

2014 年内蒙古包头市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. (3 分) 下列实数是无理数的是 ()

A. -2

B. $\frac{1}{3}$

C. $\sqrt{4}$

D. $\sqrt{5}$

2. (3 分) 下列计算正确的是 ()

A. $(-1)^{-1} = 1$

B. $(-1)^0 = 0$

C. $|-1| = -1$

D. $-(-1)^2 = -1$

3. (3 分) 2013 年我国 GDP 总值为 56.9 万亿元，增速达 7.7%，将 56.9 万亿元用科学记数法表示为 ()

A. 56.9×10^{12} 元

B. 5.69×10^{13} 元

C. 5.69×10^{12} 元

D. 0.569×10^{13} 元

4. (3 分) 在一次信息技术考试中，抽得 6 名学生的成绩（单位：分）如下：8，8，10，8，7，9，则这 6 名学生成绩的中位数是 ()

A. 7

B. 8

C. 9

D. 10

5. (3 分) 计算 $\sin^2 45^\circ + \cos 30^\circ \cdot \tan 60^\circ$ ，其结果是 ()

A. 2

B. 1

C. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{5}{4}$

6. (3 分) 长为 9，6，5，4 的四根木条，选其中三根组成三角形，选法有 ()

A. 1 种

B. 2 种

C. 3 种

D. 4 种

7. (3 分) 下列说法正确的是 ()

A. 必然事件发生的概率为 0

B. 一组数据 1，6，3，9，8 的极差为 7

C. “面积相等的两个三角形全等”这一事件是必然事件

D. “任意一个三角形的外角和等于 180° ”这一事件是不可能事件

8. (3 分) 在平面直角坐标系中，将抛物线 $y = 3x^2$ 先向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位，得到的抛物线的解析式是 ()

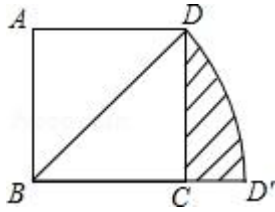
A. $y = 3(x+1)^2 + 2$

B. $y = 3(x+1)^2 - 2$

C. $y = 3(x-1)^2 + 2$

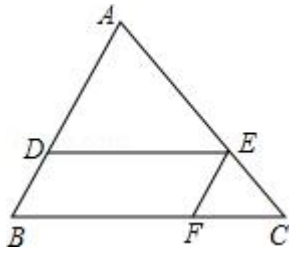
D. $y = 3(x-1)^2 - 2$

9. (3 分) 如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 BD 的长为 $\sqrt{2}$ 。若将 BD 绕点 B 旋转后，点 D 落在 BC 延长线上的点 D' 处，点 D 经过的路径为 $\widehat{DD'}$ ，则图中阴影部分的面积是 ()



- A. $\frac{\pi}{2} - 1$ B. $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}$ C. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ D. $\pi - 2$

10. (3分) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D, E, F 分别在边 AB, AC, BC 上, 且 $DE \parallel BC, EF \parallel AB$. 若 $AD = 2BD$, 则 $\frac{CF}{BF}$ 的值为 ()



- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{2}{3}$

11. (3分) 已知下列命题:

- ①若 $a > b$, 则 $ac > bc$;
- ②若 $a = 1$, 则 $\sqrt{a} = a$;
- ③内错角相等;
- ④ 90° 的圆周角所对的弦是直径.

其中原命题与逆命题均为真命题的个数是 ()

- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个

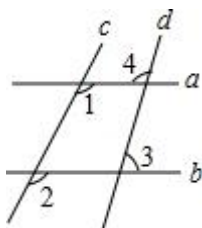
12. (3分) 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2(m-1)x + m^2 = 0$ 的两个实数根分别为 x_1, x_2 , 且 $x_1 + x_2 > 0, x_1 x_2 > 0$, 则 m 的取值范围是 ()

- A. $m \leq \frac{1}{2}$ B. $m \leq \frac{1}{2}$ 且 $m \neq 0$ C. $m < 1$ D. $m < 1$ 且 $m \neq 0$

二、填空题 (本大题共 8 小题, 每小题 3 分, 共 24 分)

13. (3分) 计算: $\frac{1}{2}\sqrt{20} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{5}} =$ _____.

14. (3分) 如图, 已知 $\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = 73^\circ$, 则 $\angle 4$ 的度数为 _____ 度.

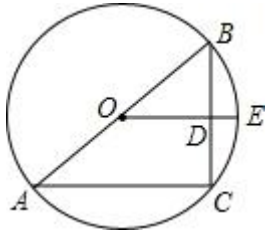


15. (3分) 某学校举行演讲比赛, 5位评委对某选手的打分如下(单位: 分) 9.5, 9.4, 9.4, 9.5, 9.2, 则这5个分数的平均分为_____分.

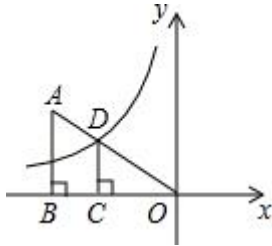
16. (3分) 计算: $(x+1)^2 - (x+2)(x-2) =$ _____.

17. (3分) 方程 $\frac{3}{x^2+x} - \frac{1}{x^2-x} = 0$ 的解为 $x =$ _____.

18. (3分) 如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, BC 是弦, 点 E 是 $\widehat{BC}$ 的中点, OE 交 BC 于点 D . 连接 AC , 若 $BC = 6$, $DE = 1$, 则 AC 的长为_____.



19. (3分) 如图, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle ABO$ 的顶点 O 与原点重合, 顶点 B 在 x 轴上, $\angle ABO = 90^\circ$, OA 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象交于点 D , 且 $OD = 2AD$, 过点 D 作 x 轴的垂线交 x 轴于点 C . 若 $S_{\text{四边形}ABCD} = 10$, 则 k 的值为_____.



