

2014 年内蒙古呼和浩特市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (3 分) 下列实数是无理数的是 ()

- A. -1 B. 0 C. π D. $\frac{1}{3}$

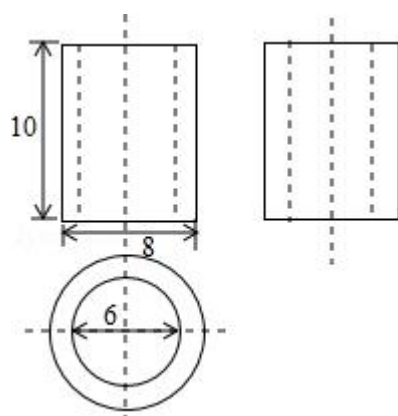
2. (3 分) 以下问题，不适合用全面调查的是 ()

- A. 旅客上飞机前的安检
B. 学校招聘教师，对应聘人员的面试
C. 了解全校学生的课外读书时间
D. 了解一批灯泡的使用寿命

3. (3 分) 已知线段 CD 是由线段 AB 平移得到的，点 $A(-1, 4)$ 的对应点为 $C(4, 7)$ ，则点 $B(-4, -1)$ 的对应点 D 的坐标为 ()

- A. $(1, 2)$ B. $(2, 9)$ C. $(5, 3)$ D. $(-9, -4)$

4. (3 分) 如图是某几何体的三视图，根据图中数据，求得该几何体的体积为 ()



- A. 60π B. 70π C. 90π D. 160π

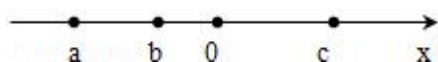
5. (3 分) 某商品先按批发价 a 元提高 10% 零售，后又按零售价降低 10% 出售，则它最后的单价是 () 元.

- A. a B. $0.99a$ C. $1.21a$ D. $0.81a$

6. (3分) 已知 $\odot O$ 的面积为 2π , 则其内接正三角形的面积为 ()

- A. $3\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{6}$ C. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{6}$

7. (3分) 实数 a, b, c 在数轴上对应的点如图所示, 则下列式子中正确的是 ()



- A. $ac > bc$ B. $|a - b| = a - b$
C. $-a < -b < c$ D. $-a - c > -b - c$

8. (3分) 下列运算正确的是 ()

- A. $\sqrt{54} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$
B. $\sqrt{(a^3)^2} = a^3$
C. $(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})^2 \div (\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}) = \frac{b+a}{b-a}$
D. $(-a)^9 \div a^3 = (-a)^6$

9. (3分) 已知矩形 $ABCD$ 的周长为 20cm , 两条对角线 AC, BD 相交于点 O , 过点 O 作 AC 的垂线 EF , 分别交两边 AD, BC 于 E, F (不与顶点重合), 则以下关于 $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 判断完全正确的一项为 ()

- A. $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 的周长都等于 10cm , 但面积不一定相等
B. $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 全等, 且周长都为 10cm
C. $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 全等, 且周长都为 5cm
D. $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 全等, 但它们的周长和面积都不能确定

10. (3分) 已知函数 $y = \frac{1}{|x|}$ 的图象在第一象限的一支曲线上有一点 $A(a, c)$, 点 $B(b, c+1)$ 在该函数图象的另外一支上, 则关于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根 x_1, x_2 判断正确的是 ()

- A. $x_1+x_2 > 1$, $x_1 \cdot x_2 > 0$
- B. $x_1+x_2 < 0$, $x_1 \cdot x_2 > 0$
- C. $0 < x_1+x_2 < 1$, $x_1 \cdot x_2 > 0$
- D. x_1+x_2 与 $x_1 \cdot x_2$ 的符号都不确定

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分. 本题要求把正确结果填在答题纸规定的横线上, 不需要解答过程)

11. (3 分) 一个底面直径是 80cm, 母线长为 90cm 的圆锥的侧面展开图的圆心角的度数为_____.
12. (3 分) 某校五个绿化小组一天的植树的棵数如下: 10, 10, 12, x, 8. 已知这组数据的平均数是 10, 那么这组数据的方差是_____.
13. (3 分) 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 36° , 则该等腰三角形的底角的度数为_____.
14. (3 分) 把多项式 $6xy^2 - 9x^2y - y^3$ 因式分解, 最后结果为_____.
15. (3 分) 已知 m , n 是方程 $x^2+2x - 5=0$ 的两个实数根, 则 $m^2 - mn+3m+n=$ _____.
16. (3 分) 以下四个命题:
- ①每一条对角线都平分一组对角的平行四边形是菱形.
- ②当 $m > 0$ 时, $y = -mx+1$ 与 $y = \frac{m}{x}$ 两个函数都是 y 随着 x 的增大而减小.
- ③已知正方形的对称中心在坐标原点, 顶点 A, B, C, D 按逆时针依次排列, 若 A 点坐标为 $(1, \sqrt{3})$, 则 D 点坐标为 $(1, -\sqrt{3})$.
- ④在一个不透明的袋子中装有标号为 1, 2, 3, 4 的四个完全相同的小球, 从袋中随机摸取一个然后放回, 再从袋中随机地摸取一个, 则两次取到的小球标

号的和等于 4 的概率为 $\frac{1}{8}$.

其中正确的命题有_____ (只需填正确命题的序号)

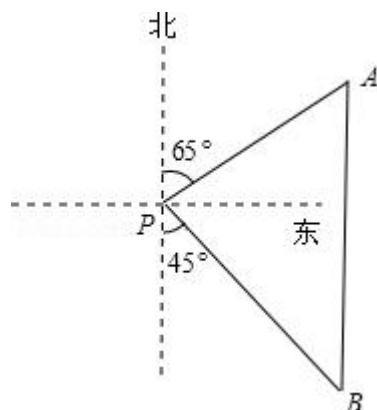
三、解答题 (本大题共 9 小题, 满分 72 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 计算

(1) 计算: $2\cos 30^\circ + (\sqrt{3} - 2)^{-1} + |-\frac{1}{2}|$

(2) 解方程: $\frac{3}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2-2x} = 0$.

18. (6 分) 如图, 一艘海轮位于灯塔 P 的北偏东 65° 方向, 距离灯塔 80 海里的 A 处, 它沿正南方向航行一段时间后, 到达位于灯塔 P 的南偏东 45° 方向上的 B 处, 这时, 海轮所在的 B 处距离灯塔 P 有多远? (结果用非特殊角的三角函数及根式表示即可)

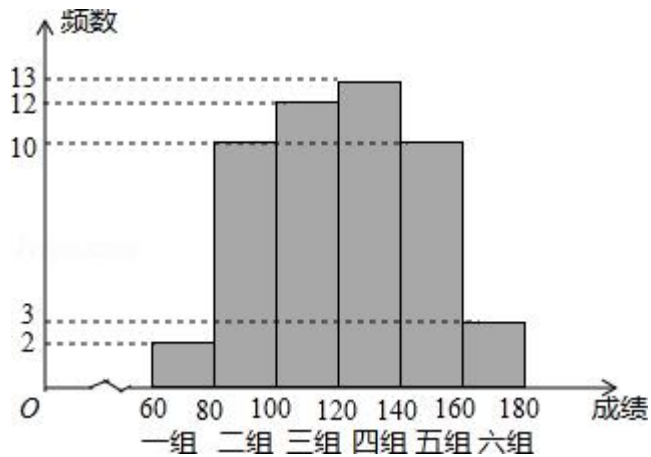


19. (5 分) 已知实数 a 是不等于 3 的常数, 解不等式组 $\begin{cases} -2x+3 \geq -3 \\ \frac{1}{2}(x-2a)+\frac{1}{2}x < 0 \end{cases}$, 并依据 a 的取值情况写出其解集.

