

2015 年内蒙古包头 乌兰察布市中考数学试卷

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分, 每小题只有一个正确选项)

1. (3 分) (2015•包头) 在 $\frac{1}{3}$, 0, -1, $\sqrt{2}$ 这四个实数中, 最大的是 ()

A. $\frac{1}{3}$ B. 0 C. -1 D. $\sqrt{2}$

2. (3 分) (2015•包头) 2014 年中国吸引外国投资达 1280 亿美元, 成为全球外国投资第一大目的地国, 将 1280 亿美元用科学记数法表示为 ()

A. 12.8×10^{10} 美元 B. 1.28×10^{11} 美元

C. 1.28×10^{12} 美元 D. 0.128×10^{13} 美元

3. (3 分) (2015•包头) 下列计算结果正确的是 ()

A. $2a^3 + a^3 = 3a^6$ B. $(-a)^2 \cdot a^3 = -a^6$ C. $(-\frac{1}{2})^{-2} = 4$ D. $(-2)^0 = -1$

4. (3 分) (2015•包头) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 若斜边 AB 是直角边 BC 的 3 倍, 则 $\tan B$ 的值是 ()

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $2\sqrt{2}$

5. (3 分) (2015•包头) 一组数据 5, 2, x, 6, 4 的平均数是 4, 这组数据的方差是 ()

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 10 D. $\sqrt{10}$

6. (3 分) (2015•包头) 不等式组 $\begin{cases} 3(x+2) > 2x+5 \\ \frac{x-1}{2} \leq \frac{x}{3} \end{cases}$ 的最小整数解是 ()

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

7. (3 分) (2015•包头) 已知圆内接正三角形的边心距为 1, 则这个三角形的面积为 ()

A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

8. (3 分) (2015•包头) 下列说法中正确的是 ()

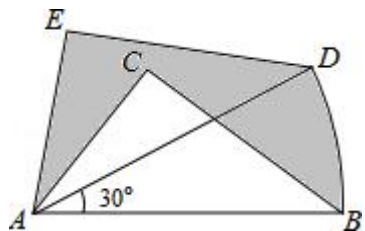
A. 掷两枚质地均匀的硬币，“两枚硬币都是正面朝上”这一事件发生的概率为 $\frac{1}{2}$

B. “对角线相等且相互垂直平分的四边形是正方形”这一事件是必然事件

C. “同位角相等”这一事件是不可能事件

D. “钝角三角形三条高所在直线的交点在三角形外部”这一事件是随机事件

9. (3分) (2015•包头) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=5$, $AC=3$, $BC=4$, 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 后得到 $\triangle ADE$, 点 B 经过的路径为 $\widehat{BD}$, 则图中阴影部分的面积为 ()



A. $\frac{25}{12}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. $\frac{3}{4}\pi$ D. $\frac{5}{12}\pi$

10. (3分) (2015•包头) 观察下列各数: $1, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{16}{15}, \dots$, 按你发现的规律计算这列数的第6个数为 ()

A. $\frac{25}{31}$ B. $\frac{36}{35}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{62}{63}$

11. (3分) (2015•包头) 已知下列命题:

①在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $\angle A > \angle B$, 则 $\sin \angle A > \sin B$;

②四条线段 a, b, c, d 中, 若 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $ad=bc$;

③若 $a > b$, 则 $a(m^2+1) > b(m^2+1)$;

④若 $-x = -x$, 则 $x \geq 0$.

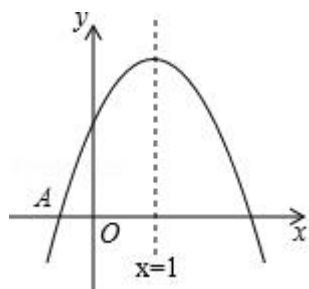
其中原命题与逆命题均为真命题的是 ()

A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

12. (3分) (2015•包头) 如图, 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x=1$, 与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间 (包括这两点), 下列结论:

①当 $x > 3$ 时, $y < 0$; ② $3a+b < 0$; ③ $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$; ④ $4ac - b^2 > 8a$;

其中正确的结论是 ()



A. ①③④ B. ①②③ C. ①②④ D. ①②③④

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

13. (3分) (2015•包头) 计算: $(\sqrt{27} - \sqrt{\frac{1}{3}}) \times \sqrt{3} =$ _____.

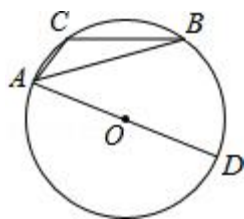
14. (3分) (2015•包头) 化简: $(a - \frac{2a-1}{a}) \div \frac{a^2-1}{a} =$ _____.

15. (3分) (2015•包头) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \sqrt{k-1}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是_____.

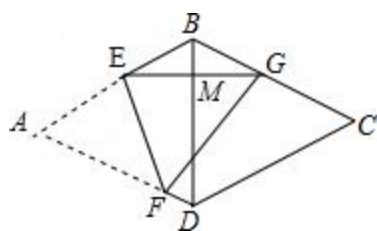
16. (3分) (2015•包头) 一个不透明的布袋里装有 5 个球, 其中 4 个红球和 1 个白球, 它们除颜色外其余都相同, 现将 n 个白球放入布袋, 搅匀后, 使摸出 1 个球是红球的概率为 $\frac{2}{3}$, 则 $n =$ _____.

17. (3分) (2015•包头) 已知点 $A(-2, y_1)$, $B(-1, y_2)$ 和 $C(3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象上, 则 y_1, y_2, y_3 的大小关系为_____. (用“<”连接)

18. (3分) (2015•包头) 如图, $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆, AD 是 $\odot O$ 的直径, 若 $\odot O$ 的半径是 4, $\sin B = \frac{1}{4}$, 则线段 AC 的长为_____.



19. (3 分) (2015•包头) 如图, 在边长为 $\sqrt{3}+1$ 的菱形 ABCD 中, $\angle A=60^\circ$, 点 E, F 分别在 AB, AD 上, 沿 EF 折叠菱形, 使点 A 落在 BC 边上的点 G 处, 且 $EG \perp BD$ 于点 M, 则 EG 的长为_____.



20. (3 分) (2015•包头) 如图, 在矩形 ABCD 中, $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E, 交 DC 的延长线于点 F, 取 EF 的中点 G, 连接 CG, BG, BD, DG, 下列结论:

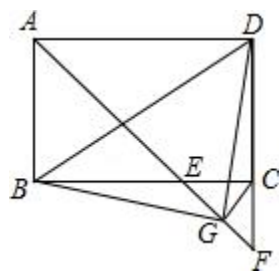
① $BE=CD$;

② $\angle DGF=135^\circ$;

③ $\angle ABG+\angle ADG=180^\circ$;

④ 若 $\frac{AB}{AD}=\frac{2}{3}$, 则 $3S_{\triangle BDG}=13S_{\triangle DGF}$.

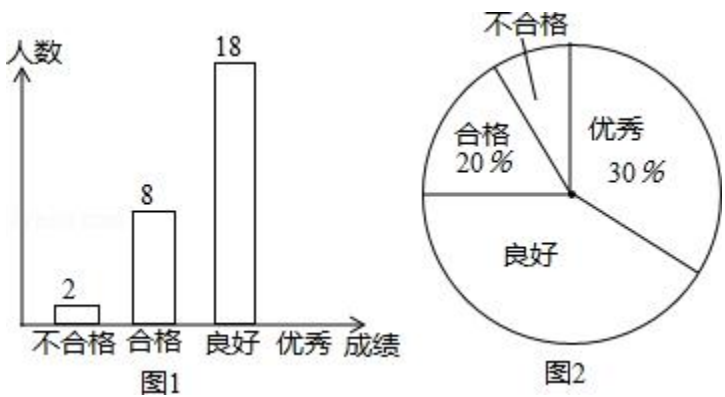
其中正确的结论是_____. (填写所有正确结论的序号)



三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 60 分, 请将必要的文字说明、计算过程或推理过程写出)

21. (8 分) (2015•包头) 某学校为了解七年级男生体质健康情况, 随机抽取若干名男生进行测试, 测试结果分为优秀、良好、合格、不合格四个等级, 统计整理

