

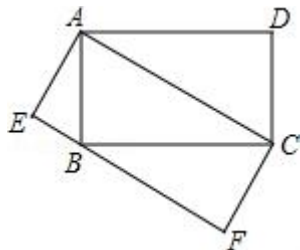
2013 年内蒙古包头市中考数学试卷

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分。每小题只有一个正确选项，请将答题卡上对应题目的答案标号涂黑）

- （3 分）计算 $(+2) + (-3)$ 所得的结果是（ ）
A. 1 B. -1 C. 5 D. -5
- （3 分） $3\tan 30^\circ$ 的值等于（ ）
A. $\sqrt{3}$ B. $3\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{3}{2}$
- （3 分）函数 $y = \frac{1}{x+1}$ 中，自变量 x 的取值范围是（ ）
A. $x > -1$ B. $x < -1$ C. $x \neq -1$ D. $x \neq 0$
- （3 分）若 $|a| = -a$ ，则实数 a 在数轴上的对应点一定在（ ）
A. 原点左侧 B. 原点或原点左侧
C. 原点右侧 D. 原点或原点右侧
- （3 分）已知方程 $x^2 - 2x - 1 = 0$ ，则此方程（ ）
A. 无实数根 B. 两根之和为 -2
C. 两根之积为 -1 D. 有一根为 $-1 + \sqrt{2}$
- （3 分）一组数据按从小到大排列为 2, 4, 8, x , 10, 14. 若这组数据的中位数为 9，则这组数据的众数为（ ）
A. 6 B. 8 C. 9 D. 10
- （3 分）下列事件中是必然事件的是（ ）
A. 在一个等式两边同时除以同一个数，结果仍为等式
B. 两个相似图形一定是位似图形
C. 平移后的图形与原来图形对应线段相等
D. 随机抛掷一枚质地均匀的硬币，落地后正面一定朝上
- （3 分）用一个圆心角为 120° ，半径为 2 的扇形作一个圆锥的侧面，则这个圆锥的底面圆半径为（ ）
A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
- （3 分）化简 $\frac{16-a^2}{a^2+4a+4} \div \frac{a-4}{2a+4} \cdot \frac{a+2}{a+4}$ ，其结果是（ ）

- A. -2 B. 2 C. $-\frac{2}{(a+2)^2}$ D. $\frac{2}{(a+2)^2}$

10. (3分) 如图, 四边形 $ABCD$ 和四边形 $AEFC$ 是两个矩形, 点 B 在 EF 边上, 若矩形 $ABCD$ 和矩形 $AEFC$ 的面积分别是 S_1 、 S_2 的大小关系是 ()



- A. $S_1 > S_2$ B. $S_1 = S_2$ C. $S_1 < S_2$ D. $3S_1 = 2S_2$

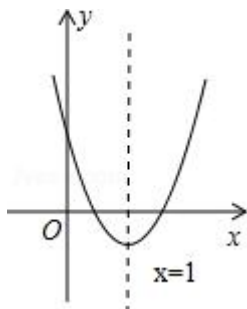
11. (3分) 已知下列命题:

- ①若 $a > b$, 则 $c - a < c - b$;
- ②若 $a > 0$, 则 $\sqrt{a^2} = a$;
- ③对角线互相平分且相等的四边形是菱形;
- ④如果两条弧相等, 那么它们所对的圆心角相等.

其中原命题与逆命题均为真命题的个数是 ()

- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个

12. (3分) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 的图象如图所示, 下列结论: ① $b < 0$; ② $4a + 2b + c < 0$; ③ $a - b + c > 0$; ④ $(a + c)^2 < b^2$. 其中正确的结论是 ()



- A. ①② B. ①③ C. ①③④ D. ①②③④

二、填空题 (共 8 小题, 每小题 3 分, 满分 24 分。请把答案填在各题对应的横线上)

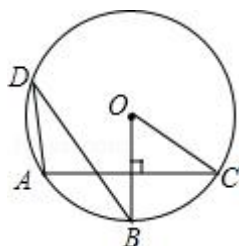
13. (3分) 计算: $\sqrt{8} - 3\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. (3分) 某次射击训练中, 一小组的成绩如表所示: 已知该小组的平均成绩为 8 环, 那么成绩为 9 环的人数是 .

环数	7	8	9
----	---	---	---

人数	3	4	
----	---	---	--

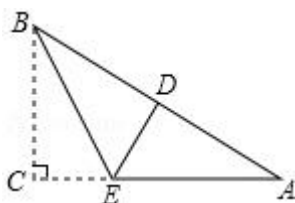
15. (3分) 如图, 点 A, B, C, D 在 $\odot O$ 上, $OB \perp AC$, 若 $\angle BOC = 56^\circ$, 则 $\angle ADB =$ _____ 度.



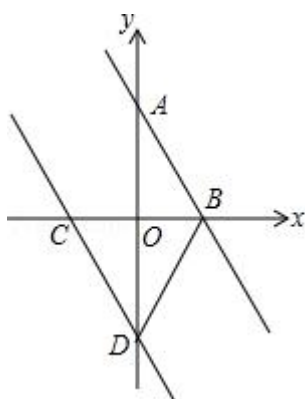
16. (3分) 不等式 $\frac{1}{3}(x - m) > 3 - m$ 的解集为 $x > 1$, 则 m 的值为 _____.

17. (3分) 设有反比例函数 $y = \frac{k+2}{x}$, $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 为其图象上两点, 若 $x_1 < 0 < x_2$, $y_1 > y_2$, 则 k 的取值范围 _____.