20. (9 分) 学校为了了解初三年级学生体育跳绳的训练情况, 从初三年级各班随机抽取了 50 名学生进行了 60 秒跳绳的测试, 并将这 50 名学生的测试成绩 (即 60 秒跳绳的个数) 从低到高分成六段记为第一到六组, 最后整理成下面的频数分布直方图: 请根据直方图中样本数据提供的信息解答下列问题.

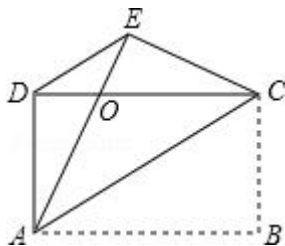
- (1) 跳绳次数的中位数落在哪一组? 由样本数据的中位数你能推断出学校初三年级学生关于 60 秒跳绳成绩的一个什么结论?
- (2) 若用各组数据的组中值 (各小组的两个端点的数的平均数) 代表各组的实际数据, 求这 50 名学生的 60 秒跳绳的平均成绩 (结果保留整数);

- (3) 若从成绩落在第一和第六组的学生中随机抽取 2 名学生，用列举法求抽取的 2 名学生恰好在同一组的概率.



21. (7 分) 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，把矩形沿 AC 折叠，点 B 落在点 E 处， AE 与 DC 的交点为 O ，连接 DE .

- (1) 求证: $\triangle ADE \cong \triangle CED$;
 (2) 求证: $DE \parallel AC$.



22. (7 分) 为鼓励居民节约用电，我市自 2012 年以来对家庭用电收费实行阶梯电价，即每月对每户居民的用电量分为三个档级收费，第一档为用电量在 180 千瓦时 (含 180 千瓦时) 以内的部分，执行基本价格；第二档为用电量在 180 千瓦时到 450 千瓦时 (含 450 千瓦时) 的部分，实行提高电价；第三档为用电量超出 450 千瓦时的部分，执行市场调节价格. 我市一位同学家今

年 2 月份用电 330 千瓦时，电费为 213 元，3 月份用电 240 千瓦时，电费为 150 元. 已知我市的一位居民今年 4、5 月份的家庭用电量分别为 160 和 410 千瓦时，请你依据该同学家的缴费情况，计算这位居民 4、5 月份的电费分别为多少元？

23. (8 分) 如图，已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$, k 是常数) 的图象经过点 A (1,

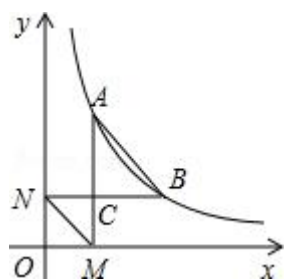
4)，点 B (m , n)，其中 $m > 1$, $AM \perp x$ 轴，垂足为 M, $BN \perp y$ 轴，垂足为

N, AM 与 BN 的交点为 C.

(1) 写出反比例函数解析式;

(2) 求证: $\triangle ACB \sim \triangle NOM$;

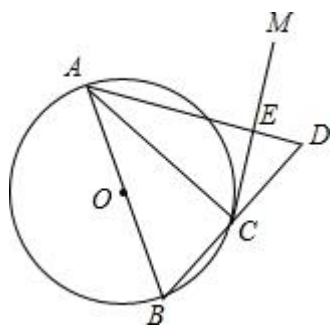
(3) 若 $\triangle ACB$ 与 $\triangle NOM$ 的相似比为 2, 求出 B 点的坐标及 AB 所在直线的解析式.



24. (8 分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 过点 C 作 $\odot O$ 的切线 CM.

(1) 求证: $\angle ACM = \angle ABC$;

(2) 延长 BC 到 D , 使 $BC = CD$, 连接 AD 与 CM 交于点 E , 若 $\odot O$ 的半径为 3, $ED = 2$, 求 $\triangle ACE$ 的外接圆的半径.

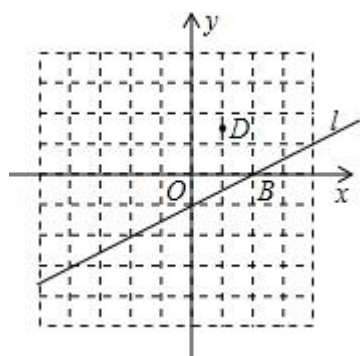


25. (12 分) 如图, 已知直线 l 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 1$, 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 $A(m, 0)$, $B(2, 0)$, $D(1, \frac{5}{4})$ 三点.

(1) 求抛物线的解析式及 A 点的坐标, 并在图示坐标系中画出抛物线的大致图象;

(2) 已知点 $P(x, y)$ 为抛物线在第二象限部分上的一个动点, 过点 P 作 PE 垂直 x 轴于点 E , 延长 PE 与直线 l 交于点 F , 请你将四边形 $PAFB$ 的面积 S 表示为点 P 的横坐标 x 的函数, 并求出 S 的最大值及 S 最大时点 P 的坐标;

(3) 将 (2) 中 S 最大时的点 P 与点 B 相连, 求证: 直线 l 上的任意一点关于 x 轴的对称点一定在 PB 所在直线上.



2014 年内蒙古呼和浩特市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. (3 分) 下列实数是无理数的是 ()

A. -1

B. 0

C. π

D. $\frac{1}{3}$

【考点】26: 无理数.

【专题】1: 常规题型.

【分析】无理数就是无限不循环小数．理解无理数的概念，一定要同时理解有理数的概念，有理数是整数与分数的统称．即有限小数和无限循环小数是有理数，而无限不循环小数是无理数．由此即可判定选择项．

【解答】解：A、是整数，是有理数，故 A 选项错误；

B、是整数，是有理数，故 B 选项错误；

C、是无理数，故 C 选项正确；

D、是分数，是有理数，故 D 选项错误．

故选：C．

【点评】此题主要考查了无理数的定义，其中初中范围内学习的无理数有： π ， 2π 等；开方开不尽的数；以及像 $0.1010010001\dots$ ，等有这样规律的数．

2. (3 分) 以下问题，不适合用全面调查的是 ()

A. 旅客上飞机前的安检

B. 学校招聘教师，对应聘人员的面试

C. 了解全校学生的课外读书时间

D. 了解一批灯泡的使用寿命

【考点】 V2: 全面调查与抽样调查.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 由普查得到的调查结果比较准确, 但所费人力、物力和时间较多, 而抽样调查得到的调查结果比较近似.

【解答】 解: A、旅客上飞机前的安检, 意义重大, 宜用全面调查, 故 A 选项错误;

B、学校招聘教师, 对应聘人员面试必须全面调查, 故 B 选项错误;

C、了解全校同学课外读书时间, 数量不大, 宜用全面调查, 故 C 选项错误;

D、了解一批灯泡的使用寿命, 具有破坏性, 工作量大, 不适合全面调查, 故 D 选项正确.