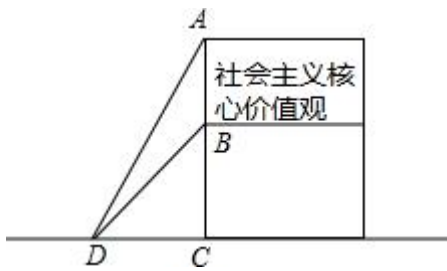
数据并绘制图 1、图 2 两幅不完整的统计图，请根据图中信息回答下列问题：



- (1) 本次接收随机抽样调查的男生人数为_____人，扇形统计图中“良好”所对应的圆心角的度数为_____；
- (2) 补全条形统计图中“优秀”的空缺部分；
- (3) 若该校七年级共有男生 480 人，请估计全年级男生体质健康状况达到“良好”的人数。

22. (8 分) (2015•包头) 为了弘扬“社会主义核心价值观”，市政府在广场树立公益广告牌，如图所示，为固定广告牌，在两侧加固钢缆，已知钢缆底端 D 距广告牌立柱距离 CD 为 3 米，从 D 点测得广告牌顶端 A 点和底端 B 点的仰角分别是 60° 和 45° 。

- (1) 求公益广告牌的高度 AB；
- (2) 求加固钢缆 AD 和 BD 的长. (注意：本题中的计算过程和结果均保留根号)

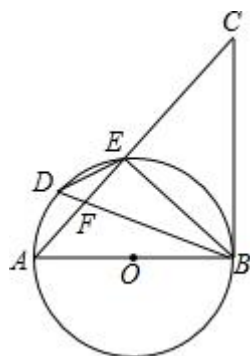


23. (10 分) (2015•包头) 我市某养殖场计划购买甲、乙两种鱼苗共 700 尾，甲种鱼苗每尾 3 元，乙种鱼苗每尾 5 元，相关资料表明：甲、乙两种鱼苗的成活率分别为 85% 和 90%.

- (1) 若购买这两种鱼苗共用去 2500 元，则甲、乙两种鱼苗各购买多少尾？
- (2) 若要使这批鱼苗的总成活率不低于 88%，则甲种鱼苗至多购买多少尾？
- (3) 在 (2) 的条件下，应如何选购鱼苗，使购买鱼苗的费用最低？并求出最低费用.

24. (10 分) (2015•包头) 如图，AB 是 $\odot O$ 的直径，点 D 是 $\widehat{AE}$ 上一点，且 $\angle BDE = \angle CBE$ ，BD 与 AE 交于点 F.

- (1) 求证：BC 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 若 BD 平分 $\angle ABE$ ，求证： $DE^2 = DF \cdot DB$ ；
- (3) 在 (2) 的条件下，延长 ED，BA 交于点 P，若 $PA = AO$ ， $DE = 2$ ，求 PD 的长和 $\odot O$ 的半径.

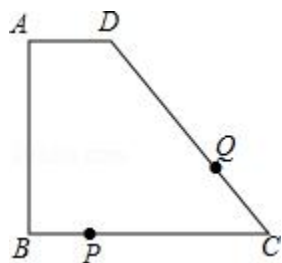


25. (12 分) (2015•包头) 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, $\angle A = 90^\circ$, $AD = 1$ 厘米, $AB = 3$ 厘米, $BC = 5$ 厘米, 动点 P 从点 B 出发以 1 厘米/秒的速度沿 BC 方向运动, 动点 Q 从点 C 出发以 2 厘米/秒的速度沿 CD 方向运动, P, Q 两点同时出发, 当点 Q 到达点 D 时停止运动, 点 P 也随之停止, 设运动时间为 t 秒 ($t > 0$).

- (1) 求线段 CD 的长;
- (2) t 为何值时, 线段 PQ 将四边形 $ABCD$ 的面积分为 1: 2 两部分?
- (3) 伴随 P, Q 两点的运动, 线段 PQ 的垂直平分线为 l .

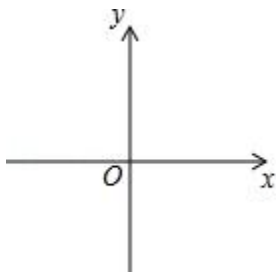
① t 为何值时, l 经过点 C ?

② 求当 l 经过点 D 时 t 的值, 并求出此时刻线段 PQ 的长.



26. (12 分) (2015•包头) 已知抛物线 $y = x^2 + bx + c$ 经过 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点, 与 y 轴相交于点 C , 该抛物线的顶点为点 D .

- (1) 求该抛物线的解析式及点 D 的坐标;
- (2) 连接 AC, CD, BD, BC , 设 $\triangle AOC$, $\triangle BOC$, $\triangle BCD$ 的面积分别为 S_1 , S_2 和 S_3 , 用等式表示 S_1, S_2, S_3 之间的数量关系, 并说明理由;
- (3) 点 M 是线段 AB 上一动点 (不包括点 A 和点 B), 过点 M 作 $MN \parallel BC$ 交 AC 于点 N , 连接 MC , 是否存在点 M 使 $\angle AMN = \angle ACM$? 若存在, 求出点 M 的坐标和此时刻直线 MN 的解析式; 若不存在, 请说明理由.



2015 年内蒙古乌兰察布市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分，每小题只有一个正确选项）

1. （3 分）（2015•包头）在 $\frac{1}{3}$ ，0，-1， $\sqrt{2}$ 这四个实数中，最大的是（ ）

A. $\frac{1}{3}$ B. 0 C. -1 D. $\sqrt{2}$

考点： 实数大小比较.

分析： 利用任意两个实数都可以比较大小，正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，两个负实数绝对值大的反而小进行比较即可.

解答： 解：∵正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，

$$0 < \frac{1}{3} < 1, 1 < \sqrt{2} < 2,$$

$$\therefore -1 < 0 < \frac{1}{3} < \sqrt{2},$$

故选 D.

点评： 本题主要考查了比较实数的大小，掌握任意两个实数都可以比较大小，正实数都大于 0，负实数都小于 0，正实数大于一切负实数，是解答此题的关键.

2. （3 分）（2015•包头）2014 年中国吸引外国投资达 1280 亿美元，成为全球外国投资第一大目的地国，将 1280 亿美元用科学记数法表示为（ ）

A. 12.8×10^{10} 美元 B. 1.28×10^{11} 美元

C. 1.28×10^{12} 美元 D. 0.128×10^{13} 美元

考点：科学记数法—表示较大的数.

分析：科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

解答：解：1280 亿 $= 128000000000 = 1.28 \times 10^{11}$,

故选：B.

点评：此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

3. (3 分) (2015•包头) 下列计算结果正确的是 ()

A. $2a^3 + a^3 = 3a^6$ B. $(-a)^2 \cdot a^3 = -a^6$ C. $(-\frac{1}{2})^{-2} = 4$ D. $(-2)^0 = -1$

考点：同底数幂的乘法；合并同类项；幂的乘方与积的乘方；零指数幂；负整数指数幂.

分析：根据同底数幂的乘法的性质，负整数指数幂，零指数幂，合并同类项的法则，对各选项分析判断后利用排除法求解.

解答：解：A、 $2a^3 + a^3 = 3a^3$ ，故错误；

B、 $(-a)^2 \cdot a^3 = a^5$ ，故错误；

C、正确；

D、 $(-2)^0 = 1$ ，故错误；

故选：C.

点评：本题考查了合并同类项，同底数幂的乘法，负整数指数幂，零指数幂，理清指数的变化是解题的关键.

4. (3分) (2015•包头) 在 $Rt\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若斜边 AB 是直角边 BC 的 3 倍, 则 $\tan B$ 的值是 () .

A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $2\sqrt{2}$

考点: 锐角三角函数的定义; 勾股定理.

分析: 设 $BC=x$, 则 $AB=3x$, 由勾股定理求出 AC , 根据三角函数的概念求出 $\tan B$.

解答: 解: 设 $BC=x$, 则 $AB=3x$,

由勾股定理得, $AC=2\sqrt{2}x$,

$$\tan B = \frac{AC}{BC} = \frac{2\sqrt{2}x}{x} = 2\sqrt{2},$$

故选: D.

点评: 本题考查的是锐角三角函数的概念和勾股定理的应用, 应用勾股定理求出直角三角形的边长、正确理解锐角三角函数的概念是解题的关键.

5. (3分) (2015•包头) 一组数据 5, 2, x , 6, 4 的平均数是 4, 这组数据的方差是 ()

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 10 D. $\sqrt{10}$

考点: 方差; 算术平均数.

分析: 根据平均数的公式求出 x 的值, 根据方差公式求出方差.

解答: 解: 由题意得, $\frac{1}{5}(5+2+x+6+4)=4$,

解得, $x=3$,

$$s^2 = \frac{1}{5}[(5-4)^2 + (2-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2 + (4-4)^2]$$

$=2$,

故选: A.

点评: 本题考查的是平均数和方差的计算, 掌握平均数和方差的计算公式是解题的关键. 方差 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$.