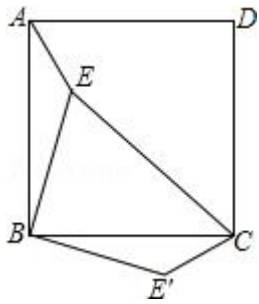
18. (3分) 如图, 在三角形纸片 ABC 中, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 6$, 折叠该纸片, 使点 C 落在 AB 边上的 D 点处, 折痕 BE 与 AC 交于点 E , 若 $AD = BD$, 则折痕 BE 的长为 _____.



19. (3分) 如图, 已知一条直线经过点 $A(0, 2)$ 、点 $B(1, 0)$, 将这条直线向左平移与 x 轴、 y 轴分别交于点 C 、点 D . 若 $DB = DC$, 则直线 CD 的函数解析式为 _____.



20. (3分) 如图, 点 E 是正方形 $ABCD$ 内的一点, 连接 AE, BE, CE , 将 $\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 到 $\triangle CBE'$ 的位置. 若 $AE = 1, BE = 2, CE = 3$, 则 $\angle BE'C =$ _____ 度.

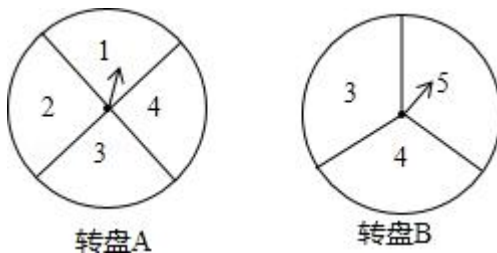


三、解答题（本大题共 6 小题，共 60 分。请将必要的文字说明、计算过程或推理过程写在对应位置）

21.（8 分）甲、乙两人在玩转盘游戏时，把两个可以自由转动的转盘 A、B 分成 4 等份、3 等份的扇形区域，并在每一小区域内标上数字（如图所示），指针的位置固定．游戏规则：同时转动两个转盘，当转盘停止后，若指针所指两个区域的数字之和为 3 的倍数，甲胜；若指针所指两个区域的数字之和为 4 的倍数时，乙胜．如果指针落在分割线上，则需要重新转动转盘．

（1）试用列表或画树形图的方法，求甲获胜的概率；

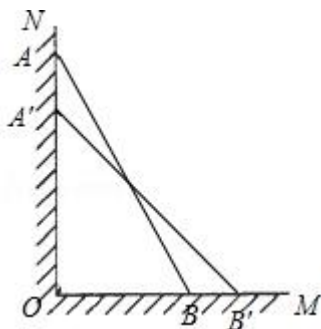
（2）请问这个游戏规则对甲、乙双方公平吗？试说明理由．



22.（8 分）如图，一根长 $6\sqrt{3}$ 米的木棒（AB），斜靠在与地面（OM）垂直的墙（ON）上，与地面的倾斜角（ $\angle ABO$ ）为 60° ．当木棒 A 端沿墙下滑至点 A' 时，B 端沿地面向右滑行至点 B'．

（1）求 OB 的长；

（2）当 $AA' = 1$ 米时，求 BB' 的长．



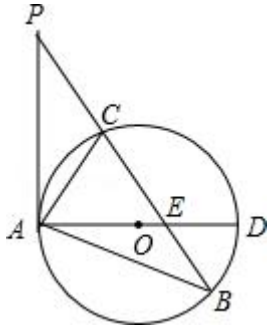
23.（10 分）某产品生产车间有工人 10 名．已知每名工人每天可生产甲种产品 12 个或乙种

产品 10 个，且每生产一个甲种产品可获得利润 100 元，每生产一个乙种产品可获得利润 180 元．在这 10 名工人中，车间每天安排 x 名工人生产甲种产品，其余工人生产乙种产品．

- (1) 请写出此车间每天获取利润 y (元) 与 x (人) 之间的函数关系式；
- (2) 若要使此车间每天获取利润为 14400 元，要派多少名工人去生产甲种产品？
- (3) 若要使此车间每天获取利润不低于 15600 元，你认为至少要派多少名工人去生产乙种产品才合适？

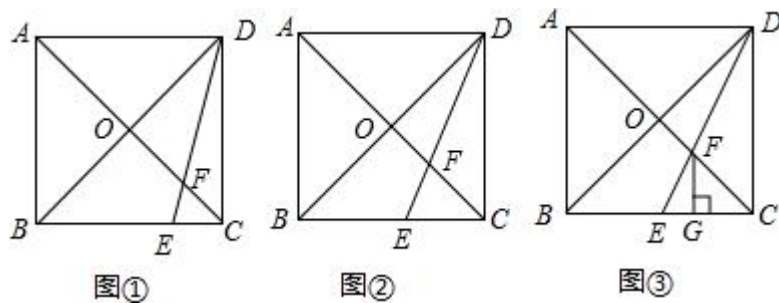
24. (10 分) 如图，已知在 $\triangle ABP$ 中， C 是 BP 边上一点， $\angle PAC = \angle PBA$ ， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， AD 是 $\odot O$ 的直径，且交 BP 于点 E ．

- (1) 求证： PA 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 过点 C 作 $CF \perp AD$ ，垂足为点 F ，延长 CF 交 AB 于点 G ，若 $AG \cdot AB = 12$ ，求 AC 的长；
- (3) 在满足 (2) 的条件下，若 $AF:FD = 1:2$ ， $GF = 1$ ，求 $\odot O$ 的半径及 $\sin \angle ACE$ 的值．



25. (12 分) 如图，在正方形 $ABCD$ 中，对角线 AC 与 BD 相交于点 O ，点 E 是 BC 上的一个动点，连接 DE ，交 AC 于点 F ．