故选: D.

【点评】 本题考查了抽样调查和全面调查的区别, 选择普查还是抽样调查要根据所要考查的对象的特征灵活选用, 一般来说, 对于具有破坏性的调查、无法进行普查、普查的意义或价值不大时, 应选择抽样调查, 对于精确度要求高的调查, 事关重大的调查往往选用普查.

3. (3 分) 已知线段 CD 是由线段 AB 平移得到的, 点 A $(-1, 4)$ 的对应点为 C $(4, 7)$, 则点 B $(-4, -1)$ 的对应点 D 的坐标为 ()

A. $(1, 2)$ B. $(2, 9)$ C. $(5, 3)$ D. $(-9, -4)$

【考点】 Q3: 坐标与图形变化 – 平移.

【专题】 1: 常规题型.

【分析】 根据点 A、C 的坐标确定出平移规律, 再求出点 D 的坐标即可.

【解答】 解: $\because$ 点 A $(-1, 4)$ 的对应点为 C $(4, 7)$,

$\therefore$ 平移规律为向右 5 个单位, 向上 3 个单位,

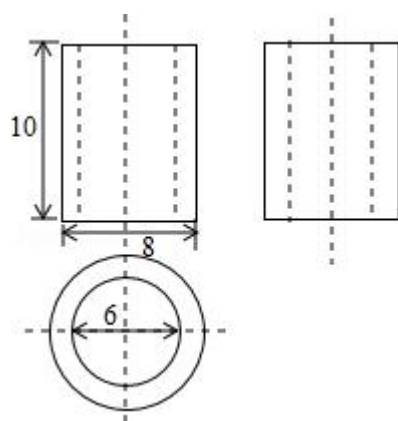
∴点 B (- 4, - 1),

∴点 D 的坐标为 (1, 2).

故选: A.

【点评】 本题考查了坐标与图形变化 – 平移, 平移中点的变化规律是: 横坐标右移加, 左移减; 纵坐标上移加, 下移减.

4. (3 分) 如图是某几何体的三视图, 根据图中数据, 求得该几何体的体积为 ()



A. 60π

B. 70π

C. 90π

D. 160π

【考点】 U3: 由三视图判断几何体.

【专题】 121: 几何图形问题.

【分析】 易得此几何体为空心圆柱, 圆柱的体积=底面积 $\times$ 高, 把相关数值代入即可求解.

【解答】 解: 观察三视图发现该几何体为空心圆柱, 其内圆半径为 3, 外圆半径为 4, 高为 10,

所以其体积为 $10 \times (4^2\pi - 3^2\pi) = 70\pi$,

故选: B.

【点评】 本题考查了由三视图判断几何体的知识, 解决本题的关键是得到此几何体的形状, 易错点是得到计算此几何体所需要的相关数据.

5. (3 分) 某商品先按批发价 a 元提高 10% 零售, 后又按零售价降低 10% 出售,

则它最后的单价是 () 元.

A. a

B. $0.99a$

C. $1.21a$

D. $0.81a$

【考点】32: 列代数式.

【专题】124: 销售问题.

【分析】原价提高 10% 后商品新单价为 $a(1+10\%)$ 元, 再按新价降低 10% 后单价为 $a(1+10\%)(1-10\%)$, 由此解决问题即可.

【解答】解: 由题意得 $a(1+10\%)(1-10\%)=0.99a$ (元).

故选: B.

【点评】本题主要考查列代数式的应用, 属于应用题型, 找到相应等量关系是解答此题的关键.

6. (3 分) 已知 $\odot O$ 的面积为 2π , 则其内接正三角形的面积为 ()

A. $3\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{6}$

C. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

D. $\frac{3}{2}\sqrt{6}$

【考点】KK: 等边三角形的性质; M2: 垂径定理.

【专题】121: 几何图形问题.

【分析】先求出正三角形的外接圆的半径, 再求出正三角形的边长, 最后求其面积即可.

【解答】解: 如图所示,

连接 OB 、 OC , 过 O 作 $OD \perp BC$ 于 D ,

$\because \odot O$ 的面积为 2π

$\therefore \odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$

$\because \triangle ABC$ 为正三角形,

$\therefore \angle BOC = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$, $\angle BOD = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ$, $OB = \sqrt{2}$,

$\therefore BD = OB \cdot \sin \angle BOD = \sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$,

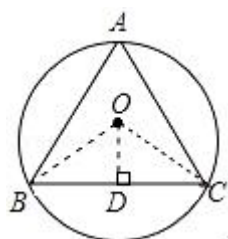
$\therefore BC = 2BD = \sqrt{6}$,

$$\therefore OD = OB \cdot \cos \angle BOD = \sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \triangle BOC \text{ 的面积} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot OD = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

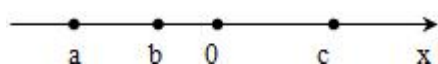
$$\therefore \triangle ABC \text{ 的面积} = 3S_{\triangle BOC} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

故选：C.



【点评】 本题考查的是三角形的外接圆与外心，根据题意画出图形，利用数形结合求解是解答此题的关键.

7. (3分) 实数 a, b, c 在数轴上对应的点如图所示，则下列式子中正确的是()



- A. $ac > bc$ B. $|a - b| = a - b$ C. $-a < -b < c$ D. $-a - c > -b$

- c

【考点】 29: 实数与数轴.

【专题】 31: 数形结合.

【分析】 先根据各点在数轴上的位置比较出其大小，再对各选项进行分析即可.

【解答】 解： $\because$ 由图可知， $a < b < 0 < c$,

$\therefore$ A、 $ac < bc$ ， 故 A 选项错误；

B、 $\because a < b$,

$\therefore a - b < 0$,

$\therefore |a - b| = b - a$ ， 故 B 选项错误；

C、 $\because a < b < 0$,

$\therefore -a > -b$ ， 故 C 选项错误；

D、 $\because -a > -b, c > 0,$

$\therefore -a - c > -b - c,$ 故 D 选项正确.

故选: D.

【点评】 本题考查的是实数与数轴, 熟知数轴上各点与实数是一一对应关系是解答此题的关键.

8. (3 分) 下列运算正确的是 ()

A. $\sqrt{54} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{6}$

B. $\sqrt{(a^3)^2} = a^3$

C. $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 \div \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = \frac{b+a}{b-a}$

D. $(-a)^9 \div a^3 = (-a)^6$

【考点】 48: 同底数幂的除法; 6C: 分式的混合运算; 79: 二次根式的混合运算.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 分别根据二次根式混合运算的法则、分式混合运算的法则、同底幂的除法法则对各选项进行逐一计算即可.

【解答】 解: A、原式 $= 3\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{3}$, 故 A 错误;

B、原式 $= |a|^3$, 故 B 错误;

C、原式 $= \frac{(a+b)^2}{a^2 b^2} \div \frac{(b+a)(b-a)}{a^2 b^2}$
 $= \frac{(a+b)^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{a^2 b^2}{(b+a)(b-a)}$
 $= \frac{a+b}{b-a}$, 故 C 正确;

D、原式 $= -a^9 \div a^3 = -a^6$, 故 D 错误.