6. (3分) (2015•包头) 不等式组
$$\begin{cases} 3(x+2) > 2x+5 \\ \frac{x-1}{2} \leq \frac{x}{3} \end{cases}$$
 的最小整数解是 ()
- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

考点：一元一次不等式组的整数解.

分析：先解不等式组，求出解集，再找出最小的整数解即可.

解答：解：
$$\begin{cases} 3(x+2) > 2x+5 \textcircled{1} \\ \frac{x-1}{2} \leq \frac{x}{3} \textcircled{2} \end{cases},$$

解①得 $x > -1$,

解②得 $x \leq 3$,

不等式组的解集为 $-1 < x \leq 3$,

不等式组的最小整数解为 0,

故选 B.

点评：本题考查了不等式组的解法及整数解的确定. 求不等式组的解集，应遵循以下原则：同大取较大，同小取较小，小大大小中间找，大大小小解不了.

7. (3分) (2015•包头) 已知圆内接正三角形的边心距为 1，则这个三角形的面积为 ()

A. $2\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $4\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$

考点：正多边形和圆.

分析：作 $AD \perp BC$ 与 D，连接 OB，则 AD 经过圆心 O， $\angle ODB = 90^\circ$ ， $OD = 1$ ，由等边三角形的性质得出 $BD = CD$ ， $\angle OBD = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$ ，得出 $OA = OB = 2OD$ ，求出 AD、BC， $\triangle ABC$ 的面积 $= \frac{1}{2} BC \cdot AD$ ，即可得出结果.

解答：解：如图所示：

作 $AD \perp BC$ 与 D，连接 OB，

则 AD 经过圆心 O， $\angle ODB = 90^\circ$ ， $OD = 1$ ，

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形,

$\therefore BD=CD, \angle OBD=\frac{1}{2}\angle ABC=30^\circ,$

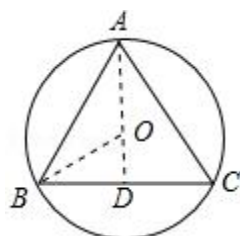
$\therefore OA=OB=2OD=2,$

$\therefore AD=3, BD=\sqrt{3},$

$\therefore BC=2\sqrt{3},$

$\therefore \triangle ABC$ 的面积 $=\frac{1}{2}BC \cdot AD=\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 3=3\sqrt{3};$

故选: B.



点评: 本题考查了圆内接正三角形的性质、解直角三角形、三角形面积的计算; 熟练掌握圆内接正三角形的性质, 并能进行推理计算是解决问题的关键.

8. (3 分) (2015•包头) 下列说法中正确的是 ()

- A. 掷两枚质地均匀的硬币, “两枚硬币都是正面朝上”这一事件发生的概率为 $\frac{1}{2}$
- B. “对角线相等且相互垂直平分的四边形是正方形”这一事件是必然事件
- C. “同位角相等”这一事件是不可能事件
- D. “钝角三角形三条高所在直线的交点在三角形外部”这一事件是随机事件

考点: 随机事件; 列表法与树状图法.

分析: 根据概率的意义, 可判断 A; 根据必然事件, 可判断 B、D; 根据随机事件, 可判断 C.

解答： 解：A、掷两枚质地均匀的硬币，“两枚硬币都是正面朝上”这一事件发生的概率为 $\frac{1}{3}$ ，故 A 错误；

B、“对角线相等且相互垂直平分的四边形是正方形”这一事件是必然事件，故 B 正确；

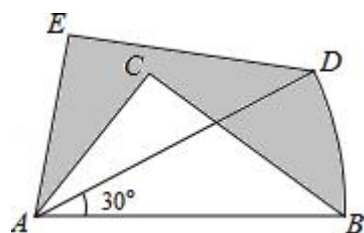
C、同位角相等是随机事件，故 C 错误；

D、“钝角三角形三条高所在直线的交点在三角形外部”这一事件是必然事件，故 D 错误；

故选：B.

点评： 本题考查了随机事件，解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下，一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件.

9. (3 分) (2015•包头) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB=5$ ， $AC=3$ ， $BC=4$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 30° 后得到 $\triangle ADE$ ，点 B 经过的路径为 $\widehat{BD}$ ，则图中阴影部分的面积为 ()



- A. $\frac{25}{12}\pi$ B. $\frac{4}{3}\pi$ C. $\frac{3}{4}\pi$ D. $\frac{5}{12}\pi$

考点： 扇形面积的计算；勾股定理的逆定理；旋转的性质.

分析： 根据 $AB=5$ ， $AC=3$ ， $BC=4$ 和勾股定理的逆定理判断三角形的形状，根据旋转的性质得到 $\triangle AED$ 的面积= $\triangle ABC$ 的面积，得到阴影部分的面积=扇形 ADB 的面积，根据扇形面积公式计算即可.

解答： 解： $\because AB=5$ ， $AC=3$ ， $BC=4$ ，

∴△ABC 为直角三角形,

由题意得, △AED 的面积=△ABC 的面积,

由图形可知, 阴影部分的面积=△AED 的面积+扇形 ADB 的面积 - △ABC 的面积,

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = \text{扇形 ADB 的面积} = \frac{30\pi \times 5^2}{360} = \frac{25}{12}\pi,$$

故选: A.

点评: 本题考查的是扇形面积的计算、旋转的性质和勾股定理的逆定理, 根据图形得到阴影部分的面积=扇形 ADB 的面积是解题的关键.

10. (3 分) (2015•包头) 观察下列各数: $1, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{16}{15}, \dots$, 按你发现的规律计算这列数的第 6 个数为 ()

A. $\frac{25}{31}$ B. $\frac{36}{35}$ C. $\frac{4}{7}$ D. $\frac{62}{63}$

考点: 规律型: 数字的变化类.

分析: 观察数据, 发现第 n 个数为 $\frac{n^2}{2^n - 1}$, 再将 n=6 代入计算即可求解.

解答: 解: 观察该组数发现: $1, \frac{4}{3}, \frac{9}{7}, \frac{16}{15}, \dots$,

$$\text{第 } n \text{ 个数为 } \frac{n^2}{2^n - 1},$$

$$\text{当 } n=6 \text{ 时, } \frac{n^2}{2^n - 1} = \frac{6^2}{2^6 - 1} = \frac{4}{7}.$$

故选 C.

点评: 本题考查了数字的变化类问题, 通过观察, 分析、归纳并发现其中的规律, 并应用发现的规律解决问题是应该具备的基本能力. 本题的关键是发现第 n

$$\text{个数为 } \frac{n^2}{2^n - 1}.$$

11. (3 分) (2015•包头) 已知下列命题:

①在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $\angle A > \angle B$, 则 $\sin\angle A > \sin B$;

②四条线段 a, b, c, d 中, 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 则 $ad=bc$;

③若 $a > b$, 则 $a(m^2+1) > b(m^2+1)$;

④若 $|-x|=-x$, 则 $x \geq 0$.

其中原命题与逆命题均为真命题的是 ()

A. ①②③ B. ①②④ C. ①③④ D. ②③④

考点: 命题与定理.

分析: 先对原命题进行判断, 再根据互逆命题的定义写出逆命题, 然后判断逆命题的真假即可.

解答: 解: ①在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $\angle A > \angle B$, 则 $\sin\angle A > \sin B$, 原命题为真命题,

逆命题是: 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C=90^\circ$, 若 $\sin\angle A > \sin B$, 则 $\angle A > \angle B$, 逆命题为真命题;

②四条线段 a, b, c, d 中, 若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 则 $ad=bc$, 原命题为真命题,

逆命题是: 四条线段 a, b, c, d 中, 若 $ad=bc$, 则 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 逆命题为真命题;

③若 $a > b$, 则 $a(m^2+1) > b(m^2+1)$, 原命题为真命题,

逆命题是: 若 $a(m^2+1) > b(m^2+1)$, 则 $a > b$, 逆命题为真命题;

④若 $|-x|=-x$, 则 $x \geq 0$, 原命题为假命题,

逆命题是: 若 $x \geq 0$, 则 $|-x|=-x$, 逆命题为假命题.

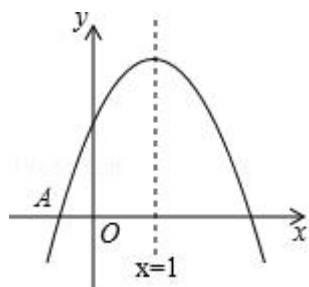
故选 A.