- (1) 如图①，当 $\frac{CE}{EB} = \frac{1}{3}$ 时，求 $\frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDF}}$ 的值；
- (2) 如图②当 DE 平分 $\angle CDB$ 时，求证： $AF = \sqrt{2}OA$ ；
- (3) 如图③，当点 E 是 BC 的中点时，过点 F 作 $FG \perp BC$ 于点 G ，求证： $CG = \frac{1}{2}BG$ ．



26. (12分) 已知抛物线 $y = x^2 - 3x - \frac{7}{4}$ 的顶点为点 D ，并与 x 轴相交于 A 、 B 两点 (点 A 在点 B 的左侧)，与 y 轴相交于点 C 。

(1) 求点 A 、 B 、 C 、 D 的坐标；

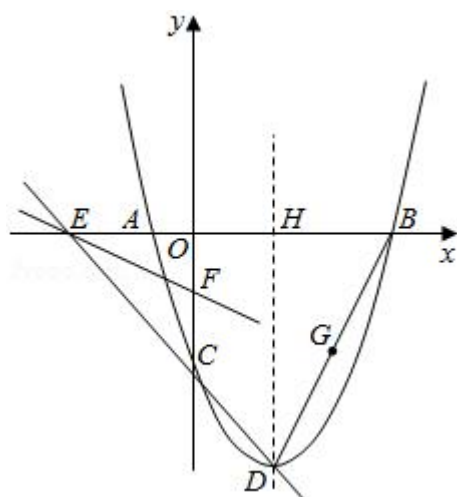
(2) 在 y 轴的正半轴上是否存在点 P ，使以点 P 、 O 、 A 为顶点的三角形与 $\triangle AOC$ 相似？

若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

(3) 取点 $E(-\frac{3}{2}, 0)$ 和点 $F(0, -\frac{3}{4})$ ，直线 l 经过 E 、 F 两点，点 G 是线段 BD 的中点。

① 点 G 是否在直线 l 上，请说明理由；

② 在抛物线上是否存在点 M ，使点 M 关于直线 l 的对称点在 x 轴上？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由。



2013 年内蒙古包头市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，满分 36 分。每小题只有一个正确选项，请将答题卡上对应题目的答案标号涂黑）

1. 【分析】运用有理数的加法法则直接计算.

【解答】解：原式 = - (3 - 2) = - 1. 故选 B.

【点评】解此题关键是记住加法法则进行计算.

2. 【分析】直接把 $\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 代入进行计算即可.

【解答】解：原式 = $3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$.

故选：A.

【点评】本题考查的是特殊角的三角函数值，熟记各特殊角度的三角函数值是解答此题的关键.

3. 【分析】根据分母不等于 0 列式计算即可得解.

【解答】解：根据题意得， $x+1 \neq 0$,

解得 $x \neq -1$.

故选：C.

【点评】本题考查了函数自变量的范围，一般从三个方面考虑：

(1) 当函数表达式是整式时，自变量可取全体实数；

(2) 当函数表达式是分式时，考虑分式的分母不能为 0；

(3) 当函数表达式是二次根式时，被开方数非负.

4. 【分析】根据 $|a| = -a$ ，求出 a 的取值范围，再根据数轴的特点进行解答即可求出答案.

【解答】解： $\because |a| = -a$,

$\therefore a$ 一定是非正数，

$\therefore$ 实数 a 在数轴上的对应点一定在原点或原点左侧.

故选：B.

【点评】此题考查了绝对值与数轴，根据 $|a| \geq 0$ ，然后利用熟知数轴的知识即可解答，是一道基础题.

5. 【分析】根据已知方程的根的判别式符号确定该方程的根的情况. 由根与系数的关系确定两根之积、两根之和的值；通过求根公式即可求得方程的根.

【解答】解： A 、 $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 8 > 0$ ，则该方程有两个不相等的实数根．故本选项错误；

B 、设该方程的两根分别是 α 、 β ，则 $\alpha + \beta = 2$ ．即两根之和为 2，故本选项错误；

C 、设该方程的两根分别是 α 、 β ，则 $\alpha\beta = -1$ ．即两根之积为 -1，故本选项正确；

D 、根据求根公式 $x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$ 知，原方程的两根是 $(1 + \sqrt{2})$ 和 $(1 - \sqrt{2})$ ．故本选项错误；

故选： C ．

【点评】本题综合考查了根与系数的关系、根的判别式以及求根公式的应用．利用根与系数的关系、求根公式解题时，务必清楚公式中的字母所表示的含义．

6. **【分析】**根据中位数为 9，可求出 x 的值，继而可判断出众数．

【解答】解：由题意得， $(8+x) \div 2 = 9$ ，

解得： $x = 10$ ，

则这组数据中出现次数最多的是 10，故众数为 10．

故选： D ．

【点评】本题考查了中位数及众数的知识，属于基础题，掌握中位数及众数的定义是关键．

7. **【分析】**必然事件就是一定发生的事件，即发生的概率是 1 的事件．

【解答】解： A 、当除数为 0 时，结论不成立，是随机事件；

B 、两个相似图形不一定是位似图形，是随机事件；

C 、平移后的图形与原来图形对应线段相等，是必然事件；

D 、随机抛出一枚质地均匀的硬币，落地后正面可能朝上，是随机事件．

故选： C ．

【点评】本题考查了必然事件、随机事件的概念，理解概念是解决基础题的主要方法．用到的知识点为：

必然事件指在一定条件下一定发生的事件；不确定事件即随机事件是指在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件．

8. **【分析】**设圆锥底面的半径为 r ，由于圆锥的侧面展开图为扇形，扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长，则 $2\pi r = \frac{120\pi \times 2}{180}$ ，然后解方程即可．

【解答】解：设圆锥底面的半径为 r ，

根据题意得 $2\pi r = \frac{120\pi \times 2}{180}$, 解得: $r = \frac{2}{3}$.