20. (3分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为 AB 的中点, $EF \perp EC$ 交 AD 于点 F , 连接 CF ($AD > AE$), 下列结论:

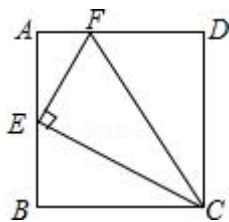
① $\angle AEF = \angle BCE$;

② $AF + BC > CF$;

③ $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle EAF} + S_{\triangle CBE}$;

④ 若 $\frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $\triangle CEF \cong \triangle CDF$.

其中正确的结论是_____. (填写所有正确结论的序号)



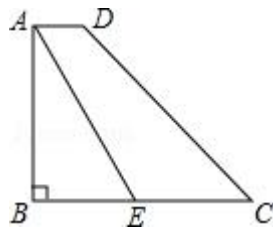
三、解答题（本大题共 6 小题，共 60 分）

21.（8 分）有四张正面分别标有数字 2，1，-3，-4 的不透明卡片，它们除数字外其余全部相同，现将它们背面朝上，洗匀后从四张卡片中随机地摸取一张不放回，将该卡片上的数字记为 m ，再随机地摸取一张，将卡片上的数字记为 n .

（1）请画出树状图并写出 (m, n) 所有可能的结果；

（2）求所选出的 m, n 能使一次函数 $y = mx + n$ 的图象经过第二、三、四象限的概率.

22.（8 分）如图，在梯形 $ABCD$ 中， $AD \parallel BC$ ， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\angle BCD = 45^\circ$ ，点 E 在 BC 上，且 $\angle AEB = 60^\circ$. 若 $AB = 2\sqrt{3}$ ， $AD = 1$ ，求 CD 和 CE 的长.（注意：本题中的计算过程和结果均保留根号）



23.（10 分）甲、乙两个商场出售相同的某种商品，每件售价均为 3000 元，并且多买都有一定的优惠. 甲商场的优惠条件是：第一件按原售价收费，其余每件优惠 30%；乙商场的优惠条件是：每件优惠 25%. 设所买商品为 x 件时，甲商场收费为 y_1 元，乙商场收费为 y_2 元.

（1）分别求出 y_1, y_2 与 x 之间的关系式；

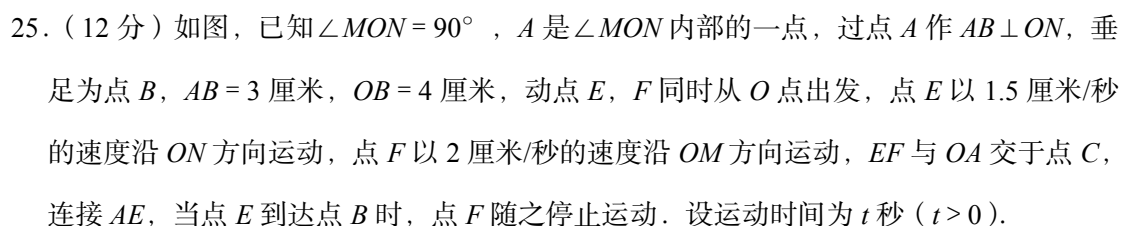
（2）当甲、乙两个商场的收费相同时，所买商品为多少件？

（3）当所买商品为 5 件时，应选择哪个商场更优惠？请说明理由.

24.（10 分）如图，已知 AB, AC 分别是 $\odot O$ 的直径和弦，点 G 为 $\widehat{AC}$ 上一点， $GE \perp AB$ ，垂足为点 E ，交 AC 于点 D ，过点 C 的切线与 AB 的延长线交于点 F ，与 EG 的延长线交于点 P ，连接 AG .

（1）求证： $\triangle PCD$ 是等腰三角形；

（2）若点 D 为 AC 的中点，且 $\angle F = 30^\circ$ ， $BF = 2$ ，求 $\triangle PCD$ 的周长和 AG 的长.



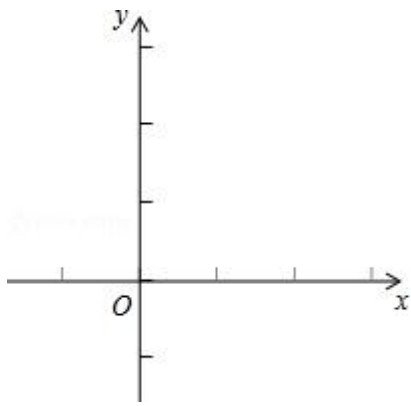
(1) 当 $t=1$ 秒时, $\triangle EOF$ 与 $\triangle ABO$ 是否相似? 请说明理由;

(3) 连接 AF , 在运动过程中, 是否存在某一时刻 t , 使得 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} AEOF}$? 若存在,

(1) 求该抛物线的解析式及点 M 的坐标;

(3) 点 E 是该抛物线上一动点, 且位于第一象限, 当点 E 到直线 BC 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,

(4) 在满足(3)的条件下, 连接 EN , 并延长 EN 交 y 轴于点 F , E 、 F 两点关于直线 BC 对称吗? 请说明理由.



2014 年内蒙古包头市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 【分析】根据无理数是无限不循环小数，可得答案.

【解答】解： A 、是有理数，故 A 错误；

B 、是有理数，故 B 错误；

C 、是有理数，故 C 错误；

D 、 $\sqrt{5}$ 是无理数，故 D 正确.

故选： D .

【点评】本题考查了无理数，无理数是无限不循环小数.

2. 【分析】根据负整数指数幂，可判断 A ，根据非 0 的 0 次幂，可判断 B ，根据负数的绝对值是正数，可判断 C ，根据相反数，可判断 D .

【解答】解： A 、 $(-1)^{-1} = -1$ ，故 A 错误；

B 、 $(-1)^0 = 1$ ，故 B 错误；

C 、 $|-1| = 1$ ，故 C 错误；

D 、 $-(-1)^2 = -1$ ，故 D 正确；

故选： D .

【点评】本题考查了负整数指数幂，负整数指数为正整数指数的倒数；任何非 0 数的 0 次幂等于 1.

3. 【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数. 确定 n 的值时，要看把原数变成 a 时，小数点移动了多少位， n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时， n 是正数；当原数的绝对值 < 1 时， n 是负数.