故选: C.

【点评】 本题考查的是分式的混合运算，熟知分式混合运算的法则是解答此题的关键

9. (3分) 已知矩形 $ABCD$ 的周长为 20cm ，两条对角线 AC ， BD 相交于点 O ，过点 O 作 AC 的垂线 EF ，分别交两边 AD ， BC 于 E ， F (不与顶点重合)，则以下关于 $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 判断完全正确的一项为 ()

- A. $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 的周长都等于 10cm ，但面积不一定相等
- B. $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 全等，且周长都为 10cm
- C. $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 全等，且周长都为 5cm
- D. $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 全等，但它们的周长和面积都不能确定

【考点】 KD: 全等三角形的判定与性质; KG: 线段垂直平分线的性质; LB: 矩形的性质.

【专题】 31: 数形结合.

【分析】 根据矩形的性质， $AO=CO$ ，由 $EF \perp AC$ ，得 $EA=EC$ ，则 $\triangle CDE$ 的周长是矩形周长的一半，再根据全等三角形的判定方法可求出 $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 全等，进而得到问题答案.

【解答】 解: $\because AO=CO$ ， $EF \perp AC$ ，

$\therefore EF$ 是 AC 的垂直平分线，

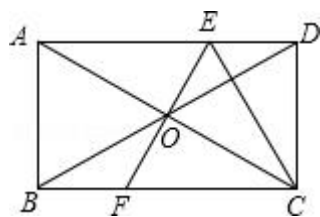
$\therefore EA=EC$ ，

$\therefore \triangle CDE$ 的周长 $= CD + DE + CE = CD + AD = \frac{1}{2}$ 矩形 $ABCD$ 的周长 $= 10\text{cm}$ ，

同理可求出 $\triangle OBF$ 的周长为 10cm ，

根据全等三角形的判定方法可知: $\triangle CDE$ 与 $\triangle ABF$ 全等，

故选: B.



【点评】 本题考查了矩形的对角线互相平分的性质，还考查了线段垂直平分线的性质以及全等三角形的判定方法，题目的难度不大.

10. (3 分) 已知函数 $y = \frac{1}{|x|}$ 的图象在第一象限的一支曲线上有一点 A (a, c), 点 B (b, c+1) 在该函数图象的另外一支上, 则关于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两根 x_1, x_2 判断正确的是 ()

- A. $x_1+x_2 > 1, x_1 \cdot x_2 > 0$
- B. $x_1+x_2 < 0, x_1 \cdot x_2 > 0$
- C. $0 < x_1+x_2 < 1, x_1 \cdot x_2 > 0$
- D. x_1+x_2 与 $x_1 \cdot x_2$ 的符号都不确定

【考点】 AB: 根与系数的关系; G6: 反比例函数图象上点的坐标特征.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 根据点 A (a, c) 在第一象限的一支曲线上, 得出 $a > 0, c > 0$, 再点 B (b, c+1) 在该函数图象的另外一支上, 得出 $b < 0, c+1 > 0$, 再根据 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, 即可得出答案.

【解答】 解: $\because$ 点 A (a, c) 在第一象限的一支曲线上,

$$\therefore a > 0, c > 0, ac=1, \text{ 即 } a=\frac{1}{c},$$

$\because$ 点 B (b, c+1) 在该函数图象的另外一支上, 即第二象限上,

$$\therefore b < 0, c+1 > 0, b(c+1) = -1, \text{ 即 } b = -\frac{1}{c+1},$$

$$\therefore x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0, x_1+x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{c}{c+1},$$

$$\therefore 0 < x_1+x_2 < 1,$$

故选：C.

【点评】本题考查了根与系数的关系，掌握根与系数的关系和各个象限点的特点是本题的关键；若 x_1, x_2 是关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ ($a \neq 0$, a, b, c 为常数) 的两个实数根，则 $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a}$.

二、填空题 (本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分. 本题要求把正确结果填在答题纸规定的横线上，不需要解答过程)

11. (3 分) 一个底面直径是 80cm，母线长为 90cm 的圆锥的侧面展开图的圆心角的度数为 160°.

【考点】MP：圆锥的计算.

【专题】11：计算题.

【分析】根据圆锥的底面直径求得圆锥的侧面展开扇形的弧长，再利用告诉的母线长求得圆锥的侧面展开扇形的面积，再利用扇形的另一种面积的计算方法求得圆锥的侧面展开图的圆心角即可.

【解答】解：∵圆锥的底面直径是 80cm，

∴圆锥的侧面展开扇形的弧长为： $\pi d = 80\pi$,

∴母线长 90cm，

∴圆锥的侧面展开扇形的面积为： $\frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 80\pi \times 90 = 3600\pi$,

∴ $\frac{n\pi \times 90^2}{360} = 3600\pi$,

解得： $n = 160$.

故答案为： 160° .

【点评】本题考查了圆锥的有关计算，解决此类题目的关键是明确圆锥的侧面展开扇形与圆锥的关系.

12. (3 分) 某校五个绿化小组一天的植树的棵数如下：10, 10, 12, x , 8. 已

知这组数据的平均数是 10，那么这组数据的方差是 1.6 .

【考点】W7：方差.

【专题】11：计算题.

【分析】根据平均数的计算公式先求出 $\bar{x}$ 的值，再根据方差公式 $S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2]$ ，代入计算即可.

【解答】解：∵这组数据的平均数是 10，

$$\therefore (10+10+12+x+8) \div 5 = 10,$$

解得： $x=10$ ，

$$\therefore \text{这组数据的方差是 } \frac{1}{5} \times [3 \times (10 - 10)^2 + (12 - 10)^2 + (8 - 10)^2] = 1.6;$$

故答案为：1.6.

【点评】此题考查了方差，一般地设 n 个数据， $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的平均数为 $\bar{x}$ ，则

$$\text{方差 } S^2 = \frac{1}{n}[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2].$$

13. (3 分) 等腰三角形一腰上的高与另一腰的夹角为 36° ，则该等腰三角形的底角的度数为 63° 或 27° .

【考点】KH：等腰三角形的性质.

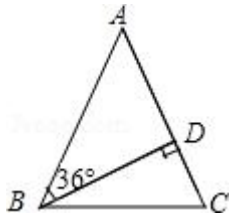
【专题】32：分类讨论.

【分析】分锐角三角形和钝角三角形两种情况，利用等腰三角形的性质和三角形内角和定理即可求出它的底角的度数.

【解答】解：在三角形 ABC 中，设 $AB=AC$ ， $BD \perp AC$ 于 D.