故选: D.

【点评】本题考查了圆锥的计算: 圆锥的侧面展开图为扇形, 扇形的弧长等于圆锥底面圆的周长, 扇形的半径等于圆锥的母线长.

9. 【分析】原式先利用除以一个数等于乘以这个数的倒数将除法运算化为乘法运算, 约分即可得到结果.

【解答】解: 原式 = $-\frac{(a+4)(a-4)}{(a+2)^2} \cdot \frac{2(a+2)}{a-4} \cdot \frac{a+2}{a+4} = -2$.

故选: A.

【点评】此题考查了分式的乘除法, 分式的乘除法运算的关键是约分, 约分的关键是找公因式.

10. 【分析】由于矩形 $ABCD$ 的面积等于 2 个 $\triangle ABC$ 的面积, 而 $\triangle ABC$ 的面积又等于矩形 $AEFC$ 的一半, 所以可得两个矩形的面积关系.

【解答】解: 矩形 $ABCD$ 的面积 $S = 2S_{\triangle ABC}$, 而 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}S_{\text{矩形} AEFC}$, 即 $S_1 = S_2$,

故选: B.

【点评】本题主要考查了矩形的性质及面积的计算, 能够熟练运用矩形的性质进行一些面积的计算问题.

11. 【分析】根据矩形的判定以及圆周角定理、不等式的性质和二次根式的性质分别判断得出即可.

【解答】解: ①若 $a > b$, 则 $c - a < c - b$; 原命题与逆命题都是真命题;

②若 $a > 0$, 则 $\sqrt{a^2} = a$; 逆命题: 若 $\sqrt{a^2} = a$, 则 $a > 0$, 是假命题, 故此选项错误;

③对角线互相平分且相等的四边形是矩形; 原命题是假命题, 故此选项错误;

④如果两条弧相等, 那么它们所对的圆心角相等, 逆命题: 相等的圆心角所对的弧相等, 是假命题, 故此选项错误,

故原命题与逆命题均为真命题的个数是 1 个.

故选: D.

【点评】此题主要考查了矩形、圆周角定理、二次根式、不等式的性质, 熟练掌握相关性质是解题关键.

12. 【分析】由抛物线的开口方向判断 a 与 0 的关系, 由对称轴及抛物线与 x 轴交点情况进

行推理，利用图象将 $x = 1, -1, 2$ 代入函数解析式判断 y 的值，进而对所得结论进行判断.

【解答】解：①图象开口向上，对称轴在 y 轴右侧，能得到： $a > 0$ ， $-\frac{b}{2a} > 0$ ，则 $b < 0$ ，

正确；

② $\because$ 对称轴为直线 $x = 1$ ， $\therefore x = 2$ 与 $x = 0$ 时的函数值相等， $\therefore$ 当 $x = 2$ 时， $y = 4a + 2b + c > 0$ ，错误；

③当 $x = -1$ 时， $y = a - b + c > 0$ ，正确；

④ $\because a - b + c > 0$ ， $\therefore a + c > b$ ； $\because$ 当 $x = 1$ 时， $y = a + b + c < 0$ ， $\therefore a + c < -b$ ； $\therefore b < a + c < -b$ ， $\therefore |a + c| < |b|$ ， $\therefore (a + c)^2 < b^2$ ，正确.

所以正确的结论是①③④.

故选：C.

【点评】本题主要考查二次函数图象与系数之间的关系，会利用对称轴的范围求 $2a$ 与 b 的关系，以及二次函数与方程之间的转换，将 $x = 1, -1, 2$ 代入函数解析式判断 y 的值是解题关键，得出 $b < a + c < -b$ 是本题的难点.

二、填空题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分。请把答案填在各题对应的横线上）

13. **【分析】**先进行二次根式的化简，然后合并同类二次根式即可.

【解答】解：原式 $= 2\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2}$
 $= \frac{3}{2}\sqrt{2}.$

故答案为： $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

【点评】本题考查了二次根式的加减运算，属于基础题，关键是掌握二次根式的化简及同类二次根式的合并.

14. **【分析】**先设成绩为 9 环的人数是 x ，根据加权平均数的计算公式列出方程，求出 x 的值即可.

【解答】解：设成绩为 9 环的人数是 x ，根据题意得：

$$(7 \times 3 + 8 \times 4 + 9 \cdot x) \div (3 + 4 + x) = 8,$$

解得： $x = 3$ ，

则成绩为 9 环的人数是 3；

故答案为：3.

【点评】此题考查了加权平均数，关键是根据加权平均数的计算公式和已知条件列出方程，是一道基础题．

15. 【分析】根据垂径定理可得点 B 是 $\widehat{AC}$ 中点，由圆周角定理可得 $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle BOC$ ，继而得出答案．

【解答】解： $\because OB \perp AC$ ，

$$\therefore \widehat{AB} = \widehat{BC},$$

$$\therefore \angle ADB = \frac{1}{2} \angle BOC = 28^\circ .$$

故答案为：28．

【点评】此题考查了圆周角定理，注意掌握在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角等于这条弧所对的圆心角的一半．