点评: 主要考查命题与定理, 用到的知识点是互逆命题的知识, 两个命题中, 如果第一个命题的条件是第二个命题的结论, 而第一个命题的结论又是第二个命题的条件, 那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题, 判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

12. (3分) (2015•包头) 如图, 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) 的图象与 x 轴交于点 $A(-1, 0)$, 对称轴为直线 $x=1$, 与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间 (包括这两点), 下列结论:

①当 $x > 3$ 时, $y < 0$; ② $3a+b < 0$; ③ $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$; ④ $4ac - b^2 > 8a$;

其中正确的结论是 ()



A. ①③④ B. ①②③ C. ①②④ D. ①②③④

考点: 二次函数图象与系数的关系.

分析: ①先由抛物线的对称性求得抛物线与 x 轴另一个交点的坐标为 $(3, 0)$, 从而可知当 $x > 3$ 时, $y < 0$;

②由抛物线开口向下可知 $a < 0$, 然后根据 $x = -\frac{b}{2a} = 1$, 可知: $2a+b=0$, 从而可知 $3a+b=0+a=a < 0$;

③设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$, 则 $y=ax^2-2ax-3a$, 令 $x=0$ 得: $y=-3a$. 由抛物线与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间, 可知 $2 \leq -3a \leq 3$. ④由 $4ac - b^2 > 8a$ 得 $c - 2 < 0$ 与题意不符.

解答: 解: ①由抛物线的对称性可求得抛物线与 x 轴另一个交点的坐标为 $(3, 0)$, 当 $x > 3$ 时, $y < 0$, 故①正确;

②抛物线开口向下, 故 $a < 0$,

$$\because x = -\frac{b}{2a} = 1,$$

$$\therefore 2a+b=0.$$

$$\therefore 3a+b=0+a=a < 0, \text{ 故②正确;}$$

③设抛物线的解析式为 $y=a(x+1)(x-3)$, 则 $y=ax^2-2ax-3a$,

令 $x=0$ 得: $y=-3a$.

∵抛物线与 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间,

$$\therefore 2 \leq -3a \leq 3.$$

解得: $-1 \leq a \leq -\frac{2}{3}$, 故③正确;

④. ∵抛物线 y 轴的交点 B 在 $(0, 2)$ 和 $(0, 3)$ 之间,

$$\therefore 2 \leq c \leq 3,$$

由 $4ac - b^2 > 8a$ 得: $4ac - 8a > b^2$,

$$\therefore a < 0,$$

$$\therefore c - 2 < \frac{b^2}{4a}$$

$$\therefore c - 2 < 0$$

$\therefore c < 2$, 与 $2 \leq c \leq 3$ 矛盾, 故④错误.

故选: B.

点评: 本题主要考查的是二次函数的图象和性质, 掌握抛物线的对称轴、开口方向与系数 a 、 b 、 c 之间的关系是解题的关键.

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

13. (3 分) (2015•包头) 计算: $(\sqrt{27} - \sqrt{\frac{1}{3}}) \times \sqrt{3} = \underline{8}$.

考点: 二次根式的混合运算.

专题: 计算题.

分析: 原式利用乘法分配律及二次根式乘法法则计算即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= \sqrt{27 \times 3} - \sqrt{\frac{1}{3} \times 3} = 9 - 1 = 8$,

故答案为: 8

点评: 此题考查了二次根式的混合运算, 熟练掌握运算是解本题的关键.

14. (3 分) (2015•包头) 化简: $(a - \frac{2a-1}{a}) \div \frac{a^2-1}{a} = -\frac{a-1}{a+1}$.

考点: 分式的混合运算.

专题: 计算题.

分析: 原式括号中两项通分并利用同分母分式的减法法则计算, 同时利用除法法则变形, 约分即可得到结果.

解答: 解: 原式 $= \frac{a^2-2a+1}{a} \cdot \frac{a}{a^2-1} = \frac{(a-1)^2}{a} \cdot \frac{a}{(a+1)(a-1)} = \frac{a-1}{a+1}$,

故答案为: $\frac{a-1}{a+1}$

点评: 此题考查了分式的混合运算, 熟练掌握运算法则是解本题的关键.

15. (3 分) (2015•包头) 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \sqrt{k-1}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 则 k 的取值范围是 $k \geq 1$.

考点: 根的判别式.

分析: 根据二次根式有意义的条件和 Δ 的意义得到 $\begin{cases} k-1 \geq 0 \\ k-1+4 > 0 \end{cases}$, 然后解不等式组即可得到 k 的取值范围.

解答: 解: $\because$ 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + \sqrt{k-1}x - 1 = 0$ 有两个不相等的实数根,

$$\therefore \begin{cases} k-1 \geq 0 \\ k-1+4 > 0 \end{cases},$$

解得 $k \geq 1$,

$\therefore$ k 的取值范围是 $k \geq 1$.

故答案为: $k \geq 1$.

点评: 此题考查了一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的根的判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$. 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根; 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有

两个相等的实数根；当 $\Delta < 0$ 时，方程没有实数根．也考查了二次根式有意义的条件．

16. (3分) (2015•包头) 一个不透明的布袋里装有5个球，其中4个红球和1个白球，它们除颜色外其余都相同，现将 n 个白球放入布袋，搅匀后，使摸出1个球是红球的概率为 $\frac{2}{3}$ ，则 $n=$ 1．

考点： 概率公式．

分析： 由一个不透明的布袋里装有5个球，其中4个红球和1个白球，它们除颜色外其余都相同，现将 n 个白球放入布袋，搅匀后，使摸出1个球是红球的概率为 $\frac{2}{3}$ ，即可得方程： $\frac{4}{5+n} = \frac{2}{3}$ ，解此分式方程即可求得答案．

解答： 解：根据题意得： $\frac{4}{5+n} = \frac{2}{3}$ ，

解得： $n=1$ ，

经检验： $n=1$ 是原分式方程的解．

故答案为：1．

点评： 此题考查了概率公式的应用．用到的知识点为：概率=所求情况数与总情况数之比．

17. (3分) (2015•包头) 已知点A $(-2, y_1)$ ，B $(-1, y_2)$ 和C $(3, y_3)$ 都在反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 的图象上，则 y_1, y_2, y_3 的大小关系为 $y_2 < y_1 < y_3$ ．(用“<”连接)

考点： 反比例函数图象上点的坐标特征．

分析： 先根据反比例函数中 $k > 0$ 判断出函数图象所在的象限及增减性，再根据各点横坐标的特点即可得出结论．

解答： 解： $\because$ 反比例函数 $y = \frac{3}{x}$ 中 $k=3 > 0$ ，

∴函数图象的两个分支分别位于一、三象限，且在每一象限内 y 随 x 的增大而减小.

$$\because -2 < -1 < 0,$$

∴点 $A(-2, y_1)$, $B(-1, y_2)$ 位于第三象限，且 $0 > y_1 > y_2$.

$$\because 3 > 0,$$

∴点 $C(3, y_3)$ 位于第一象限，

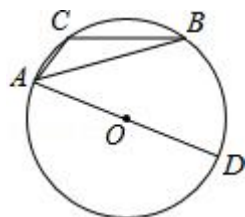
$$\therefore y_3 > 0,$$

$$\therefore y_2 < y_1 < y_3.$$

故答案为: $y_2 < y_1 < y_3$.

点评: 本题考查的是反比例函数图象上点的坐标特征，熟知反比例函数图象上各点的坐标一定适合此函数的解析式是解答此题的关键.

18. (3分) (2015•包头) 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， AD 是 $\odot O$ 的直径，若 $\odot O$ 的半径是 4， $\sin B = \frac{1}{4}$ ，则线段 AC 的长为 2.



考点: 圆周角定理；解直角三角形.

专题: 计算题.

分析: 连结 CD 如图，根据圆周角定理得到 $\angle ACD = 90^\circ$ ， $\angle D = \angle B$ ，则 $\sin D = \sin B = \frac{1}{4}$ ，

然后在 $Rt\triangle ACD$ 中利用 $\angle D$ 的正弦可计算出 AC 的长.

解答: 解：连结 CD ，如图，

∵ AD 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle ACD = 90^\circ,$$

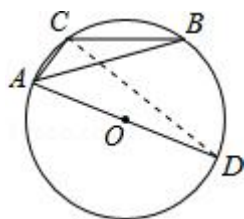
$$\therefore \angle D = \angle B,$$

$$\therefore \sin D = \sin B = \frac{1}{4},$$

$$\text{在 Rt}\triangle ACD \text{ 中, } \therefore \sin D = \frac{AC}{AD} = \frac{1}{4},$$

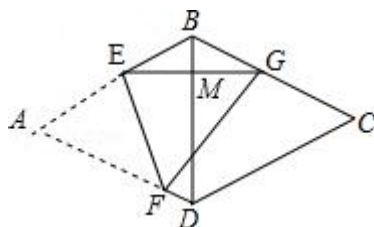
$$\therefore AC = \frac{1}{4}AD = \frac{1}{4} \times 8 = 2.$$

故答案为 2.