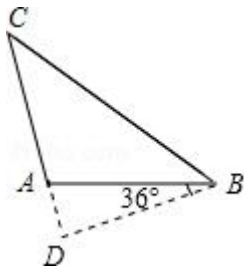
①若是锐角三角形， $\angle A = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$ ，

$$\text{底角} = (180^\circ - 54^\circ) \div 2 = 63^\circ;$$



②若三角形是钝角三角形， $\angle BAC = 36^\circ + 90^\circ = 126^\circ$ ，

此时底角 $= (180^\circ - 126^\circ) \div 2 = 27^\circ$ 。



所以等腰三角形底角的度数是 63° 或 27° 。

故答案为： 63° 或 27° 。

【点评】此题主要考查学生对等腰三角形的性质和三角形内角和定理的理解和应用，此题的关键是熟练掌握三角形内角和定理。

14. (3 分) 把多项式 $6xy^2 - 9x^2y - y^3$ 因式分解，最后结果为 $-y(3x - y)^2$ 。

【考点】 55: 提公因式法与公式法的综合运用。

【专题】 44: 因式分解。

【分析】 首先提取公因式 $-y$ ，进而利用完全平方公式分解因式得出即可。

【解答】 解： $6xy^2 - 9x^2y - y^3 = -y(y^2 - 6xy + 9x^2) = -y(3x - y)^2$ 。

故答案为： $-y(3x - y)^2$ 。

【点评】 此题主要考查了提取公因式法和公式法分解因式，熟练掌握完全平方公式是解题关键。

15. (3 分) 已知 m, n 是方程 $x^2 + 2x - 5 = 0$ 的两个实数根，则 $m^2 - mn + 3m + n =$ 8。

【考点】A3: 一元二次方程的解; AB: 根与系数的关系.

【专题】1: 常规题型.

【分析】根据 $m+n = -\frac{b}{a} = -2$, $m \cdot n = -5$, 直接求出 m 、 n 即可解题.

【解答】解: $\because m$ 、 n 是方程 $x^2+2x-5=0$ 的两个实数根,

$$\therefore mn = -5, m+n = -2,$$

$$\therefore m^2+2m-5=0$$

$$\therefore m^2=5-2m$$

$$m^2-mn+3m+n = (5-2m) - (-5) + 3m+n$$

$$= 10+m+n$$

$$= 10-2$$

$$= 8$$

故答案为: 8.

【点评】此题主要考查了一元二次方程根的计算公式, 根据题意得出 m 和 n 的值是解决问题的关键.

16. (3 分) 以下四个命题:

①每一条对角线都平分一组对角的平行四边形是菱形.

②当 $m > 0$ 时, $y = -mx+1$ 与 $y = \frac{m}{x}$ 两个函数都是 y 随着 x 的增大而减小.

③已知正方形的对称中心在坐标原点, 顶点 A , B , C , D 按逆时针依次排列,

若 A 点坐标为 $(1, \sqrt{3})$, 则 D 点坐标为 $(1, -\sqrt{3})$.

④在一个不透明的袋子中装有标号为 1, 2, 3, 4 的四个完全相同的小球, 从袋中随机摸取一个然后放回, 再从袋中随机地摸取一个, 则两次取到的小球标号的和等于 4 的概率为 $\frac{1}{8}$.

其中正确的命题有 ① (只需填正确命题的序号)

【考点】O1: 命题与定理.

【专题】17: 推理填空题.

【分析】利用菱形的性质、一次函数及反比例函数的性质、图形与坐标及概率的知识分别判断后即可确定答案.

【解答】解: ①每一条对角线都平分一组对角的平行四边形是菱形, 故①正确.

②当 $m > 0$ 时, $-m < 0$, $y = -mx + 1$ 是 y 随着 x 的增大而减小, $y = \frac{m}{x}$ 是在同一

象限内 y 随着 x 的增大而减小, 故②错误.

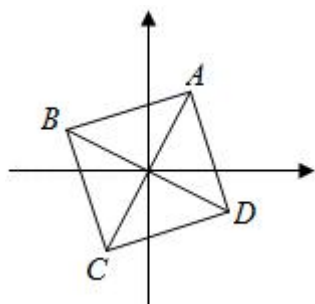
③已知正方形的对称中心在坐标原点, 顶点 A, B, C, D 按逆时针依次排列,

若 A 点坐标为 $(1, \sqrt{3})$, 则 D 点关于 x 轴对称, 坐标为 $(\sqrt{3}, -1)$, 如图所示, 故③错误;

④在一个不透明的袋子中装有标号为 1, 2, 3, 4 的四个完全相同的小球, 从袋中随机摸取一个然后放回, 再从袋中随机地摸取一个, 取到小球的标号和共有 16 种可能性, 其中两次取到的标号和等于 4 的情况有 3 种, 分别是 (1, 3), (3, 1) 和 (2, 2), 则两次取到的小球标号的和等于 4 的概率为 $\frac{3}{16}$, 故

④错误.

故答案为: ①.



【点评】本题考查了命题与定理的知识, 解题的关键是了解菱形的性质、一次函数及反比例函数的性质、图形与坐标及概率的知识, 难度一般.

三、解答题 (本大题共 9 小题, 满分 72 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (10 分) 计算

(1) 计算: $2\cos 30^\circ + (\sqrt{3}-2)^{-1} + |-\frac{1}{2}|$

(2) 解方程: $\frac{3}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2-2x} = 0$.

【考点】 6F: 负整数指数幂; 79: 二次根式的混合运算; B3: 解分式方程; T5: 特殊角的三角函数值.

【专题】 11: 计算题.

【分析】 (1) 根据特殊角的三角函数、负指数幂运算、绝对值进行计算即可;

(2) 先去分母, 化为整式方程求解即可.

【解答】 解: (1) 原式 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}-2} + \frac{1}{2}$
 $= \sqrt{3} - (\sqrt{3}+2) + \frac{1}{2}$
 $= -\frac{3}{2};$

(2) 去分母, 得 $3x^2 - 6x - x^2 - 2x = 0$,

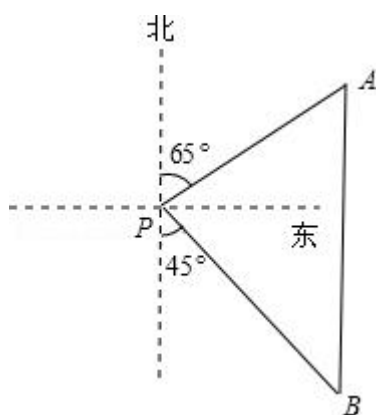
解得 $x_1=0$, $x_2=4$,

经检验: $x=0$ 是增根,

故 $x=4$ 是原方程的解.

【点评】 本题考查了二次根式的混合运算、负指数幂运算、解分式方程以及特殊角的三角函数值, 是基础知识要熟练掌握.

18. (6 分) 如图, 一艘海轮位于灯塔 P 的北偏东 65° 方向, 距离灯塔 80 海里的 A 处, 它沿正南方向航行一段时间后, 到达位于灯塔 P 的南偏东 45° 方向上的 B 处, 这时, 海轮所在的 B 处距离灯塔 P 有多远? (结果用非特殊角的三角函数及根式表示即可)



【考点】TB：解直角三角形的应用 – 方向角问题.

【专题】121：几何图形问题.

【分析】首先根据题意得出 $\angle MPA = \angle A = 65^\circ$ ，以及 $\angle DBP = \angle DPB = 45^\circ$ ，再利用解直角三角形求出即可.

【解答】解：如图，过点 P 作 $PD \perp AB$ 于点 D.

由题意知 $\angle DPB = \angle DBP = 45^\circ$.