【解答】解： 56.9 万亿元 $= 5.69 \times 10^{13}$ 元，

故选： B .

【点评】此题考查科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式，其中 $1 \leq |a| < 10$ ， n 为整数，表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

4. 【分析】根据中位数的定义，把这组数据从小到大排列，找出最中间的数即可.

【解答】解：把这组数据从小到大排列为：7，8，8，8，9，10，

最中间两个数的平均数是 $(8+8) \div 2 = 8$ ，

则中位数是 8.

故选: B .

【点评】本题考查了中位数, 中位数是将一组数据从小到大 (或从大到小) 重新排列后, 最中间的那个数 (最中间两个数的平均数).

5. 【分析】根据特殊角的三角函数值计算即可.

【解答】解: 原式 $= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3}$
 $= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}$
 $= 2.$

故选: A .

【点评】此题比较简单, 解答此题的关键是熟记特殊角的三角函数值.

6. 【分析】要把四条线段的所有组合列出来, 再根据三角形的三边关系判断能组成三角形的组数.

【解答】解: 四根木条的所有组合: 9, 6, 5 和 9, 6, 4 和 9, 5, 4 和 6, 5, 4;

根据三角形的三边关系, 得能组成三角形的有 9, 6, 5 和 9, 6, 4 和 6, 5, 4.

故选: C .

【点评】本题考查了三角形的三边关系, 熟记三角形的任意两边之和大于第三边, 两边之差小于第三边是解题的关键.

7. 【分析】根据必然事件、不可能事件、随机事件的概念可区别各类事件, 可得答案.

【解答】解: A 、必然事件发生的概率为 1, 故 A 错误;

B 、一组数据 1, 6, 3, 9, 8 的极差为 8, 故 B 错误;

C 、面积相等两个三角形全等, 是随机事件, 故 C 错误;

D 、“任意一个三角形的外角和等于 180° ”是不可能事件, 故 D 正确;

故选: D .

【点评】本题考查了随机事件, 解决本题需要正确理解必然事件、不可能事件、随机事件的概念. 必然事件指在一定条件下一定发生的事件. 不可能事件是指在一定条件下, 一定不发生的事件. 不确定事件即随机事件是指在一定条件下, 可能发生也可能不发生的事.

8. 【分析】先根据抛物线的顶点式得到抛物线 $y = 3x^2$ 的对称轴为直线 $x = 0$, 顶点坐标为 $(0, 0)$, 则抛物线 $y = 3x^2$ 向右平移 1 个单位, 再向上平移 2 个单位得到的抛物线的对称轴为

直线 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, 2)$ ，然后再根据顶点式即可得到平移后抛物线的解析式。

【解答】解：∵ 抛物线 $y = 3x^2$ 的对称轴为直线 $x = 0$ ，顶点坐标为 $(0, 0)$ ，

∴ 抛物线 $y = 3x^2$ 向右平移 1 个单位，再向上平移 2 个单位得到的抛物线的对称轴为直线 $x = 1$ ，顶点坐标为 $(1, 2)$ ，

∴ 平移后抛物线的解析式为 $y = 3(x - 1)^2 + 2$ 。

故选：C。

【点评】本题考查了二次函数图象与几何变换：先把抛物线的解析式化为顶点式 $y = a(x - k)^2 + h$ ，其中对称轴为直线 $x = k$ ，顶点坐标为 (k, h) ，若把抛物线先右平移 m 个单位，向上平移 n 个单位，则得到的抛物线的解析式为 $y = a(x - k - m)^2 + h + n$ ；抛物线的平移也可理解为把抛物线的顶点进行平移。

9. **【分析】**首先根据正方形的性质可得 $\angle DBD' = 45^\circ$ ， $BC = CD$ ，然后根据勾股定理可得 BC 、 CD 长，再计算出扇形 BDD' 和 $\triangle BCD$ 的面积可得阴影部分面积。

【解答】解：∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

∴ $\angle DBD' = 45^\circ$ ， $BC = CD$ ，

∴ BD 的长为 $\sqrt{2}$ ，

∴ $BC = CD = 1$ ，

$$\therefore S_{\text{扇形} BDD'} = \frac{45 \cdot \pi \cdot 2}{360} = \frac{\pi}{4},$$

$$S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \text{阴影部分的面积} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

故选：C。

【点评】此题主要考查了正方形的性质，扇形的面积和三角形的面积计算，关键是掌握

扇形的面积公式： $S = \frac{n\pi r^2}{360}$ 。

10. **【分析】**根据平行线分线段成比例定理得出 $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{CF} = 2$ ，即可得出答案。

【解答】解：∵ $DE \parallel BC$ ， $EF \parallel AB$ ， $AD = 2BD$ ，

$$\therefore \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC} = 2, \quad \frac{AE}{EC} = \frac{BF}{CF} = 2,$$

$$\therefore \frac{CF}{BF} = \frac{1}{2},$$

故选：A。

【点评】 本题考查了平行线分线段成比例定理的应用，注意：一组平行线截两条直线，所截得的对应线段成比例.

11. 【分析】 先对原命题进行判断，再判断出逆命题的真假即可.

【解答】 解：①若 $a > b$ ，则 $ac > bc$ 是假命题，逆命题是假命题；

②若 $a = 1$ ，则 $\sqrt{a} = a$ 是真命题，逆命题是假命题；

③内错角相等是假命题，逆命题是假命题；

④ 90° 的圆周角所对的弦是直径是真命题，逆命题是真命题；

其中原命题与逆命题均为真命题的个数是 1 个；

故选：A.

【点评】 主要考查命题与定理，用到的知识点是互逆命题的知识，两个命题中，如果第一个命题的条件是第二个命题的结论，而第一个命题的结论又是第二个命题的条件，那么这两个命题叫做互逆命题. 其中一个命题称为另一个命题的逆命题，判断命题的真假关键是要熟悉课本中的性质定理.

