = \angle BCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \tan \angle FBA = \frac{AF}{BF} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\therefore \angle FBA = 30^\circ,$$

又 $\because \angle FDB = \angle FBA = 30^\circ$,

$$\therefore CD = AD \cdot \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

【点评】 本题考查了相似三角形的判定与性质、圆周角定理、圆内接四边形的性质、三角函数等知识; 本题综合性强, 有一定难度, 证明三角形相似是解决问题的关键.

25. (12 分) 已知二次函数 $y = ax^2 - 2ax + c$ ($a < 0$) 的最大值为 4, 且抛物线过点 $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$, 点 $P(t, 0)$ 是 x 轴上的动点, 抛物线与 y 轴交点为 C , 顶

点为 D.

- (1) 求该二次函数的解析式, 及顶点 D 的坐标;
- (2) 求 $|PC - PD|$ 的最大值及对应的点 P 的坐标;
- (3) 设 Q (0, 2t) 是 y 轴上的动点, 若线段 PQ 与函数 $y = a|x|^2 - 2a|x| + c$ 的图象只有一个公共点, 求 t 的取值.

【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 先利用对称轴公式 $x = -\frac{b}{2a}$ 计算对称轴, 即顶点坐标为 (1, 4), 再将两点代入列二元一次方程组求出解析式;

- (2) 根据三角形的三边关系: 可知 P、C、D 三点共线时 $|PC - PD|$ 取得最大值, 求出直线 CD 与 x 轴的交点坐标, 就是此时点 P 的坐标;

(3) 先把函数中的绝对值化去, 可知 $y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 3 (x < 0) \end{cases}$, 此函数是两个二次

函数的一部分, 分三种情况进行计算: ①当线段 PQ 过点 (0, 3), 即点 Q 与点 C 重合时, 两图象有一个公共点, 当线段 PQ 过点 (3, 0), 即点 P 与点 (3, 0) 重合时, 两函数有两个公共点, 写出 t 的取值; ②线段 PQ 与当函数 $y = a|x|^2 - 2a|x| + c$ ($x \geq 0$) 时有一个公共点时, 求 t 的值; ③当线段 PQ 过点 (-3, 0), 即点 P 与点 (-3, 0) 重合时, 线段 PQ 与当函数 $y = a|x|^2 - 2a|x| + c$ ($x < 0$) 时也有一个公共点, 则当 $t \leq -3$ 时, 都满足条件; 综合以上结论, 得出 t 的取值.

【解答】 解: (1) $\because y = ax^2 - 2ax + c$ 的对称轴为: $x = -\frac{-2a}{2a} = 1$,

$\therefore$ 抛物线过 (1, 4) 和 $(\frac{7}{2}, -\frac{9}{4})$ 两点,

代入解析式得:
$$\begin{cases} a - 2a + c = 4 \\ \frac{49}{4}a - 7a + c = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

解得: $a = -1$, $c = 3$,

$\therefore$ 二次函数的解析式为: $y = -x^2 + 2x + 3$,

$\therefore$ 顶点 D 的坐标为 $(1, 4)$;

(2) $\because$ C、D 两点的坐标为 $(0, 3)$ 、 $(1, 4)$;

由三角形两边之差小于第三边可知:

$$|PC - PD| \leq |CD|,$$

$\therefore$ P、C、D 三点共线时 $|PC - PD|$ 取得最大值, 此时最大值为,

$$|CD| = \sqrt{2},$$

由于 CD 所在的直线解析式为 $y = x + 3$,

将 P $(t, 0)$ 代入得 $t = -3$,

$\therefore$ 此时对应的点 P 为 $(-3, 0)$;

(3) $y = a|x|^2 - 2a|x| + c$ 的解析式可化为:

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 3 & (x < 0) \end{cases},$$

设线段 PQ 所在的直线解析式为 $y = kx + b$, 将 P $(t, 0)$, Q $(0, 2t)$ 代入得:

线段 PQ 所在的直线解析式: $y = -2x + 2t$,

$\therefore$ ①当线段 PQ 过点 $(0, 3)$, 即点 Q 与点 C 重合时, 线段 PQ 与函数

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 3 & (x < 0) \end{cases} \text{ 有一个公共点, 此时 } t = \frac{3}{2},$$

当线段 PQ 过点 $(3, 0)$, 即点 P 与点 $(3, 0)$ 重合时, $t = 3$, 此时线段 PQ 与

$$y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 3 & (x < 0) \end{cases} \text{ 有两个公共点, 所以当 } \frac{3}{2} \leq t < 3 \text{ 时,}$$

$$\text{线段 PQ 与 } y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 & (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 3 & (x < 0) \end{cases} \text{ 有一个公共点,}$$

②将 $y = -2x + 2t$ 代入 $y = -x^2 + 2x + 3$ ($x \geq 0$) 得:

$$-x^2 + 2x + 3 = -2x + 2t,$$

$$-x^2 + 4x + 3 - 2t = 0,$$

$$\Delta = 16 - 4(-1)(3 - 2t) = 0,$$

$$t = \frac{7}{2} > 0,$$

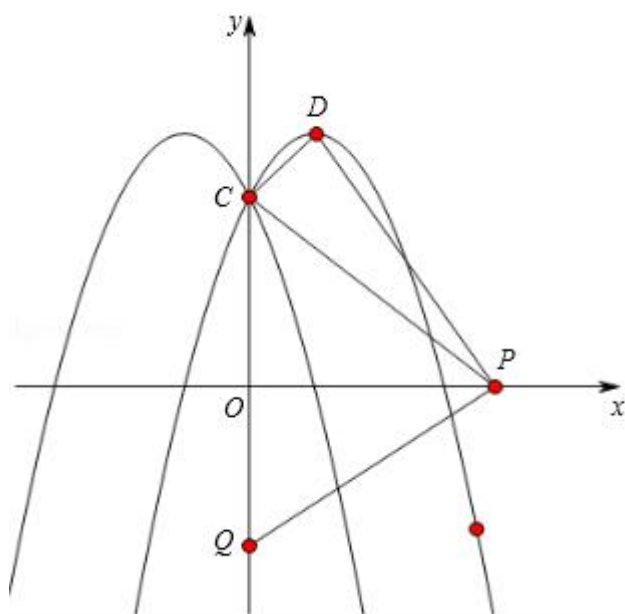
所以当 $t = \frac{7}{2}$ 时, 线段 PQ 与 $y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 3 (x < 0) \end{cases}$ 也有一个公共点,

③当线段 PQ 过点 $(-3, 0)$, 即点 P 与点 $(-3, 0)$ 重合时, 线段 PQ 只与

$y = -x^2 - 2x + 3$ ($x < 0$) 有一个公共点, 此时 $t = -3$,

所以当 $t \leq -3$ 时, 线段 PQ 与 $y = \begin{cases} -x^2 + 2x + 3 (x \geq 0) \\ -x^2 - 2x + 3 (x < 0) \end{cases}$ 也有一个公共点,

综上所述, t 的取值是 $\frac{3}{2} \leq t < 3$ 或 $t = \frac{7}{2}$ 或 $t \leq -3$.



【点评】 本题考查了二次函数的综合应用, 先利用待定系数法求解析式, 同时把最大值与三角形的三边关系联系在一起; 同时对于二次函数利用动点求取值问题, 从特殊点入手, 把函数分成几部分考虑, 按自变量从大到小的顺序或从小到大的顺序求解.