在 $\text{Rt}\triangle PBD$ 中， $\cos 45^\circ = \frac{PD}{PB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$$\therefore PB = \sqrt{2}PD.$$

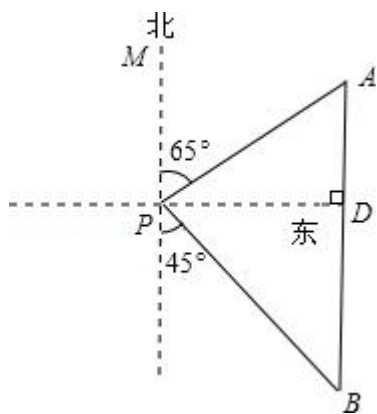
$\therefore$ 点 A 在点 P 的北偏东 65° 方向上，

$$\therefore \angle APD = 25^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle PAD$ 中， $\cos 25^\circ = \frac{PD}{PA}$.

$$\therefore PD = PA \cos 25^\circ = 80 \cos 25^\circ,$$

$$\therefore PB = 80\sqrt{2} \cos 25^\circ \text{ (海里)}.$$



【点评】此题主要考查了方向角含义，正确记忆三角函数的定义得出相关角度是解决本题的关键.

19. (5 分) 已知实数 a 是不等于 3 的常数，解不等式组 $\begin{cases} -2x+3 \geq -3 \\ \frac{1}{2}(x-2a)+\frac{1}{2}x < 0 \end{cases}$ ，并

依据 a 的取值情况写出其解集.

【考点】CB: 解一元一次不等式组.

【专题】32: 分类讨论.

【分析】首先分别解出两个不等式，再根据实数 a 是不等于 3 的常数，分两种情况进行讨论：①当 $a > 3$ 时，②当 $a < 3$ 时，然后确定出不等式组的解集.

【解答】解： $\begin{cases} -2x+3 \geq -3 & \text{①} \\ \frac{1}{2}(x-2a)+\frac{1}{2}x < 0 & \text{②} \end{cases}$ ，

解①得： $x \leq 3$,

解②得： $x < a$,

$\therefore$ 实数 a 是不等于 3 的常数，

$\therefore$ 当 $a > 3$ 时，不等式组的解集为 $x \leq 3$,

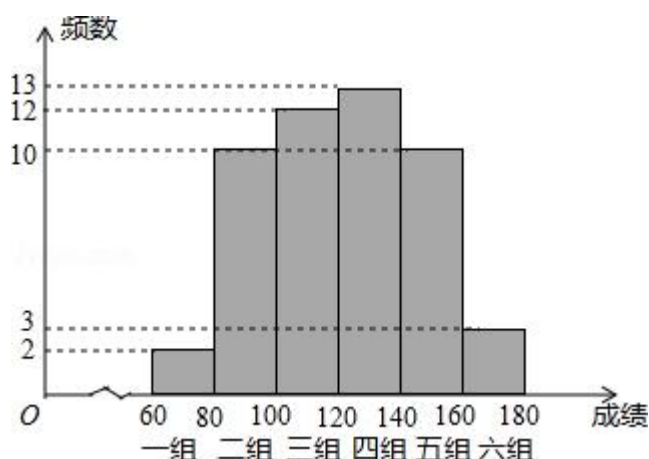
当 $a < 3$ 时，不等式组的解集为 $x < a$.

【点评】此题主要考查了解一元一次不等式组，关键是掌握解集的规律：同大取大；同小取小；大小小大中间找；大大小小找不到.

20. (9 分) 学校为了了解初三年级学生体育跳绳的训练情况，从初三年级各班

随机抽取了 50 名学生进行了 60 秒跳绳的测试，并将这 50 名学生的测试成绩（即 60 秒跳绳的个数）从低到高分成六段记为第一到六组，最后整理成下面的频数分布直方图：请根据直方图中样本数据提供的信息解答下列问题.

- (1) 跳绳次数的中位数落在哪一组？由样本数据的中位数你能推断出学校初三年级学生关于 60 秒跳绳成绩的一个什么结论？
- (2) 若用各组数据的组中值（各小组的两个端点的数的平均数）代表各组的实际数据，求这 50 名学生的 60 秒跳绳的平均成绩（结果保留整数）；
- (3) 若从成绩落在第一和第六组的学生中随机抽取 2 名学生，用列举法求抽取的 2 名学生恰好在同一组的概率.



【考点】V8: 频数（率）分布直方图；W4: 中位数；X6: 列表法与树状图法.

【专题】27: 图表型.

- 【分析】(1) 根据中位数的定义先把这组数据从小到大排列，找出中间两个数的平均数，再根据中位数落在第四组估计出初三学生 60 秒跳绳再 120 个以上的人数达到一半以上；
- (2) 根据平均数的计算公式进行计算即可；
- (3) 先把第一组的两名学生用 A、B 表示，第六组的三名学生用 1, 2, 3 表示，

得出所有出现的情况，再根据概率公式进行计算即可.

【解答】解：(1) $\because$ 共有 50 个数，中位数是第 25、26 个数的平均数，

$\therefore$ 跳绳次数的中位数落在第四组；

$\therefore$ 可以估计初三学生 60 秒跳绳再 120 个以上的人数达到一半以上；

(2) 根据题意得：

$$(2 \times 70 + 10 \times 90 + 12 \times 110 + 13 \times 130 + 10 \times 150 + 3 \times 170) \div 50 \approx 121 \text{ (个)},$$

答：这 50 名学生的 60 秒跳绳的平均成绩是 121 个；

(3) 记第一组的两名学生为 A、B，第六组的三名学生为 1, 2, 3,

则从这 5 名学生中抽取两名学生有以下 10 种情况：

AB, A1, A2, A3, B1, B2, B3, 12, 13, 23,

则抽取的 2 名学生恰好在同一组的概率是： $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$;

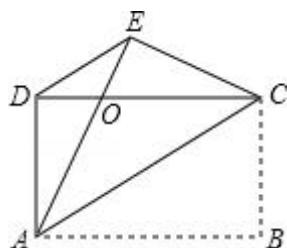
【点评】此题考查了频数（率）分布直方图，用到的知识点是中位数、平均数、概率公式，利用统计图获取信息时，必须认真观察、分析、研究统计图，才能作出正确的判断和解决问题.

21. (7 分) 如图，四边形 ABCD 是矩形，把矩形沿 AC 折叠，点 B 落在点 E 处，

AE 与 DC 的交点为 O，连接 DE.

(1) 求证： $\triangle ADE \cong \triangle CED$;

(2) 求证：DE // AC.



【考点】KD：全等三角形的判定与性质；LB：矩形的性质；PB：翻折变换（折

叠问题).

【专题】 14: 证明题.

【分析】 (1) 根据矩形的性质和折叠的性质可得 $BC=CE=AD$, $AB=AE=CD$, 根据 SSS 可证 $\triangle ADE \cong \triangle CED$ (SSS);

(2) 根据全等三角形的性质可得 $\angle EDC = \angle DEA$, 由于 $\triangle ACE$ 与 $\triangle ACB$ 关于 AC 所在直线对称, 可得 $\angle OAC = \angle CAB$, 根据等量代换可得 $\angle OAC = \angle DEA$, 再根据平行线的判定即可求解.