12. 【分析】 先由根的判别式可得方程有两个实数根则 $\Delta \geq 0$ ，根据根与系数的关系得出 $x_1 + x_2 = -2(m-1)$ ， $x_1 x_2 = m^2$ ，再由 $x_1 + x_2 > 0$ ， $x_1 x_2 > 0$ ，解出不等式组即可.

【解答】 解： $\because \Delta = [2(m-1)]^2 - 4m^2 = -8m + 4 \geq 0$,

$$\therefore m \leq \frac{1}{2},$$

$$\because x_1 + x_2 = -2(m-1) > 0, \quad x_1 x_2 = m^2 > 0$$

$$\therefore m < 1, \quad m \neq 0$$

$$\therefore m \leq \frac{1}{2} \text{ 且 } m \neq 0.$$

故选：B.

【点评】 此题考查了根的判别式和根与系数的关系，一元二次方程根的情况与判别式 Δ 的关系：(1) $\Delta > 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个不相等的实数根；(2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow$ 方程有两个相等的实数根；(3) $\Delta < 0 \Leftrightarrow$ 方程没有实数根，根与系数的关系是 $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ， $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

二、填空题（本大题共 8 小题，每小题 3 分，共 24 分）

13. 【分析】 首先化简二次根式进而合并同类二次根式进而得出答案.

$$\begin{aligned} \text{【解答】 解：} & \frac{1}{2}\sqrt{20} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{1}{5}} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} - \frac{5}{4} \times \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{4}.$$

故答案为: $\frac{3\sqrt{5}}{4}$.

【点评】此题主要考查了二次根式的加减运算，正确化简二次根式是解题关键.

14. 【分析】根据已知一对同位角相等，利用同位角相等两直线平行得到 a 与 b 平行，利用两直线平行同旁内角互补得到一对角互补，再利用对顶角相等即可确定出 $\angle 4$ 的度数.

【解答】解: $\because \angle 1 = \angle 2$,

$$\therefore a \parallel b,$$

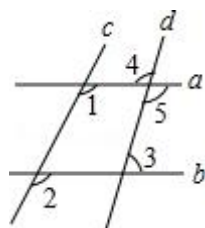
$$\therefore \angle 5 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\because \angle 4 = \angle 5, \angle 3 = 73^\circ,$$

$$\therefore \angle 4 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\text{则 } \angle 4 = 107^\circ.$$

故答案为: 107



【点评】此题考查了平行线的判定与性质，熟练掌握平行线的判定与性质是解本题的关键.

15. 【分析】根据加权平均数的计算公式列出算式，再进行计算即可.

【解答】解: 这 5 个分数的平均分为 $(9.5 \times 2 + 9.4 \times 2 + 9.2) \div 5 = 9.4$;

故答案为: 9.4.

【点评】此题考查了加权平均数，用到的知识点是加权平均数的计算公式，关键是根据公式列出算式.

16. 【分析】原式第一项利用完全平方公式展开，第二项利用平方差公式化简，去括号合并即可得到结果.

【解答】解: 原式 $= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4$

$$= 2x + 5.$$

故答案为: $2x + 5$.

【点评】此题考查了完全平方公式，以及平方差公式，熟练掌握公式是解本题的关键．

17. 【分析】分式方程去分母转化为整式方程，求出整式方程的解得到 x 的值，经检验即可得到分式方程的解．

【解答】解：去分母得： $3x - 3 - x - 1 = 0$ ，

解得： $x = 2$ ，

经检验 $x = 2$ 是分式方程的解．

故答案为：2

【点评】此题考查了解分式方程，解分式方程的基本思想是“转化思想”，把分式方程转化为整式方程求解．解分式方程一定要注意要验根．

18. 【分析】连接 OC ，根据圆心角与弧之间的关系可得 $\angle BOE = \angle COE$ ，由于 $OB = OC$ ，根据等腰三角形的性质可得 $OD \perp BC$ ， $BD = CD$ ．在直角三角形 BDO 中，根据勾股定理可求出 OB ，进而求出 OD 长，再根据三角形中位线定理可得 AC 的长．

【解答】解：连接 OC ，如图所示．

$\because$ 点 E 是 $\widehat{BC}$ 的中点，

$\therefore \angle BOE = \angle COE$ ．

$\because OB = OC$ ，

$\therefore OD \perp BC$ ， $BD = DC$ ．

$\because BC = 6$ ，

$\therefore BD = 3$ ．

设 $\odot O$ 的半径为 r ，则 $OB = OE = r$ ．

$\because DE = 1$ ，

$\therefore OD = r - 1$ ．

$\because OD \perp BC$ 即 $\angle BDO = 90^\circ$ ，

$\therefore OB^2 = BD^2 + OD^2$ ．

$\because OB = r$ ， $OD = r - 1$ ， $BD = 3$ ，

$\therefore r^2 = 3^2 + (r - 1)^2$ ．

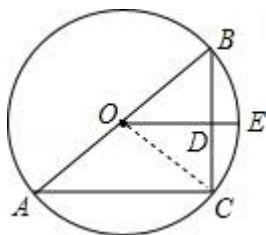
解得： $r = 5$ ．

$\therefore OD = 4$ ．

$\because AO = BO$ ， $BD = CD$ ，

$$\therefore OD = \frac{1}{2}AC.$$

$$\therefore AC = 8.$$



【点评】 本题考查了在同圆或等圆中等弧所对的圆心角相等、等腰三角形的性质、勾股定理、三角形中位线定理等知识，有一定的综合性．

19. 【分析】 证 $\triangle DCO \sim \triangle ABO$ ，推出 $\frac{DC}{AB} = \frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA} = \frac{2}{3}$ ，求出 $\frac{S_{\triangle ODC}}{S_{\triangle OAB}} = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$ ，求

出 $S_{\triangle ODC} = 8$ ，根据三角形面积公式得出 $\frac{1}{2}OC \times CD = 8$ ，求出 $OC \times CD = 16$ 即可．