16. 【分析】先根据不等式的基本性质把不等式去分母、去括号、再移项、合并同类项求出 x 的取值范围，再与已知解集相比较即可求出 m 的值．

【解答】解：去分母得， $x - m > 3(3 - m)$ ，

去括号得， $x - m > 9 - 3m$ ，

移项，合并同类项得， $x > 9 - 2m$ ，

$\therefore$ 此不等式的解集为 $x > 1$ ，

$$\therefore 9 - 2m = 1,$$

解得 $m = 4$ ．

故答案为：4．

【点评】考查了解一元一次不等式，解答此题的关键是掌握不等式的性质，

(1) 不等式两边同加（或减）同一个数（或式子），不等号的方向不变；

(2) 不等式两边同乘（或同除以）同一个正数，不等号的方向不变；

(2) 不等式两边同乘（或同除以）同一个负数，不等号的方向改变．

17. 【分析】根据已知条件“ $x_1 < 0 < x_2$ ， $y_1 > y_2$ ”可以推知该反比例函数的图象位于第二、四象限，则 $k - 2 < 0$ ．

【解答】解： $\because (x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 为函数 $y = \frac{k+2}{x}$ 图象上两点，若 $x_1 < 0 < x_2$ ， $y_1 > y_2$ ，

$\therefore$ 该反比例函数的图象位于第二、四象限，

$$\therefore k+2 < 0.$$

解得, $k < -2$.

故填: $k < -2$.

【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征. 根据已知条件推知已知反比例函数图象所经过的象限是解题的难点.

18. 【分析】先根据图形翻折变换的性质得出 $BC = BD$, $\angle BDE = \angle C = 90^\circ$, 再根据 $AD = BD$ 可知 $AB = 2BC$, $AE = BE$, 故 $\angle A = 30^\circ$, 由锐角三角函数的定义可求出 BC 的长, 设 $BE = x$, 则 $CE = 6 - x$, 在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中根据勾股定理即可得出 BE 的长.

【解答】解: $\because \triangle BDE$ 由 $\triangle BCE$ 翻折而成,

$$\therefore BC = BD, \angle BDE = \angle C = 90^\circ,$$

$$\because AD = BD,$$

$$\therefore AB = 2BC, AE = BE,$$

$$\therefore \angle A = 30^\circ,$$

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,

$$\because AC = 6,$$

$$\therefore BC = AC \cdot \tan 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}.$$

设 $BE = x$, 则 $CE = 6 - x$,

在 $\text{Rt}\triangle BCE$ 中,

$$\because BC = 2\sqrt{3}, BE = x, CE = 6 - x,$$

$$\therefore BE^2 = CE^2 + BC^2, \text{ 即 } x^2 = (6 - x)^2 + (2\sqrt{3})^2, \text{ 解得 } x = 4.$$

故答案为: 4.

【点评】本题考查的是图形的翻折变换, 熟知图形翻折不变性的性质是解答此题的关键.

19. 【分析】先求出直线 AB 的解析式, 再根据平移的性质求直线 CD 的解析式.

【解答】解: 设直线 AB 的解析式为 $y = kx + b$,

$$\text{把 } A(0, 2)、\text{点 } B(1, 0) \text{ 代入, 得 } \begin{cases} b=2 \\ k+b=0 \end{cases},$$

$$\text{解得 } \begin{cases} k=-2 \\ b=2 \end{cases},$$

故直线 AB 的解析式为 $y = -2x + 2$;

将这直线向左平移与 x 轴负半轴、 y 轴负半轴分别交于点 C 、点 D , 使 $DB = DC$,

$$\therefore DO \text{ 垂直平分 } BC,$$

$$\therefore OC = OB,$$

∵ 直线 CD 由直线 AB 平移而成,

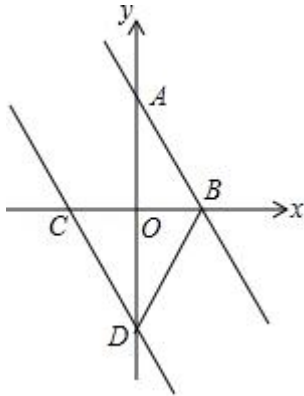
∴ $CD = AB$,

∴ 点 D 的坐标为 $(0, -2)$,

∵ 平移后的图形与原图形平行,

∴ 平移以后的函数解析式为: $y = -2x - 2$.

故答案为: $y = -2x - 2$.



【点评】 本题考查了一次函数图象与几何变换, 要注意利用一次函数的特点, 列出方程组, 求出未知数的值从而求得解析式; 求直线平移后的解析式时要注意平移时 k 的值不变, 只有 b 发生变化.

20. **【分析】** 首先根据旋转的性质得出, $\triangle EBE'$ 是直角三角形, 进而得出 $\angle BEE' = \angle BE'E = 45^\circ$, 即可得出答案.

【解答】 解: 连接 EE'

∵ $\triangle ABE$ 绕点 B 顺时针旋转 90° 到 $\triangle CBE'$

∴ $\angle EBE'$ 是直角, ∴ $\triangle EBE'$ 是直角三角形,

∵ $\triangle ABE$ 与 $\triangle CE'B$ 全等

∴ $BE = BE' = 2$, $\angle AEB = \angle BE'C$

∴ $\angle BEE' = \angle BE'E = 45^\circ$,

∴ $EE'^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, $AE = CE' = 1$, $EC = 3$,

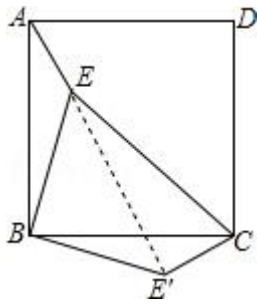
∴ $EC^2 = E'C^2 + EE'^2$,

∴ $\triangle EE'C$ 是直角三角形,

∴ $\angle EE'C = 90^\circ$,

∴ $\angle AEB = 135^\circ$.

故答案为: 135° .