点评: 本题考查了圆周角定理: 在同圆或等圆中, 同弧或等弧所对的圆周角相等, 都等于这条弧所对的圆心角的一半. 推论: 半圆 (或直径) 所对的圆周角是直角, 90° 的圆周角所对的弦是直径. 也考查了解直角三角形.

19. (3 分) (2015•包头) 如图, 在边长为 $\sqrt{3}+1$ 的菱形 ABCD 中, $\angle A = 60^\circ$, 点 E, F 分别在 AB, AD 上, 沿 EF 折叠菱形, 使点 A 落在 BC 边上的点 G 处, 且 EG



$\perp BD$ 于点 M, 则 EG 的长为 $\sqrt{3}$.

考点: 翻折变换 (折叠问题); 菱形的性质.

分析: 首先连接 AC, 再根据余弦定理, 求出 AC 的长度是多少; 然后根据菱形的性质, 判断出 $AC \perp BD$, 再根据 $EG \perp BD$, 可得 $EG \parallel AC$, 所以 $\frac{EG}{AC} = \frac{BE}{AE}$, 据此求出 EG 的长为多少即可.

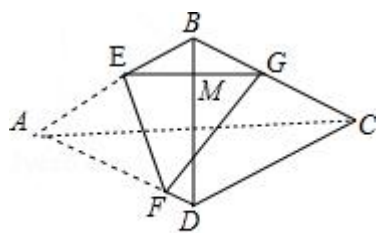


图1

解答：解：如图 1，连接 AC，

$\therefore$ 菱形 ABCD 的边长是 $\sqrt{3}+1$ ， $\angle A=60^\circ$ ，

$$\therefore AC = \sqrt{2 \times (\sqrt{3}+1)^2 - 2(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1)\cos 120^\circ} = 3 + \sqrt{3},$$

$\therefore$ 沿 EF 折叠菱形，使点 A 落在 BC 边上的点 G 处，

$$\therefore EG = AE,$$

$\therefore$ 四边形 ABCD 是菱形，

$$\therefore AC \perp BD,$$

$$\text{又} \therefore EG \perp BD,$$

$$\therefore EG \parallel AC,$$

$$\therefore \frac{EG}{AC} = \frac{BE}{AE},$$

$$\text{又} \therefore EG = AE,$$

$$\therefore \frac{EG}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1-EG}{\sqrt{3}+1},$$

$$\text{解得 } EG = \sqrt{3},$$

$$\therefore EG \text{ 的长为 } \sqrt{3}.$$

故答案为： $\sqrt{3}$.

点评：（1）此题主要考查了翻折变换问题，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：折叠是一种对称变换，它属于轴对称，折叠前后图形的形状和大小不变，位置变化，对应边和对应角相等.

（2）此题还考查了菱形的性质和应用，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：

①菱形具有平行四边形的一切性质；②菱形的四条边都相等；③菱形的两条对角

线互相垂直，并且每一条对角线平分一组对角；④菱形是轴对称图形，它有 2 条对称轴，分别是两条对角线所在直线.

20. (3 分) (2015•包头) 如图，在矩形 ABCD 中， $\angle BAD$ 的平分线交 BC 于点 E，交 DC 的延长线于点 F，取 EF 的中点 G，连接 CG，BG，BD，DG，下列结论：

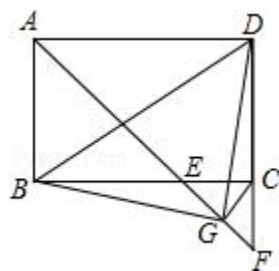
① $BE=CD$;

② $\angle DGF=135^\circ$;

③ $\angle ABG+\angle ADG=180^\circ$;

④ 若 $\frac{AB}{AD}=\frac{2}{3}$ ，则 $3S_{\triangle BDG}=13S_{\triangle DGF}$.

其中正确的结论是 ①③④. (填写所有正确结论的序号)



考点： 四边形综合题.

分析： 先求出 $\angle BAE=45^\circ$ ，判断出 $\triangle ABE$ 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质可得 $AB=BE$ ， $\angle AEB=45^\circ$ ，从而得到 $BE=CD$ ，故①正确；

再求出 $\triangle CEF$ 是等腰直角三角形，根据等腰直角三角形的性质可得 $CG=EG$ ，再求出 $\angle BEG=\angle DCG=135^\circ$ ，然后利用“边角边”证明 $\triangle DCG \cong \triangle BEG$ ，得到 $\angle BGE=\angle DGC$ ，由 $\angle BGE < \angle AEB$ ，得到 $\angle DGC=\angle BGE < 45^\circ$ ， $\angle DGF < 135^\circ$ ，故②错误；

由于 $\angle BGE=\angle DGC$ ，得到 $\angle ABG+\angle ADG=\angle ABC+\angle CBG+\angle ADC-\angle CDG=\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$ ，故③正确；

由 $\triangle BGD$ 是等腰直角三角形得到 $BD=\sqrt{AD^2+AB^2}=\sqrt{13}$,求得

$$S_{\triangle BDG}=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{26}}{2}\times\frac{\sqrt{26}}{2}=\frac{13}{4}, \text{过 } G \text{ 作 } GM\perp CF \text{ 于 } M, \text{求得}$$

$$S_{\triangle DGF}=\frac{1}{2}\cdot DF\cdot GM=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}, \text{故④正确.}$$

解答: 解: $\because AE$ 平分 $\angle BAD$,

$$\therefore \angle BAE=45^\circ,$$

$\therefore \triangle ABE$ 是等腰直角三角形,

$$\therefore AB=BE, \angle AEB=45^\circ,$$

$$\because AB=CD,$$

$$\therefore BE=CD,$$

故①正确;

$$\because \angle CEF=\angle AEB=45^\circ, \angle ECF=90^\circ,$$

$\therefore \triangle CEF$ 是等腰直角三角形,

$\because$ 点 G 为 EF 的中点,

$$\therefore CG=EG, \angle FCG=45^\circ,$$

$$\therefore \angle BEG=\angle DCG=135^\circ,$$

在 $\triangle DCG$ 和 $\triangle BEG$ 中,

$$\begin{cases} BE=CD \\ \angle BEG=\angle DCG, \\ CG=EG \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DCG\cong\triangle BEG \text{ (SAS).}$$

$$\therefore \angle BGE=\angle DGC,$$

$$\because \angle BGE<\angle AEB,$$

$$\therefore \angle DGC=\angle BGE<45^\circ,$$

$$\therefore \angle CGF=90^\circ,$$

$$\therefore \angle DGF < 135^\circ,$$

故②错误;

$$\because \angle BGE = \angle DGC,$$

$$\therefore \angle ABG + \angle ADG = \angle ABC + \angle CBG + \angle ADC - \angle CDG = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ,$$

故③正确;

$$\because \triangle DCG \cong \triangle BEG,$$

$$\because \angle BGE = \angle DGC, \quad BG = DG,$$

$$\because \angle EGC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BGD = 90^\circ,$$

$$\because BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{13},$$

$$\therefore BG = DG = \frac{\sqrt{26}}{2},$$

$$\therefore S_{\triangle BDG} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{26}}{2} \times \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{13}{4}$$

$$\therefore 3S_{\triangle BDG} = \frac{3 \times 13}{4},$$

过 G 作 $GM \perp CF$ 于 M,

$$\because CE = CF = BC - BE = BC - AB = 1,$$

$$\therefore GM = \frac{1}{2}CF = \frac{1}{2},$$

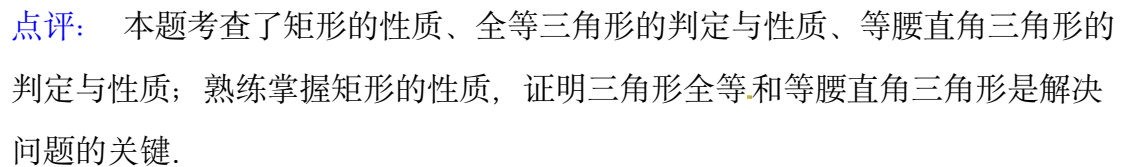
$$\therefore S_{\triangle DGF} = \frac{1}{2} \cdot DF \cdot GM = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4},$$