【解答】 解： $\because OD = 2AD$ ，

$$\therefore \frac{OD}{OA} = \frac{2}{3},$$

$$\because \angle ABO = 90^\circ, DC \perp OB,$$

$$\therefore AB \parallel DC,$$

$$\therefore \triangle DCO \sim \triangle ABO,$$

$$\therefore \frac{DC}{AB} = \frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OA} = \frac{2}{3},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle ODC}}{S_{\triangle OAB}} = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9},$$

$$\because S_{\text{四边形}ABCD} = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle ODC} = 8,$$

$$\therefore \frac{1}{2}OC \times CD = 8,$$

$$OC \times CD = 16,$$

$\because$ 双曲线在第二象限，

$$\therefore k = -16,$$

故答案为：-16．

【点评】 本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，相似三角形的性质和判定的应用，解此题的关键是求出 $\triangle ODC$ 的面积．

20. 【分析】根据同角的余角相等可得 $\angle AEF = \angle BCE$ ，判断出①正确，然后求出 $\triangle AEF$ 和 $\triangle BCE$ 相似，根据相似三角形对应边成比例可得 $\frac{AF}{BE} = \frac{EF}{EC}$ ，然后根据两组边对边对应成比例，两三角形相似求出 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ECF$ ，再根据相似三角形对应角相等可得 $\angle AFE = \angle EFC$ ，过点 E 作 $EH \perp FC$ 于 H ，根据角平分线上的点到角的两边距离相等可得 $AE = HE$ ，利用“HL”证明 $\triangle AEF$ 和 $\triangle HEF$ ，根据全等三角形对应边相等可得 $AF = FH$ ，同理可得 $BC = CH$ ，然后求出 $AF + BC = CF$ ，判断出②错误；根据全等三角形的面积相等可得 $S_{\triangle CEF} = S_{\triangle EAF} + S_{\triangle CBE}$ ，判断出③正确；根据锐角三角函数的定义求出 $\angle BCE = 30^\circ$ ，然后求出 $\angle DCF = \angle ECF = 30^\circ$ ，再利用“角角边”证明即可。

【解答】解： $\because EF \perp EC$ ，

$$\therefore \angle AEF + \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BEC + \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BCE, \text{ 故①正确;}$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle B = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle BCE,$$

$$\therefore \frac{AF}{BE} = \frac{EF}{EC},$$

$$\because \text{点 } E \text{ 是 } AB \text{ 的中点,}$$

$$\therefore AE = BE,$$

$$\therefore \frac{AF}{AE} = \frac{EF}{EC},$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle CEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle AEF \sim \triangle ECF,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle EFC,$$

过点 E 作 $EH \perp FC$ 于 H ，

$$\text{则 } AE = HE,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle HEF$ 中，

$$\begin{cases} EF = EF \\ AE = EH \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AEF \cong \triangle HEF \text{ (HL)},$$

$$\therefore AF = FH,$$

同理可得 $\triangle BCE \cong \triangle HCE$ ，

$$\therefore BC = CH,$$

$$\therefore AF + BC = CF, \text{ 故②错误;}$$

$$\because \triangle AEF \cong \triangle HEF, \triangle BCE \cong \triangle HCE,$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = S_{\triangle EAF} + S_{\triangle CBE}, \text{ 故③正确;}$$

$$\text{若 } \frac{BC}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 则 } \cot \angle BCE = \frac{BC}{BE} = \frac{BC}{\frac{1}{2}AB} = \frac{BC}{\frac{1}{2}CD} = \frac{2BC}{CD} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$\therefore \angle BCE = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle DCF = \angle ECF = 30^\circ,$$

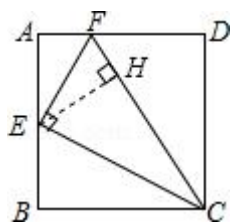
在 $\triangle CEF$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} \angle DCF = \angle ECF \\ \angle D = \angle CEF \\ CF = CF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle CEF \cong \triangle CDF (AAS), \text{ 故④正确,}$$

综上所述, 正确的结论是①③④.

故答案为: ①③④.



【点评】 本题考查了矩形的性质, 全等三角形的判定与性质, 相似三角形的判定与性质, 解直角三角形, 熟记各性质是解题的关键, 难点在于求出 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ECF$ 相似并得到 $\angle AFE = \angle EFC$.

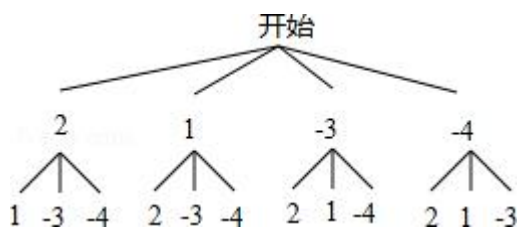
三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 60 分)

21. **【分析】** (1) 首先根据题意画出树状图, 然后由树状图求得所有等可能的结果;

(2) 首先可得所选出的 m, n 能使一次函数 $y = mx + n$ 的图象经过第二、三、四象限的有:

$(-3, -4), (-4, -3)$, 再利用概率公式即可求得答案.

【解答】 解: (1) 画树状图得:



则 (m, n) 共有 12 种等可能的结果: $(2, 1), (2, -3), (2, -4), (1, 2), (1, -3), (1, -4), (-3, 2), (-3, 1), (-3, -4), (-4, 2), (-4, 1), (-4, -3)$;

(2) $\because$ 所选出的 m, n 能使一次函数 $y = mx + n$ 的图象经过第第二、三、四象限的有: $(-3, -4), (-4, -3)$,

$\therefore$ 所选出的 m, n 能使一次函数 $y = mx + n$ 的图象经过第第二、三、四象限的概率为: $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

【点评】 本题考查的是用列表法或画树状图法求概率. 列表法或画树状图法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果, 列表法适合于两步完成的事件, 树状图法适合两步或两步以上完成的事件. 用到的知识点为: 概率 = 所求情况数与总情况数之比.

22. **【分析】** 过点 D 作 $DF \perp BC$, 根据 $\angle BCD = 45^\circ$, 得 $DF = CF$, 再由 $AB = 2\sqrt{3}$, 可得 $DF = CF = 2\sqrt{3}$, 由勾股定理得 CD 的长, 因为 $AD = 1$, 所以 $BC = 2\sqrt{3} + 1$, 根据 $\angle AEB = 60^\circ$, 可得 BE , 进而得出 CE 的长.