【点评】此题主要考查了旋转的性质，根据已知得出 $\triangle EBE'$ 是直角三角形是解题关键．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 60 分。请将必要的文字说明、计算过程或推理过程写在对应位置）

21. 【分析】（1）根据题意列出图表，得出数字之和共有 12 种结果，其中“和是 3 的倍数”的结果有 4 种，再根据概率公式求出甲获胜的概率；

（2）根据图表（1）得出“和是 4 的倍数”的结果有 3 种，根据概率公式求出乙的概率，再与甲的概率进行比较，得出游戏是否公平．

【解答】解：（1）列表如下：

转盘A 转盘B	1	2	3	4
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)

$\therefore$ 数字之和共有 12 种结果，其中“和是 3 的倍数”的结果有 4 种，

$$\therefore P_{(\text{甲})} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3};$$

（2） $\therefore$ “和是 4 的倍数”的结果有 3 种，

$$\therefore P_{(\text{乙})} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4};$$

$$\therefore \frac{1}{3} \neq \frac{1}{4}, \text{ 即 } P_{(\text{甲})} \neq P_{(\text{乙})},$$

$\therefore$ 这个游戏规则对甲、乙双方不公平．

【点评】此题考查了游戏的公平性，判断游戏公平性就要计算每个事件的概率，概率相等就公平，否则就不公平，用到的知识点为：概率 = 所求情况数与总情况数之比．

22. 【分析】（1）由已知数据解直角三角形 AOB 即可；

（2）首先求出 OA 的长和 OA' 的长，再根据勾股定理求出 OB' 的长即可．

【解答】解：（1）根据题意可知： $AB = 6\sqrt{3}$ ， $\angle ABO = 60^\circ$ ， $\angle AOB = 90^\circ$ ，

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\because \cos \angle ABO = \frac{OB}{AB}$ ，

$$\therefore OB = AB \cos \angle ABO = 6\sqrt{3} \cos 60^\circ = 3\sqrt{3} \text{ 米，}$$

$\therefore OB$ 的长为 $3\sqrt{3}$ 米；

（2）根据题意可知 $A'B' = AB = 6\sqrt{3}$ 米，

在 $\text{Rt}\triangle AOB$ 中， $\because \sin \angle ABO = \frac{OA}{AB}$ ，

$$\therefore OA = AB \sin \angle ABO = 6\sqrt{3} \sin 60^\circ = 9 \text{ 米，}$$

$$\because OA' = OA - AA'， AA' = 1 \text{ 米，}$$

$$\therefore OA' = 8 \text{ 米，}$$

在 $\text{Rt}\triangle A'OB'$ 中， $OB' = 2\sqrt{11}$ 米，

$$\therefore BB' = OB' - OB = (2\sqrt{11} - 3\sqrt{3}) \text{ 米.}$$

【点评】本题考查了勾股定理的应用和特殊角的锐角三角函数，是中考常见题型.

23. 【分析】（1）根据每个工人每天生产的产品个数以及每个产品的利润，表示出总利润即可；

（2）根据每天获取利润为 14400 元，则 $y = 14400$ ，求出即可；

（3）根据每天获取利润不低于 15600 元即 $y \geq 15600$ ，求出即可.

【解答】解：（1）根据题意得出：

$$y = 12x \times 100 + 10(10 - x) \times 180$$

$$= -600x + 18000；$$

（2）当 $y = 14400$ 时，有 $14400 = -600x + 18000$ ，

解得： $x = 6$ ，

故要派 6 名工人去生产甲种产品；

（3）根据题意可得，

$$y \geq 15600，$$

$$\text{即 } -600x + 18000 \geq 15600，$$

解得： $x \leq 4$ ，

则 $10 - x \geq 6$,

故至少要派 6 名工人去生产乙种产品才合适.

【点评】此题主要考查了一次函数的应用以及一元一次不等式的应用等知识, 根据已知得出 y 与 x 之间的函数关系是解题关键.

24. 【分析】(1) 根据圆周角定理得出 $\angle ACD = 90^\circ$ 以及利用 $\angle PAC = \angle PBA$ 得出 $\angle CAD + \angle PAC = 90^\circ$ 进而得出答案;

(2) 首先得出 $\triangle CAG \sim \triangle BAC$, 进而得出 $AC^2 = AG \cdot AB$, 求出 AC 即可;

(3) 先求出 AF 的长, 根据勾股定理得: $AG = \sqrt{AF^2 + GF^2}$, 即可得出 $\sin \angle ADB = \frac{2}{5}\sqrt{5}$,

利用 $\angle ACE = \angle ACB = \angle ADB$, 求出即可.

【解答】(1) 证明: 连接 CD ,

$\because AD$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle ACD = 90^\circ$,

$\therefore \angle CAD + \angle ADC = 90^\circ$,

又 $\because \angle PAC = \angle PBA$, $\angle ADC = \angle PBA$,

$\therefore \angle PAC = \angle ADC$,

$\therefore \angle CAD + \angle PAC = 90^\circ$,

$\therefore PA \perp OA$, 而 AD 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore PA$ 是 $\odot O$ 的切线;

(2) 解: 由 (1) 知, $PA \perp AD$, 又 $\because CF \perp AD$, $\therefore CF \parallel PA$,

$\therefore \angle GCA = \angle PAC$, 又 $\because \angle PAC = \angle PBA$,

$\therefore \angle GCA = \angle PBA$, 而 $\angle CAG = \angle BAC$,

$\therefore \triangle CAG \sim \triangle BAC$,

$$\therefore \frac{AC}{AB} = \frac{AG}{AC},$$

即 $AC^2 = AG \cdot AB$,

$\because AG \cdot AB = 12$,

$\therefore AC^2 = 12$,

$\therefore AC = 2\sqrt{3}$;

(3) 连接 OE ，易证 OE 是 $\triangle BCD$ 的中位线，然后根据 $\triangle FGC$ 是等腰直角三角形，易证 $\triangle EGF \sim \triangle ECD$ ，利用相似三角形的对应边的比相等即可证得。