$$\therefore 13S_{\triangle DGF} = \frac{13 \times 3}{4},$$

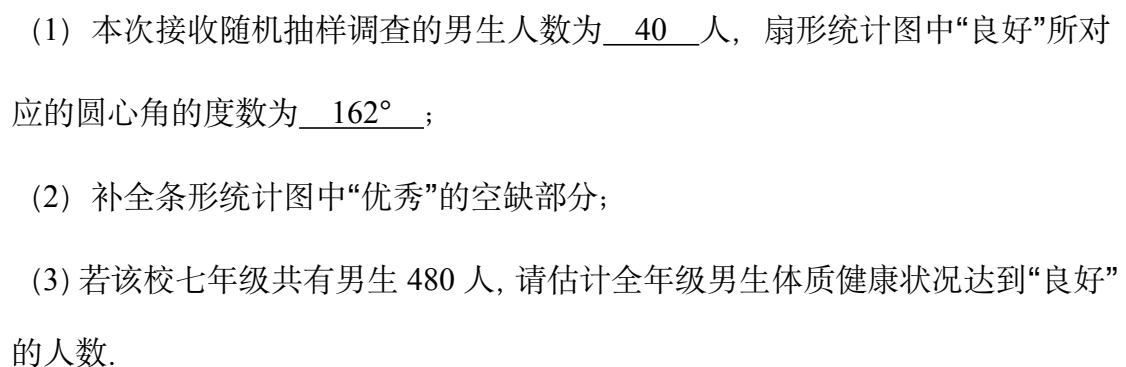
$$\therefore 3S_{\triangle BDG} = 13S_{\triangle DGF},$$

故④正确.

故答案为: ①③④.



21. (8分) (2015•包头) 某学校为了解七年级男生体质健康情况, 随机抽取若干名男生进行测试, 测试结果分为优秀、良好、合格、不合格四个等级, 统计整理数据并绘制图 1、图 2 两幅不完整的统计图, 请根据图中信息回答下列问题:



考点：条形统计图；用样本估计总体；扇形统计图.

分析：（1）合格人数除以所占的百分比即可得出所调查的男生总人数，用良好的人数除以总人数再乘以 360° 即可得出“良好”所对应的圆心角的度数；

（2）用 $40 - 2 - 8 - 18$ 即可；

（3）用 480 乘以良好所占的百分比即可．

解答：解：（1） $8 \div 20\% = 40$ （人），

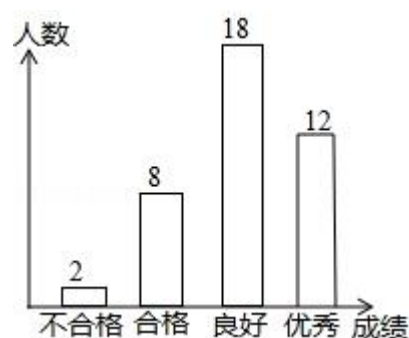
$$18 \div 40 \times 360^\circ = 162^\circ;$$

（2）“优秀”的人数 $= 40 - 2 - 8 - 18 = 12$ ，

如图，

（3）“良好”的男生人数： $\frac{18}{40} \times 480 = 216$ （人），

答：全年级男生体质健康状况达到“良好”的人数为 216 人．

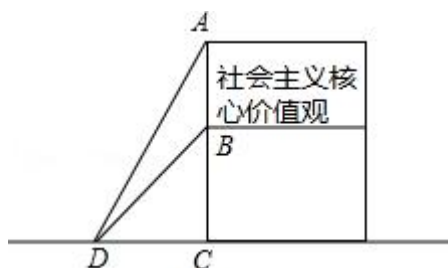


点评： 本题考查的是条形统计图的综合运用．读懂统计图，从统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据．

22. (8 分) (2015•包头) 为了弘扬“社会主义核心价值观”，市政府在广场树立公益广告牌，如图所示，为固定广告牌，在两侧加固钢缆，已知钢缆底端 D 距广告牌立柱距离 CD 为 3 米，从 D 点测得广告牌顶端 A 点和底端 B 点的仰角分别是 60° 和 45° ．

（1）求公益广告牌的高度 AB；

（2）求加固钢缆 AD 和 BD 的长．（注意：本题中的计算过程和结果均保留根号）



考点：解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

分析：（1）根据已知和 $\tan \angle ADC = \frac{AC}{DC}$ ，求出 AC，根据 $\angle BDC = 45^\circ$ ，求出 BC，

根据 $AB = AC - BC$ 求出 AB；

（2）根据 $\cos \angle ADC = \frac{CD}{AD}$ ，求出 AD，根据 $\cos \angle BDC = \frac{CD}{BD}$ ，求出 BD.

解答：解：（1）在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 中， $\because \angle ADC = 60^\circ$ ， $CD = 3$ ，

$$\therefore \tan \angle ADC = \frac{AC}{DC},$$

$$\therefore AC = 3 \cdot \tan 60^\circ = 3\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt} \triangle BDC$ 中， $\because \angle BDC = 45^\circ$ ，

$$\therefore BC = CD = 3,$$

$$\therefore AB = AC - BC = (3\sqrt{3} - 3) \text{ 米}.$$

（2）在 $\text{Rt} \triangle ADC$ 中， $\because \cos \angle ADC = \frac{CD}{AD}$ ，

$$\therefore AD = \frac{3}{\cos 60^\circ} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \text{ 米},$$

在 $\text{Rt} \triangle BDC$ 中， $\because \cos \angle BDC = \frac{CD}{BD}$ ，

$$\therefore BD = \frac{3}{\cos 45^\circ} = \frac{3}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2} \text{ 米}.$$

点评： 本题考查的是解直角三角形的知识，掌握仰角的概念和锐角三角函数的概念是解题的关键.

23. (10 分) (2015•包头) 我市某养殖场计划购买甲、乙两种鱼苗共 700 尾，甲种鱼苗每尾 3 元，乙种鱼苗每尾 5 元，相关资料表明：甲、乙两种鱼苗的成活率分别为 85%和 90%.

- (1) 若购买这两种鱼苗共用去 2500 元，则甲、乙两种鱼苗各购买多少尾？
- (2) 若要使这批鱼苗的总成活率不低于 88%，则甲种鱼苗至多购买多少尾？
- (3) 在 (2) 的条件下，应如何选购鱼苗，使购买鱼苗的费用最低？并求出最低费用.

考点： 一次函数的应用；二元一次方程组的应用；一元一次不等式的应用.

分析： (1) 设购买甲种鱼苗 x 尾，乙种鱼苗 y 尾，根据题意列一元一次方程组求解即可；

(2) 设购买甲种鱼苗 z 尾，乙种鱼苗 $(700 - z)$ 尾，根据题意列不等式求出解集即可；

(3) 设甲种鱼苗购买 m 尾，购买鱼苗的费用为 w 元，列出 w 与 x 之间的函数关系式，运用一次函数的性质解决问题.

解答： 解：(1) 设购买甲种鱼苗 x 尾，乙种鱼苗 y 尾，根据题意可得：

$$\begin{cases} x+y=700 \\ 3x+5y=2500 \end{cases},$$

解得： $\begin{cases} x=500 \\ y=200 \end{cases}.$

答：购买甲种鱼苗 500 尾，乙种鱼苗 200 尾.

(2) 设购买甲种鱼苗 z 尾，乙种鱼苗 $(700 - z)$ 尾，列不等式得：

$$85\%z + 90\%(700 - z) \geq 700 \times 88\%,$$

解得： $z \leq 280.$

答：甲种鱼苗至多购买 280 尾.

(3) 设甲种鱼苗购买 m 尾，购买鱼苗的费用为 w 元，则

$$w = 3m + 5(700 - m) = -2m + 3500,$$

$$\because -2 < 0,$$

$\therefore w$ 随 m 的增大而减小,

$\therefore 0 < m \leq 280$,

$\therefore$ 当 $m=280$ 时, w 有最小值, w 的最小值 $= 3500 - 2 \times 280 = 2940$ (元),

$\therefore 700 - m = 420$.

答: 当选购甲种鱼苗 280 尾, 乙种鱼苗 420 尾时, 总费用最低, 最低费用为 2940 元.

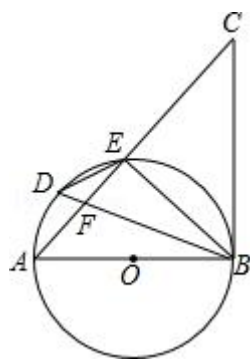
点评: 本题主要考查了二元一次方程组、一元一次不等式以及一次函数应用问题, 审清题意, 找到等量或不等关系是解决问题的关键.