【解答】 解: 过点 D 作 $DF \perp BC$,

$\because AD \parallel BC, \angle ABC = 90^\circ$,

$\therefore$ 四边形 $ABFD$ 为矩形,

$\because \angle BCD = 45^\circ$,

$\therefore DF = CF$,

$\because AB = 2\sqrt{3}$,

$\therefore DF = CF = 2\sqrt{3}$,

$\therefore$ 由勾股定理得 $CD = 2\sqrt{6}$;

$\because AD = 1$,

$\therefore BF = 1$,

$\therefore BC = 2\sqrt{3} + 1$,

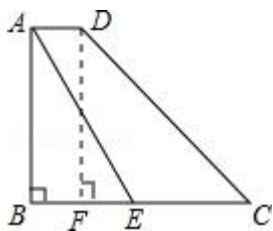
$\because \angle AEB = 60^\circ$,

$\therefore \tan 60^\circ = \frac{AB}{BE}$,

$\therefore \frac{2\sqrt{3}}{BE} = \sqrt{3}$,

$\therefore BE = 2$,

$$\therefore CE = BC - BE = 2\sqrt{3} + 1 - 2 = 2\sqrt{3} - 1.$$



【点评】本题考查了梯形的计算以及勾股定理，是基础知识要熟练掌握．

23. 【分析】（1）根据两家商场的优惠方案分别列式整理即可；

（2）根据收费相同，列出方程求解即可；

（3）根据函数解析式分别求出 $x = 5$ 时的函数值，即可得解．

【解答】解：（1）当 $x = 1$ 时， $y_1 = 3000$ ；

$$\text{当 } x > 1 \text{ 时， } y_1 = 3000 + 3000(x - 1) \times (1 - 30\%) = 2100x + 900.$$

$$\therefore y_1 = \begin{cases} 3000 (x=1) \\ 2100x + 900 (x > 1) \end{cases};$$

$$y_2 = 3000x(1 - 25\%) = 2250x,$$

$$\therefore y_2 = 2250x;$$

$$\text{（2）当甲、乙两个商场的收费相同时， } 2100x + 900 = 2250x,$$

解得 $x = 6$ ，

答：甲、乙两个商场的收费相同时，所买商品为 6 件；

$$\text{（3） } x = 5 \text{ 时， } y_1 = 2100x + 900 = 2100 \times 5 + 900 = 11400,$$

$$y_2 = 2250x = 2250 \times 5 = 11250,$$

$$\therefore 11400 > 11250,$$

$\therefore$ 所买商品为 5 件时，应选择乙商场更优惠．

【点评】本题考查了一次函数的应用，读懂题目信息，理解两家商场的优惠方案是解题的关键．

24. 【分析】（1）连结 OC ，根据切线的性质得 $\angle OCP = 90^\circ$ ，即 $\angle 1 + \angle PCD = 90^\circ$ ，由 $GE \perp AB$ 得 $\angle GEA = 90^\circ$ ，则 $\angle 2 + \angle ADE = 90^\circ$ ，利用 $\angle 1 = \angle 2$ 得到 $\angle PCD = \angle ADE$ ，根据对顶角相等得 $\angle ADE = \angle PDC$ ，所以 $\angle PCD = \angle PDC$ ，于是根据等腰三角形的判定定理得到 $\triangle PCD$ 是等腰三角形；

(2) 连结 OD , BG , 在 $\text{Rt}\triangle COF$ 中根据含 30° 度的直角三角形三边的关系可计算出 $OC = 2$, 由于 $\angle FOC = 90^\circ - \angle F = 60^\circ$, 根据三角形外角性质可计算出 $\angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$, 则 $\angle PCD = 90^\circ - \angle 1 = 60^\circ$, 可判断 $\triangle PCD$ 为等边三角形; 再由 D 为 AC 的中点, 根据垂径定理得到 $OD \perp AC$, $AD = CD$, 在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中, 可计算出 $OD = \frac{1}{2}OC = 1$, $CD = \sqrt{3}OD = \sqrt{3}$, 所以 $\triangle PCD$ 的周长为 $3\sqrt{3}$; 然后在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 计算出 $DE = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $AE = \sqrt{3}DE = \frac{3}{2}$, 根据圆周角定理由 AB 为直径得到 $\angle AGB = 90^\circ$, 再证明 $\text{Rt}\triangle AGE \sim \text{Rt}\triangle ABG$, 利用相似比可计算出 AG .

【解答】(1) 证明: 连结 OC , 如图,

$\because PC$ 为 $\odot O$ 的切线,

$\therefore OC \perp PC$,

$\therefore \angle OCP = 90^\circ$, 即 $\angle 1 + \angle PCD = 90^\circ$,

$\because GE \perp AB$,

$\therefore \angle GEA = 90^\circ$,

$\therefore \angle 2 + \angle ADE = 90^\circ$,

$\because OA = OC$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

$\therefore \angle PCD = \angle ADE$,

而 $\angle ADE = \angle PDC$,

$\therefore \angle PCD = \angle PDC$,

$\therefore \triangle PCD$ 是等腰三角形;

(2) 解: 连结 OD , BG , 如图,

在 $\text{Rt}\triangle COF$ 中, $\angle F = 30^\circ$, $BF = 2$,

$\therefore OF = 2OC$, 即 $OB + 2 = 2OC$,

而 $OB = OC$,

$\therefore OC = 2$,

$\therefore \angle FOC = 90^\circ - \angle F = 60^\circ$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 30^\circ$,

$\therefore \angle PCD = 90^\circ - \angle 1 = 60^\circ$,

$\therefore \triangle PCD$ 为等边三角形,

$\because D$ 为 AC 的中点,

$\therefore OD \perp AC$,

$\therefore AD = CD$,

在 $\text{Rt}\triangle OCD$ 中, $OD = \frac{1}{2}OC = 1$,

$CD = \sqrt{3}OD = \sqrt{3}$,

$\therefore \triangle PCD$ 的周长为 $3\sqrt{3}$;