【解答】 证明: (1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AD=BC$, $AB=CD$,

又 $\because AC$ 是折痕,

$\therefore BC=CE=AD$,

$AB=AE=CD$,

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle CED$ 中,

$$\begin{cases} CE=AD \\ AE=CD, \\ DE=ED \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CED$ (SSS);

(2) $\because \triangle ADE \cong \triangle CED$,

$\therefore \angle EDC = \angle DEA$,

又 $\because \triangle ACE$ 与 $\triangle ACB$ 关于 AC 所在直线对称,

$\therefore \angle OAC = \angle CAB$,

$\therefore \angle OCA = \angle CAB$,

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$,

$$\therefore 2\angle OAC = 2\angle DEA,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle DEA,$$

$$\therefore DE \parallel AC.$$

【点评】 本题考查了翻折变换（折叠问题），矩形的性质，以及全等三角形的判定与性质，正确证明三角形全等是关键.

22. (7 分) 为鼓励居民节约用电，我市自 2012 年以来对家庭用电收费实行阶梯电价，即每月对每户居民的用电量分为三个档级收费，第一档为用电量在 180 千瓦时（含 180 千瓦时）以内的部分，执行基本价格；第二档为用电量在 180 千瓦时到 450 千瓦时（含 450 千瓦时）的部分，实行提高电价；第三档为用电量超出 450 千瓦时的部分，执行市场调节价格. 我市一位同学家今年 2 月份用电 330 千瓦时，电费为 213 元，3 月份用电 240 千瓦时，电费为 150 元. 已知我市的一位居民今年 4、5 月份的家庭用电量分别为 160 和 410 千瓦时，请你依据该同学家的缴费情况，计算这位居民 4、5 月份的电费分别为多少元？

【考点】 9A: 二元一次方程组的应用.

【专题】 12: 应用题.

【分析】 设基本电价为 x 元/千瓦时，提高电价为 y 元/千瓦时，根据 2 月份用电 330 千瓦时，电费为 213 元，3 月份用电 240 千瓦时，电费为 150 元，列方程组求解.

【解答】 解：设基本电价为 x 元/千瓦时，提高电价为 y 元/千瓦时，

由题意得，
$$\begin{cases} 180x + 150y = 213 \\ 180x + 60y = 150 \end{cases},$$

解得：
$$\begin{cases} x = 0.6 \\ y = 0.7 \end{cases},$$

则四月份电费为： $160 \times 0.6 = 96$ （元），

五月份电费为： $180 \times 0.6 + 230 \times 0.7 = 108 + 161 = 269$ (元).

答：这位居民四月份的电费为 96 元，五月份的电费为 269 元.

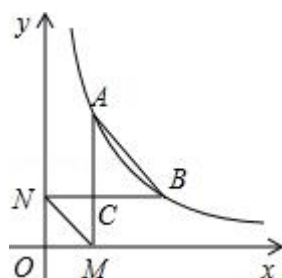
【点评】 本题考查了二元一次方程组的应用，解答本题的关键是读懂题意，设出未知数，找出合适的等量关系，列方程组求解.

23. (8 分) 如图，已知反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$, k 是常数) 的图象经过点 A (1, 4)，点 B (m, n)，其中 $m > 1$, $AM \perp x$ 轴，垂足为 M, $BN \perp y$ 轴，垂足为 N, AM 与 BN 的交点为 C.

(1) 写出反比例函数解析式;

(2) 求证: $\triangle ACB \sim \triangle NOM$;

(3) 若 $\triangle ACB$ 与 $\triangle NOM$ 的相似比为 2, 求出 B 点的坐标及 AB 所在直线的解析式.



【考点】 GB: 反比例函数综合题.

【专题】 31: 数形结合.

【分析】 (1) 把 A 点坐标代入 $y = \frac{k}{x}$ 可得 k 的值，进而得到函数解析式;

(2) 根据 A、B 两点坐标可得 $AC = 4 - n$, $BC = m - 1$, $ON = n$, $OM = 1$, 则 $\frac{AC}{NO} = \frac{4-n}{n}$,

再根据反比例函数解析式可得 $\frac{4}{m} = n$, 则 $\frac{AC}{ON} = m - 1$, 而 $\frac{BC}{MO} = \frac{m-1}{1}$, 可得 $\frac{AC}{NO} = \frac{BC}{MO}$,

再由 $\angle ACB = \angle NOM = 90^\circ$, 可得 $\triangle ACB \sim \triangle NOM$;

(3) 根据 $\triangle ACB$ 与 $\triangle NOM$ 的相似比为 2 可得 $m - 1 = 2$, 进而得到 m 的值, 然后可得 B 点坐标, 再利用待定系数法求出 AB 的解析式即可.

【解答】解：(1) $\because y = \frac{k}{x}$ ($x > 0$, k 是常数) 的图象经过点 A (1, 4),

$$\therefore k=4,$$

$$\therefore \text{反比例函数解析式为 } y = \frac{4}{x};$$

$$(2) \because \text{点 A (1, 4), 点 B (m, n),}$$

$$\therefore AC=4-n, BC=m-1, ON=n, OM=1,$$

$$\therefore \frac{AC}{NO} = \frac{4-n}{n} = \frac{4}{n} - 1,$$

$$\because \text{B (m, n) 在 } y = \frac{4}{x} \text{ 上,}$$

$$\therefore \frac{4}{m} = n,$$

$$\therefore \frac{AC}{ON} = m-1, \text{ 而 } \frac{BC}{MO} = \frac{m-1}{1},$$

$$\therefore \frac{AC}{NO} = \frac{BC}{MO},$$

$$\therefore \angle ACB = \angle NOM = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle ACB \sim \triangle NOM;$$

$$(3) \because \triangle ACB \text{ 与 } \triangle NOM \text{ 的相似比为 2,}$$

$$\therefore m-1=2,$$

$$m=3,$$

$$\therefore \text{B } (3, \frac{4}{3}),$$

设 AB 所在直线解析式为 $y=kx+b$,

$$\therefore \begin{cases} \frac{4}{3} = 3k + b \\ 4 = k + b \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k = -\frac{4}{3} \\ b = \frac{16}{3} \end{cases},$$

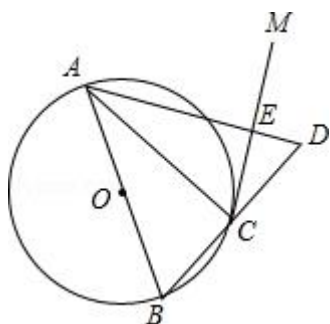
∴ 解析式为 $y = -\frac{4}{3}x + \frac{16}{3}$.

【点评】 此题主要考查了反比例函数的综合应用，关键是掌握凡是函数图象经过的点，必然能使函数解析式左右相等.

24. (8 分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, 点 C 在 $\odot O$ 上, 过点 C 作 $\odot O$ 的切线 CM .

(1) 求证: $\angle ACM = \angle ABC$;

(2) 延长 BC 到 D , 使 $BC = CD$, 连接 AD 与 CM 交于点 E , 若 $\odot O$ 的半径为 3, $ED = 2$, 求 $\triangle ACE$ 的外接圆的半径.