24. (10 分) (2015•包头) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 D 是 $\widehat{AE}$ 上一点, 且 $\angle BDE = \angle CBE$, BD 与 AE 交于点 F .

(1) 求证: BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 若 BD 平分 $\angle ABE$, 求证: $DE^2 = DF \cdot DB$;

(3) 在 (2) 的条件下, 延长 ED , BA 交于点 P , 若 $PA = AO$, $DE = 2$, 求 PD 的长和 $\odot O$ 的半径.



考点: 切线的判定; 相似三角形的判定与性质.

分析: (1) 根据圆周角定理即可得出 $\angle EAB + \angle EBA = 90^\circ$, 再由已知得出 $\angle ABE + \angle CBE = 90^\circ$, 则 $CB \perp AB$, 从而证得 BC 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 通过证得 $\triangle DEF \sim \triangle DBE$, 得出相似三角形的对应边成比例即可证得结论.

(3) 连接 DA、DO，先证得 $OD \parallel BE$ ，得出 $\frac{PD}{PE} = \frac{PO}{PB}$ ，然后根据已知条件得出 $\frac{PO}{PB} = \frac{PD}{PE} = \frac{PD}{PD+DE} = \frac{2}{3}$ ，求得 $PD=4$ ，通过证得 $\triangle PDA \sim \triangle POD$ ，得出 $\frac{PD}{PO} = \frac{PA}{PD}$ ，设 $OA=x$ ，则 $PA=x$ ， $PO=2x$ ，得出 $\frac{4}{2x} = \frac{x}{4}$ ，解得 $OA=2\sqrt{2}$ 。

解答： (1) 证明： $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$$\therefore \angle AEB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAB + \angle EBA = 90^\circ,$$

$$\because \angle EDB = \angle EAB, \angle BDE = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle EAB = \angle CBE,$$

$$\therefore \angle ABE + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore CB \perp AB,$$

$$\because AB \text{ 是 } \odot O \text{ 的直径},$$

$$\therefore BC \text{ 是 } \odot O \text{ 的切线};$$

(2) 证明： $\because BD$ 平分 $\angle ABE$,

$$\therefore \angle ABD = \angle DBE, \widehat{AD} = \widehat{DE},$$

$$\therefore \angle DEA = \angle DBE,$$

$$\because \angle EDB = \angle BDE,$$

$$\therefore \triangle DEF \sim \triangle DBE,$$

$$\therefore \frac{DE}{DB} = \frac{DF}{DE},$$

$$\therefore DE^2 = DF \cdot DB;$$

(3) 解： 连接 DA、DO，

$$\because OD = OB,$$

$$\therefore \angle ODB = \angle OBD,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle OBD,$$

$$\therefore \angle EBD = \angle ODB,$$

$$\therefore OD \parallel BE,$$

$$\therefore \frac{PD}{PE} = \frac{PO}{PB},$$

$$\therefore PA = AO,$$

$$\therefore PA = AO = OB,$$

$$\therefore \frac{PO}{PB} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{PD}{PE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{PD}{PD+DE} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore DE = 2,$$

$$\therefore PD = 4,$$

$$\therefore \angle PDA + \angle ADE = 180^\circ, \quad \angle ABE + \angle ADE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle PDA = \angle ABE,$$

$$\therefore OD \parallel BE,$$

$$\therefore \angle AOD = \angle ABE,$$

$$\therefore \angle PDA = \angle AOD,$$

$$\therefore \angle P = \angle P,$$

$$\therefore \triangle PDA \sim \triangle POD,$$

$$\therefore \frac{PD}{PO} = \frac{PA}{PD},$$

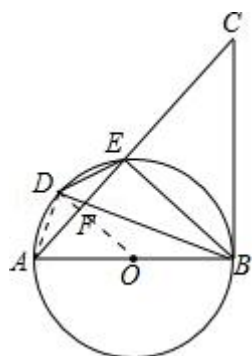
设 $OA = x$,

$$\therefore PA = x, \quad PO = 2x,$$

$$\therefore \frac{4}{2x} = \frac{x}{4},$$

$$\therefore 2x^2=16, \quad x=2\sqrt{2},$$

$$\therefore OA=2\sqrt{2}.$$



点评： 本题考查了切线的判定，三角形相似的判定和性质；要证某线是圆的切线，已知此线过圆上某点，连接圆心与这点（即为半径），再证垂直即可．

25. (12 分) (2015•包头) 如图，四边形 ABCD 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle A=90^\circ$ ， $AD=1$ 厘米， $AB=3$ 厘米， $BC=5$ 厘米，动点 P 从点 B 出发以 1 厘米/秒的速度沿 BC 方向运动，动点 Q 从点 C 出发以 2 厘米/秒的速度沿 CD 方向运动，P，Q 两点同时出发，当点 Q 到达点 D 时停止运动，点 P 也随之停止，设运动时间为 t 秒 ($t > 0$)．

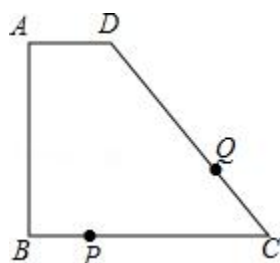
(1) 求线段 CD 的长；

(2) t 为何值时，线段 PQ 将四边形 ABCD 的面积分为 1: 2 两部分？

(3) 伴随 P，Q 两点的运动，线段 PQ 的垂直平分线为 l．

① t 为何值时，l 经过点 C？

② 求当 l 经过点 D 时 t 的值，并求出此时刻线段 PQ 的长．



考点： 四边形综合题．

分析： (1) 作 $DE \perp BC$ 于 E，根据勾股定理即可求解；

(2) 线段 PQ 将四边形 ABCD 的面积分为 1: 2 两部分, 分两种情况进行求解;

(3) ①当 PQ 的垂直平分线经过点 C 进行分析解答;

②当 PQ 的垂直平分线 l 经过点 D 时进行分析解答.

解答: 解: (1) 如图 1, 作 $DE \perp BC$ 于 E,

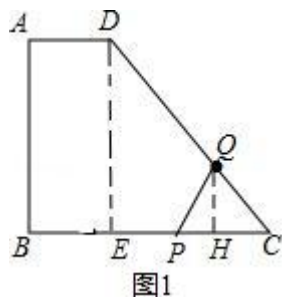


图1

$\because AD \parallel BC, \angle A = 90^\circ,$

$\therefore$ 四边形 ABED 为矩形,

$\therefore BE = AD = 1, DE = AB = 3,$

$\therefore EC = BC - BE = 4,$

在 $Rt\triangle DEC$ 中, $DE^2 + EC^2 = DC^2,$

$\therefore DC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 厘米;

(2) $\because$ 点 P 的速度为 1 厘米/秒, 点 Q 的速度为 2 厘米/秒, 运动时间为 t 秒,

$\therefore BP = t$ 厘米, $PC = (5 - t)$ 厘米, $CQ = 2t$ 厘米, $QD = (5 - 2t)$ 厘米,

且 $0 < t \leq 2.5,$

作 $QH \perp BC$ 于点 H,

$\therefore DE \parallel QH,$

$\therefore \angle DEC = \angle QHC,$

$\because \angle C = \angle C,$

$\therefore \triangle DEC \sim \triangle QHC,$

$\therefore \frac{DE}{QH} = \frac{DC}{QC},$

$$\therefore \frac{3}{QH} = \frac{5}{2t},$$

$$\therefore QH = \frac{6}{5}t,$$

$$\therefore S_{\triangle PQC} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot QH = \frac{1}{2} \cdot (5-t) \cdot \frac{6}{5}t = -\frac{3}{5}t^2,$$

$$S_{\text{四边形}ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (AD+BC) \cdot AB = \frac{1}{2} \times (1+5) \times 3 = 9,$$

分两种情况讨论:

$$\textcircled{1} \text{ 当 } S_{\triangle PQC} : S_{\text{四边形}ABCD} = 1 : 3 \text{ 时, } -\frac{3}{5}t^2 + 3t = \frac{1}{3} \times 9,$$

$$\text{即 } t^2 - 5t + 5 = 0,$$

$$\text{解得: } t_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}, \quad t_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去);}$$

$$\textcircled{2} S_{\triangle PQC} : S_{\text{四边形}ABCD} = 2 : 3 \text{ 时, } -\frac{3}{5}t^2 + 3t = \frac{2}{3} \times 9,$$