在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, $AD = CD = \sqrt{3}$,

$\therefore DE = \frac{1}{2}AD = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$AE = \sqrt{3}DE = \frac{3}{2}$,

$\because AB$ 为直径,

$\therefore \angle AGB = 90^\circ$,

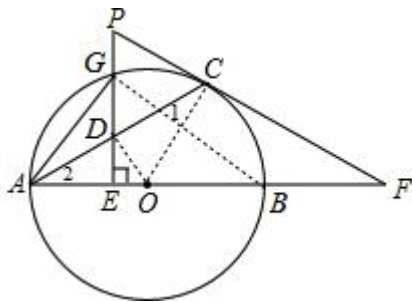
而 $\angle GAE = \angle BAG$,

$\therefore \text{Rt}\triangle AGE \sim \text{Rt}\triangle ABG$,

$\therefore AG: AB = AE: AG$,

$\therefore AG^2 = AE \cdot AB = \frac{3}{2} \times 4 = 6$,

$\therefore AG = \sqrt{6}$.



【点评】 本题考查了切线的性质：圆的切线垂直于经过切点的半径．也考查了等腰三角形的判定、垂径定理、圆周角定理和三角形相似的判定与性质．

25. **【分析】** (1) 运用 $\frac{OE}{AB} = \frac{OF}{BO}$ 和夹角相等, 得出 $\triangle EOF \sim \triangle ABO$.

(2) 证明 $\text{Rt}\triangle EOF \sim \text{Rt}\triangle ABO$, 进而证明 $EF \perp OA$.

(3) 根据 $S_{\triangle AEF} = S_{\text{梯形} ABOF} - S_{\triangle FOE} - S_{\triangle ABE}$ 以及 $S_{\text{四边形} AEOF} = S_{\text{梯形} ABOF} - S_{\triangle ABE}$ 可得到 S

$\triangle AEF$ 与 $S_{\text{四边形} AEOF}$ 关于 t 的表达式，进而可求出 t 的值.

【解答】解：（1） $\because t = 1$,

$\therefore OE = 1.5$ 厘米， $OF = 2$ 厘米，

$\because AB = 3$ 厘米， $OB = 4$ 厘米，

$$\therefore \frac{OE}{AB} = \frac{1.5}{3} = \frac{1}{2}, \quad \frac{OF}{BO} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\because \angle MON = \angle ABE = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EOF \sim \triangle ABO$.

（2）在运动过程中， $OE = 1.5t$ ， $OF = 2t$.

$\because AB = 3$ ， $OB = 4$.

$$\therefore \frac{OE}{AB} = \frac{OF}{OB}.$$

又 $\because \angle EOF = \angle ABO = 90^\circ$,

$\therefore \text{Rt}\triangle EOF \sim \text{Rt}\triangle ABO$.

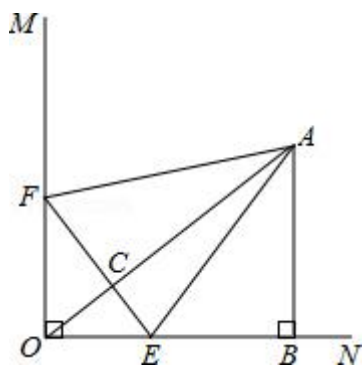
$\therefore \angle AOB = \angle EFO$.

$\because \angle AOB + \angle FOC = 90^\circ$,

$\therefore \angle EFO + \angle FOC = 90^\circ$,

$\therefore EF \perp OA$.

（3）如图，连接 AF ,



$\because OE = 1.5t$ ， $OF = 2t$,

$\therefore BE = 4 - 1.5t$

$$\therefore S_{\triangle FOE} = \frac{1}{2} OE \cdot OF = \frac{1}{2} \times 1.5t \times 2t = \frac{3}{2} t^2,$$

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \times (4 - 1.5t) \times 3 = 6 - \frac{9}{4}t,$$

$$S_{\text{梯形} ABOF} = \frac{1}{2} (2t+3) \times 4 = 4t+6,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = S_{\text{梯形} ABOF} - S_{\triangle FOE} - S_{\triangle ABE} = 4t+6 - \frac{3}{2}t^2 - (6 - \frac{9}{4}t) = -\frac{3}{2}t^2 + \frac{25}{4}t,$$

$$S_{\text{四边形} AEOF} = S_{\text{梯形} ABOF} - S_{\triangle ABE} = 4t+6 - (6 - \frac{9}{4}t) = \frac{25}{4}t,$$

$$\therefore S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} AEOF}$$

$$\therefore -\frac{3}{2}t^2 + \frac{25}{4}t = \frac{1}{2} \times \frac{25}{4}t, \quad (0 < t < \frac{8}{3})$$

$$\text{解得 } t = \frac{25}{12} \text{ 或 } t = 0 \text{ (舍去)}.$$

$$\therefore \text{当 } t = \frac{25}{12} \text{ 时, } S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} AEOF}.$$

【点评】 本题主要考查了相似形综合题，解题的关键是利用 $S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} S_{\text{四边形} AEOF}$ 求 t 的值.

26. **【分析】** 方法一：

(1) 利用待定系数法即可求得解析式，把解析式转化成顶点式即可求得顶点坐标.

(2) 根据有两组对应边对应成比例且夹角相等即可求得 $\triangle ABC \sim \triangle NBO$ ，由三角形相似的性质即可求得.

(3) 作 $EQ \perp BC$ 于 Q ，根据抛物线的解析式先设出 E 点的坐标，然后根据两直线垂直的性质求得 Q 点的坐标，根据勾股定理即可求得.

(4) 先求得直线 EF 的解析式，即可求得 $BC \perp EF$ ，根据勾股定理求得 $EN = FN$ ，即可判定 E 、 F 两点关于直线 BC 对称.

方法二：

(1) 略.