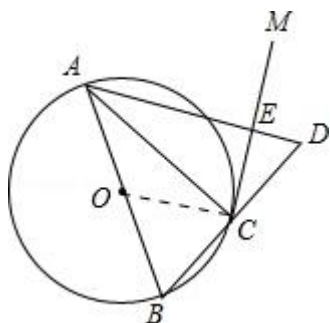
【考点】 KQ: 勾股定理; M5: 圆周角定理; MC: 切线的性质; S9: 相似三角形的判定与性质.

【专题】 152: 几何综合题.

【分析】 (1) 连接 OC , 由 $\angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$ 及 CM 是 $\odot O$ 的切线得出 $\angle ACM + \angle ACO = 90^\circ$, 再利用 $\angle BAC = \angle ACO$, 得出结论,

(2) 连接 OC , 得出 $\triangle AEC$ 是直角三角形, $\triangle AEC$ 的外接圆的直径是 AC , 利用 $\triangle ABC \sim \triangle CDE$, 求出 AC ,

【解答】 (1) 证明: 如图, 连接 OC ,



$\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ,$$

又 $\because CM$ 是 $\odot O$ 的切线,

$$\therefore OC \perp CM,$$

$$\therefore \angle ACM + \angle ACO = 90^\circ,$$

$$\because CO = AO,$$

$$\therefore \angle BAC = \angle ACO,$$

$$\therefore \angle ACM = \angle ABC;$$

(2) 解: $\because BC = CD, \angle ACB = 90^\circ,$

$$\therefore \angle OAC = \angle CAD,$$

$$\because OA = OC,$$

$$\therefore \angle OAC = \angle OCA,$$

$$\therefore \angle OCA = \angle CAD,$$

$$\therefore OC \parallel AD,$$

又 $\because OC \perp CE,$

$$\therefore AD \perp CE,$$

$\therefore \triangle AEC$ 是直角三角形,

$\therefore \triangle AEC$ 的外接圆的直径是 $AC,$

又 $\because \angle ABC + \angle BAC = 90^\circ, \angle ACM + \angle ECD = 90^\circ,$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle CDE,$$

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{BC}{ED},$$

⊙O 的半径为 3,

$$\therefore AB=6,$$

$$\therefore \frac{6}{CD} = \frac{BC}{2},$$

$$\therefore BC^2=12,$$

$$\therefore BC=2\sqrt{3},$$

$$\therefore AC=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6},$$

$\therefore \triangle AEC$ 的外接圆的半径为 AC 的一半, 故 $\triangle ACE$ 的外接圆的半径为: $\sqrt{6}$.

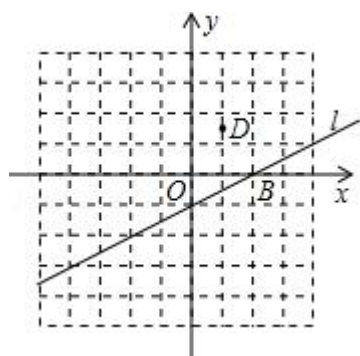
【点评】 本题考查了切线的性质: 圆的切线垂直于经过切点的半径. 也考查了勾股定理、圆周角定理和相似三角形的判定与性质. 解题的关键是找准角的关系.

25. (12 分) 如图, 已知直线 l 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-1$, 抛物线 $y=ax^2+bx+2$ 经过点 $A(m, 0)$, $B(2, 0)$, $D(1, \frac{5}{4})$ 三点.

(1) 求抛物线的解析式及 A 点的坐标, 并在图示坐标系中画出抛物线的大致图象;

(2) 已知点 $P(x, y)$ 为抛物线在第二象限部分上的一个动点, 过点 P 作 PE 垂直 x 轴于点 E , 延长 PE 与直线 l 交于点 F , 请你将四边形 $PAFB$ 的面积 S 表示为点 P 的横坐标 x 的函数, 并求出 S 的最大值及 S 最大时点 P 的坐标;

(3) 将 (2) 中 S 最大时的点 P 与点 B 相连, 求证: 直线 l 上的任意一点关于 x 轴的对称点一定在 PB 所在直线上.



【考点】HF：二次函数综合题.

【专题】15：综合题.

【分析】(1) 根据待定系数法可求抛物线的解析式，再根据 A (m, 0) 在抛物线上，得到 $0 = -\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m + 2$ ，解方程即可得到 m 的值，从而得到 A 点的坐标；

(2) 根据四边形 PAFB 的面积 $S = \frac{1}{2}AB \cdot PF$ ，可得 $S = -\frac{3}{4}(x+2)^2 + 12$ ，根据函数的最值可得 S 的最大值是 12，进一步得到点 P 的坐标为；

(3) 根据待定系数法得到 PB 所在直线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ ，设 Q (a, $\frac{1}{2}a - 1$) 是 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 上的一点，则 Q 点关于 x 轴的对称点为 (a, $1 - \frac{1}{2}a$)，将 (a, $1 - \frac{1}{2}a$) 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 显然成立，依此即可求解.

【解答】解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + bx + 2$ 经过点 B (2, 0), D (1, $\frac{5}{4}$),

$$\therefore \begin{cases} 4a + 2b + 2 = 0 \\ a + b + 2 = \frac{5}{4} \end{cases},$$

解得 $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$,

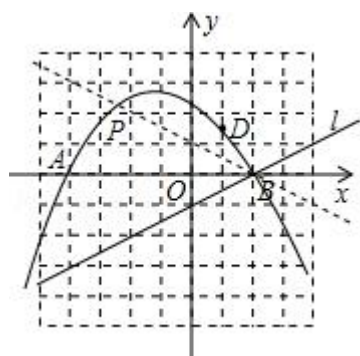
$\because$ A (m, 0) 在抛物线上,

$$\therefore 0 = -\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{2}m + 2,$$

解得: $m_1 = -4$, $m_2 = 2$ (舍去),

$\therefore$ A 点的坐标为 (-4, 0).

如图所示:



(2) $\because$ 直线 l 的解析式为 $y = \frac{1}{2}x - 1$,

$$\therefore S = \frac{1}{2}AB \cdot PF$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \cdot PF$$

$$= 3 \left(-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 + 1 - \frac{1}{2}x \right)$$

$$= -\frac{3}{4}x^2 - 3x + 9$$

$$= -\frac{3}{4}(x+2)^2 + 12,$$

其中 $-4 < x < 0$,

$\therefore S$ 的最大值是 12, 此时点 P 的坐标为 $(-2, 2)$;

(3) $\because$ 直线 PB 经过点 $P(-2, 2)$, $B(2, 0)$,

$\therefore PB$ 所在直线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x + 1$,

设 $Q(a, \frac{1}{2}a - 1)$ 是 $y = \frac{1}{2}x - 1$ 上的一点,

则 Q 点关于 x 轴的对称点为 $(a, 1 - \frac{1}{2}a)$,

将 $(a, 1 - \frac{1}{2}a)$ 代入 $y = -\frac{1}{2}x + 1$ 显然成立,

$\therefore$ 直线 l 上的任意一点关于 x 轴的对称点一定在 PB 所在直线上.

【点评】 本题是二次函数的综合题型, 其中涉及到的知识点有待定系数法求抛物线的解析式, 待定系数法求直线的解析式, 函数的最值问题, 四边形的面积求法, 以及关于 x 轴的对称点的坐标特征.