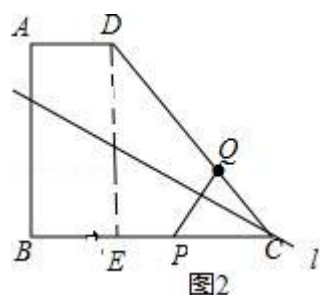
$$\text{即 } t^2 - 5t + 10 = 0,$$

$$\therefore \Delta < 0,$$

$\therefore$ 方程无解,

$\therefore$ 当 t 为 $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$ 秒时, 线段 PQ 将四边形 $ABCD$ 的面积分为 1: 2 两部分;

(3) 如图 2,



$\textcircled{1}$ 当 PQ 的垂直平分线 l 经过点 C 时, 可知 $PC=QC$,

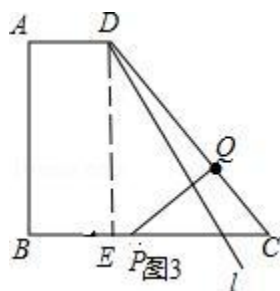
$$\therefore 5-t=2t,$$

$$\therefore 3t=5,$$

$$\therefore t = \frac{5}{3},$$

$\therefore$ 当 $t = \frac{5}{3}$ 秒时, 直线 l 经过点 C ;

$\textcircled{2}$ 如图 3,



当 PQ 的垂直平分线 l 经过点 D 时,

可知 $DQ=DP$,

连接 DP, 则在 $\text{Rt}\triangle DEP$ 中, $DP^2=DE^2+EP^2$,

$$\therefore DQ^2=DE^2+EP^2,$$

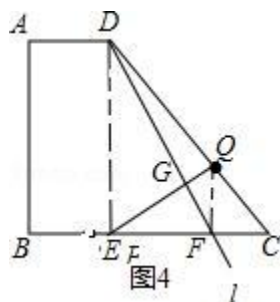
$$\therefore (5-2t)^2=3^2+(t-1)^2,$$

$$\therefore t_1=1, t_2=5 \text{ (舍去)},$$

$$\therefore BP=1 \text{ 厘米},$$

$\therefore$ 当 $t=1$ 秒时, 直线 l 经过点 D, 此时点 P 与点 E 重合;

如图 4, 连接 FQ,



$\because$ 直线 l 是 $\triangle DPQ$ 的对称轴,

$$\therefore \triangle DEF \cong \triangle DQF, \angle DQF=90^\circ, EF=QF,$$

设 $EF=x$ 厘米, 则 $QF=x$ 厘米, $FC=(4-x)$ 厘米,

在 $\text{Rt}\triangle FQC$ 中, $FQ^2+QC^2=FC^2$,

$$x^2+2^2=(4-x)^2,$$

$$\therefore x=\frac{3}{2},$$

$$\therefore EF=\frac{3}{2} \text{ 厘米},$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, $DE^2+EF^2=DF^2$,

$$\therefore 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = DF^2,$$

$$\therefore DF = \frac{3}{2}\sqrt{5} \text{ 厘米},$$

在 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中, $EG \perp DF$,

$$\therefore S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}DF \cdot EG = \frac{1}{2}DE \cdot EF,$$

$$\therefore EG = \frac{DE \cdot EF}{DF},$$

$$\therefore EG = \frac{3\sqrt{5}}{5} \text{ 厘米},$$

$$\therefore PQ = 2EG = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ 厘米}.$$

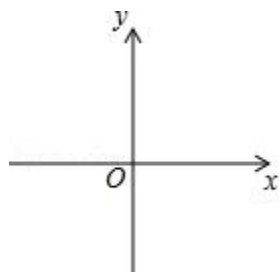
点评: 此题考查了四边形的综合题, 能够根据勾股定理、解直角三角形的知识、三角形的面积公式进行分析讨论.

26. (12 分) (2015•包头) 已知抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 $A(-1, 0)$, $B(3, 0)$ 两点, 与 y 轴相交于点 C , 该抛物线的顶点为点 D .

(1) 求该抛物线的解析式及点 D 的坐标;

(2) 连接 AC , CD , BD , BC , 设 $\triangle AOC$, $\triangle BOC$, $\triangle BCD$ 的面积分别为 S_1 , S_2 和 S_3 , 用等式表示 S_1 , S_2 , S_3 之间的数量关系, 并说明理由;

(3) 点 M 是线段 AB 上一动点 (不包括点 A 和点 B), 过点 M 作 $MN \parallel BC$ 交 AC 于点 N , 连接 MC , 是否存在点 M 使 $\angle AMN = \angle ACM$? 若存在, 求出点 M 的坐标和此时刻直线 MN 的解析式; 若不存在, 请说明理由.



考点: 二次函数综合题.

分析：（1）利用待定系数法求出抛物线的解析式，用配方法把一般式化为顶点式求出点 D 的坐标；

（2）根据点的坐标求出 $\triangle AOC$ ， $\triangle BOC$ 的面积，利用勾股定理的逆定理判断 $\triangle BCD$ 为直角三角形，求出其面积，计算即可得到答案；

（3）假设存在，设点 M 的坐标为 $(m, 0)$ ，表示出 MA 的长，根据 $MN \parallel BC$ ，得到比例式求出 AN，根据 $\triangle AMN \sim \triangle ACM$ ，得到比例式求出 m，得到点 M 的坐标，求出 BC 的解析式，根据 $MN \parallel BC$ ，设直线 MN 的解析式，求解即可．

解答：解：（1） $\because$ 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 经过 A $(-1, 0)$ ，B $(3, 0)$ 两点，

$$\therefore \begin{cases} 1-b+c=0 \\ 9+3b+c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=-2 \\ c=-3 \end{cases}.$$

$\therefore$ 抛物线的解析式为： $y=x^2-2x-3$ ，

$$y=x^2-2x-3=(x-1)^2-4,$$

$\therefore$ 点 D 的坐标为： $(1, -4)$ ；

$$(2) S_1+S_3=S_2,$$

过点 D 作 $DE \perp x$ 轴于点 E， $DF \perp y$ 轴于 F，

由题意得， $CD=\sqrt{2}$ ， $BD=2\sqrt{5}$ ， $BC=3\sqrt{2}$ ，

$$CD^2+BC^2=BD^2,$$

$\therefore \triangle BCD$ 是直角三角形，

$$S_1=\frac{1}{2} \times OA \times OC=\frac{3}{2},$$

$$S_2=\frac{1}{2} \times OB \times OC=\frac{9}{2}$$

$$S_3, =\frac{1}{2} \times CD \times BC=3,$$

$$\therefore S_1+S_3=S_2;$$

（3）存在点 M 使 $\angle AMN=\angle ACM$ ，

设点 M 的坐标为 $(m, 0)$ ，

$$\therefore -1 < m < 3,$$

$$\therefore MA=m+1, AC=\sqrt{10},$$

$$\therefore MN \parallel BC,$$

$$\therefore \frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}, \text{ 即 } \frac{m+1}{AN} = \frac{4}{\sqrt{10}},$$

$$\text{解得, } AN = \frac{\sqrt{10}}{4} (m+1),$$

$$\therefore \angle AMN = \angle ACM, \angle MAN = \angle CAM,$$

$$\therefore \triangle AMN \sim \triangle ACM,$$

$$\therefore \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AM}, \text{ 即 } (m+1)^2 = \sqrt{10} \cdot \frac{\sqrt{10}}{4} (m+1),$$

$$\text{解得, } m_1 = \frac{3}{2}, m_2 = -1 \text{ (舍去),}$$

$$\therefore \text{点 } M \text{ 的坐标为 } \left(\frac{3}{2}, 0\right),$$

设 BC 的解析式为 $y=kx+b$, 把 B (3, 0), C (0, -3) 代入得,

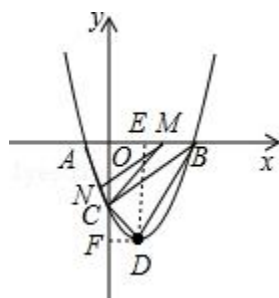
$$\begin{cases} 3k+b=0 \\ b=-3 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} k=1 \\ b=-3 \end{cases},$$

则 BC 的解析式为 $y=x-3$, 又 $MN \parallel BC$,

$\therefore$ 设直线 MN 的解析式为 $y=x+b$, 把点 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ 代入得,

$$b = -\frac{3}{2},$$

$$\therefore \text{直线 MN 的解析式为 } y=x-\frac{3}{2}.$$



点评: 本题考查的是二次函数的解析式的确定和相似三角形的判定和性质, 灵活运用待定系数法二次函数和一次函数求解析式是解题的关键, 注意一元二次方程的解法和勾股定理逆定理的运用.