(2) 欲证 $\angle NOB = \angle ACB$ ，只需证明 $AB:BC = BN:OB$ ，因此分别求出 AB ， BC ， BN ， OB 的长度即可.

(3) 利用面积公式可求出点 E 的坐标.

(4) 求出点 E ， F ， N 坐标，再利用中点公式得出对称.

【解答】 方法一：

解：(1) $\because$ 抛物线 $y = ax^2 + x + c$ ($a \neq 0$) 经过 $A(-1, 0)$ ， $B(2, 0)$ 两点，

$$\therefore \begin{cases} a-1+c=0 \\ 4a+2+c=0 \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} a=-1 \\ c=2 \end{cases}.$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = -x^2 + x + 2;$$

$$\therefore \text{抛物线为 } y = -x^2 + x + 2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4},$$

$$\therefore \text{顶点 } M\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right).$$

$$(2) \text{ 如图 1, } \because A(-1, 0), B(2, 0), C(0, 2),$$

$$\therefore \text{直线 } BC \text{ 为: } y = -x + 2,$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时, } y = \frac{3}{2},$$

$$\therefore N\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore AB = 3, BC = 2\sqrt{2}, OB = 2, BN = \sqrt{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}\sqrt{2},$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}, \frac{BN}{OB} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

$$\because \angle ABC = \angle NBO,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle NBO,$$

$$\therefore \angle NOB = \angle ACB;$$

$$(3) \text{ 如图 2, 作 } EQ \perp BC \text{ 于 } Q,$$

$$\because \text{直线 } BC \text{ 为 } y = -x + 2,$$

$$\therefore \text{设 } E(m, -m^2 + m + 2),$$

$$\text{直线 } EQ \text{ 的解析式为 } y = x + b,$$

$$\text{则直线 } EQ \text{ 为 } y = x + (-m^2 + 2),$$

$$\text{解} \begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x + (-m^2 + 2) \end{cases}$$

$$\text{得} \begin{cases} x = \frac{1}{2}m \\ y = -\frac{1}{2}m^2 + 2 \end{cases},$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{2}m, -\frac{1}{2}m^2+2\right),$$

$$\therefore EQ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore \left(m - \frac{1}{2}m^2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}m^2+2+m^2 - m - 2\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2,$$

解得 $m = 1$,

$$\therefore -m^2+m+2 = 2,$$

$$\therefore E(1, 2),$$

(4) 如图 2, 连接 EN , 并延长 EN 交 y 轴于点 F ,

$$\therefore E(1, 2), N\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

设直线 EN 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\therefore \begin{cases} m+n=2 \\ \frac{1}{2}m+n=\frac{3}{2} \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} m=1 \\ n=1 \end{cases},$$

$\therefore$ 直线 EF 为 $y = x + 1$,

$$\therefore F(0, 1),$$

$\therefore$ 直线 BC 和直线 EF 斜率互为负倒数,

$\therefore EF \perp BC$,

$$\therefore EN = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad FN = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - 1\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$\therefore EN = FN$,

$\therefore E, F$ 两点关于直线 BC 对称.

方法二:

(1) 略.

(2) 略.

(3) 连接 EN 交 y 轴于 F , 作 $EH \perp x$ 轴交 BC 于 H ,

设 $E(t, -t^2+t+2)$, $H(t, -t+2)$,

$$S_{\triangle EBC} = \frac{1}{2}(E_Y - H_Y)(B_X - C_X) = \frac{1}{2}BC \times EN,$$

$$\therefore 2(-t^2+t+2-t-2) = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\therefore t = 1, E(1, 2).$$

$$(4) \because E(1, 2), N\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$$\therefore l_{EN}: y = x + 1,$$

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时, } y = 1,$$

$$\therefore F(0, 1),$$

$$\therefore K_{EN} \times K_{BC} = -1,$$

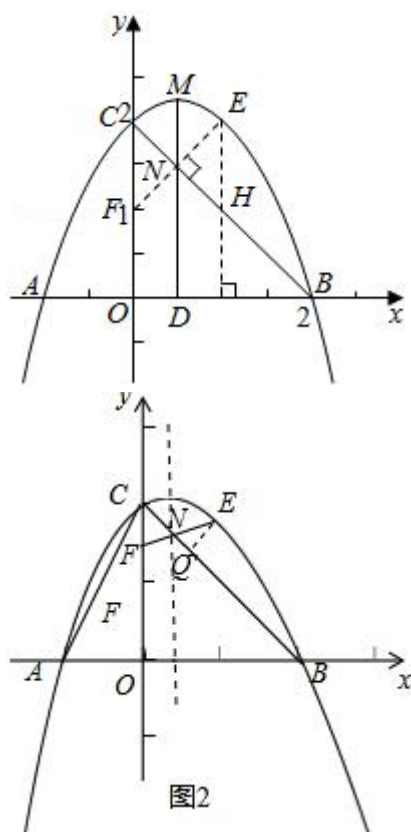
$$\therefore EN \perp BC,$$

$$\because E(1, 2), F(0, 1),$$

$$\therefore \text{线段 } EF \text{ 中点为 } \left(\frac{1+0}{2}, \frac{2+1}{2}\right),$$

$$\text{即 } N\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right),$$

$\therefore$ 点 E , 点 F 关于直线 BC 对称.



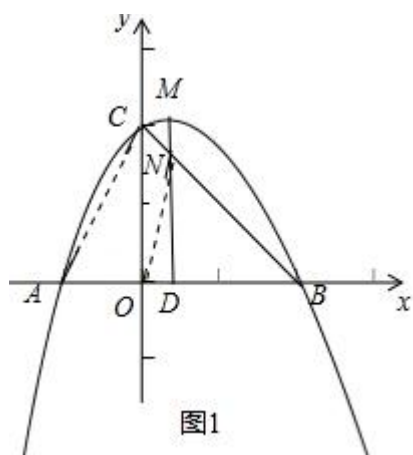


图1

【点评】 本题考查了待定系数法求解析式，抛物线的顶点的求法，直线的交点问题，勾股定理的应用等．