【解答】(1) 解： $\because \frac{CE}{EB} = \frac{1}{3}$,

$$\therefore \frac{CE}{BC} = \frac{1}{4}.$$

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore AD \parallel BC, AD = BC,$$

$$\therefore \triangle CEF \sim \triangle ADF,$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{CE}{AD},$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEF}}{S_{\triangle CDF}} = \left(\frac{EF}{DF} \right)^2 = \frac{1}{4};$$

(2) 证明： $\because DE$ 平分 $\angle CDB$ ， $\therefore \angle ODF = \angle CDF$ ，

又 $\because AC$ 、 BD 是正方形 $ABCD$ 的对角线。

$$\therefore \angle ADO = \angle FCD = 45^\circ, \angle AOD = 90^\circ, OA = OD, \text{ 而 } \angle ADF = \angle ADO + \angle ODF, \angle AFD$$

$$= \angle FCD + \angle CDF,$$

$$\therefore \angle ADF = \angle AFD, \therefore AD = AF,$$

在直角 $\triangle AOD$ 中，根据勾股定理得： $AD = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{2}OA$ ，

$$\therefore AF = \sqrt{2}OA.$$

(3) 证明：连接 OE 。

$\because$ 点 O 是正方形 $ABCD$ 的对角线 AC 、 BD 的交点。

$\therefore$ 点 O 是 BD 的中点。

又 $\because$ 点 E 是 BC 的中点，

$\therefore OE$ 是 $\triangle BCD$ 的中位线，

$$\therefore OE \parallel CD, OE = \frac{1}{2}CD,$$

$$\therefore \triangle OFE \sim \triangle CFD.$$

$$\therefore \frac{EF}{DF} = \frac{OE}{CD} = \frac{1}{2},$$

$$\therefore \frac{EF}{ED} = \frac{1}{3}.$$

又 $\because FG \perp BC, CD \perp BC,$

$$\therefore FG \parallel CD,$$

$$\therefore \triangle EGF \sim \triangle ECD,$$

$$\therefore \frac{GF}{CD} = \frac{EF}{ED} = \frac{1}{3}.$$

在直角 $\triangle FGC$ 中, $\because \angle GCF = 45^\circ$.

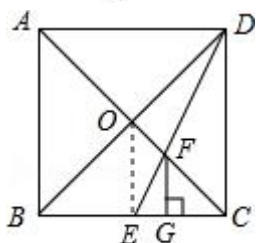
$$\therefore CG = GF,$$

又 $\because CD = BC,$

$$\therefore \frac{GF}{CD} = \frac{CG}{BC} = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \frac{CG}{BG} = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore CG = \frac{1}{2}BG.$$



图③

【点评】 本题是勾股定理、三角形的中位线定理、以及相似三角形的判定与性质的综合应用, 理解正方形的性质是关键.

26. **【分析】** (1) 令 $y = 0$, 解关于 x 的一元二次方程求出 A 、 B 的坐标, 令 $x = 0$ 求出点 C 的坐标, 再根据顶点坐标公式计算即可求出顶点 D 的坐标;

(2) 根据点 A 、 C 的坐标求出 OA 、 OC 的长, 再分 OA 和 OA 是对应边, OA 和 OC 是对应边两种情况, 利用相似三角形对应边成比例列式求出 OP 的长, 从而得解;

(3) ①设直线 l 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), 利用待定系数法求一次函数解析式求出直线 l 的解析式, 再利用中点公式求出点 G 的坐标, 然后根据直线上点的坐标特征验证即可;

②设抛物线的对称轴与 x 轴交点为 H , 求出 OE 、 OF 、 HD 、 HB 的长, 然后求出 $\triangle OEF$ 和 $\triangle HDB$ 相似, 根据相似三角形对应角相等求出 $\angle OFE = \angle HBD$, 然后求出 $EG \perp BD$,

从而得到直线 l 是线段 BD 的垂直平分线，根据线段垂直平分线的性质点 D 关于直线 l 的对称点就是 B ，从而判断出点 M 就是直线 DE 与抛物线的交点，再设直线 DE 的解析式为 $y = mx + n$ ，利用待定系数法求一次函数解析求出直线 DE 的解析式，然后与抛物线解析式联立求解即可得到符合条件的点 M 。

【解答】解：（1）令 $y = 0$ ，则 $x^2 - 3x - \frac{7}{4} = 0$ ，整理得， $4x^2 - 12x - 7 = 0$ ，

$$\text{解得 } x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{7}{2},$$

$$\text{所以, } A(-\frac{1}{2}, 0), B(\frac{7}{2}, 0),$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 则 } y = -\frac{7}{4},$$

$$\text{所以, } C(0, -\frac{7}{4}),$$

$$\therefore -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2 \times 1} = \frac{3}{2}, \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4 \times 1 \times (-\frac{7}{4}) - (-3)^2}{4 \times 1} = -4,$$

$$\therefore \text{顶点 } D(\frac{3}{2}, -4);$$

（2）在 y 轴正半轴上存在符合条件的点 P ，设点 P 的坐标为 $(0, y)$ ，

$$\therefore A(-\frac{1}{2}, 0), C(0, -\frac{7}{4}),$$

$$\therefore OA = \frac{1}{2}, OC = \frac{7}{4}, OP = y,$$

①若 OA 和 OA 是对应边，则 $\triangle AOP \sim \triangle AOC$ ，

$$\therefore \frac{OP}{OC} = \frac{OA}{OA},$$

$$y = OC = \frac{7}{4},$$

$$\text{此时点 } P(0, \frac{7}{4}),$$

②若 OA 和 OC 是对应边，则 $\triangle POA \sim \triangle AOC$ ，

$$\therefore \frac{PO}{OA} = \frac{OA}{OC},$$

$$\text{即 } \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{7}{4}},$$

$$\text{解得 } y = \frac{1}{7},$$

$$\text{此时点 } P(0, \frac{1}{7}),$$

所以, 符合条件的点 P 有两个, $P(0, \frac{7}{4})$ 或 $(0, \frac{1}{7})$;

(3) ①设直线 l 的解析式为 $y = kx + b$ ($k \neq 0$),

$\because$ 直线 l 经过点 $E(-\frac{3}{2}, 0)$ 和点 $F(0, -\frac{3}{4})$,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{3}{2}k + b = 0 \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{4} \end{cases},$$

所以, 直线 l 的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$,

$$\because B(\frac{7}{2}, 0), D(\frac{3}{2}, -4),$$

$$\frac{1}{2}(\frac{7}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{5}{2}, \frac{1}{2}[0 + (-4)] = -2,$$

$\therefore$ 线段 BD 的中点 G 的坐标为 $(\frac{5}{2}, -2)$,

$$\text{当 } x = \frac{5}{2} \text{ 时, } y = -\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} - \frac{3}{4} = -2,$$

所以, 点 G 在直线 l 上;

②在抛物线上存在符合条件的点 M .

设抛物线的对称轴与 x 轴交点为 H , 则点 H 的坐标为 $(\frac{3}{2}, 0)$,

$$\because E(-\frac{3}{2}, 0), F(0, -\frac{3}{4}), B(\frac{7}{2}, 0), D(\frac{3}{2}, -4),$$

$$\therefore OE = \frac{3}{2}, OF = \frac{3}{4}, HD = 4, HB = \frac{7}{2} - \frac{3}{2} = 2,$$

$$\therefore \frac{OF}{OE} = \frac{HB}{HD} = \frac{1}{2}, \angle EOF = \angle BDH = 90^\circ$$

$$\therefore \triangle OEF \sim \triangle HDB,$$

$$\therefore \angle OFE = \angle HBD,$$

$$\because \angle OEF + \angle OFE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle OEF + \angle HBD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EGB = 180^\circ - (\angle OEF + \angle HBD) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ,$$

$\therefore$ 直线 l 是线段 BD 的垂直平分线,

$\therefore$ 点 D 关于直线 l 的对称点就是点 B ,

$\therefore$ 点 M 就是直线 DE 与抛物线的交点,

设直线 DE 的解析式为 $y = mx + n$,

$$\because D\left(\frac{3}{2}, -4\right), E\left(-\frac{3}{2}, 0\right),$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{3}{2}m + n = -4 \\ -\frac{3}{2}m + n = 0 \end{cases},$$

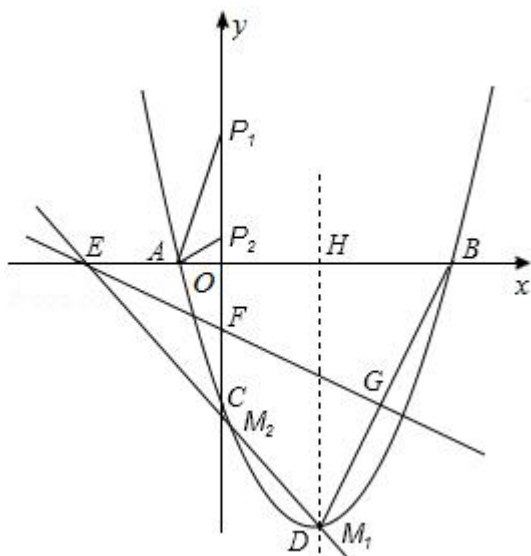
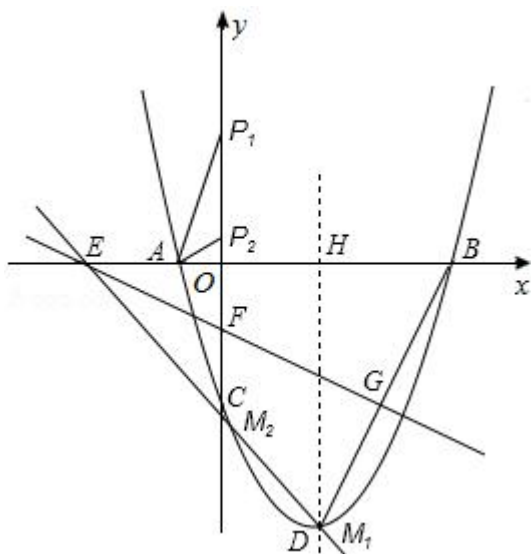
$$\text{解得} \begin{cases} m = -\frac{4}{3} \\ n = -2 \end{cases},$$

所以, 直线 DE 的解析式为 $y = -\frac{4}{3}x - 2$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = -\frac{4}{3}x - 2 \\ y = x^2 - 3x - \frac{7}{4} \end{cases},$$

$$\text{解得} \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ y_1 = -4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = \frac{1}{6} \\ y_2 = -\frac{20}{9} \end{cases},$$

$\therefore$ 符合条件的点 M 有两个, 是 $(\frac{3}{2}, -4)$ 或 $(\frac{1}{6}, -\frac{20}{9})$.



【点评】本题是二次函数综合题型，主要考查了抛物线与坐标轴的交点的求解，求顶点坐标，待定系数法求一次函数解析式，点在直线上的验证，相似三角形的判定与性质，联立两函数解析式求交点坐标的方法，综合性较强，难度较大，（2）要根据对应边的不同分情况讨论，（3）求出直线 l 是线段 BD 的垂直平分线是解题的关键．