

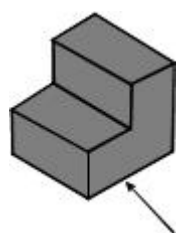
云南省曲靖市 2018 年中考数学真题试题

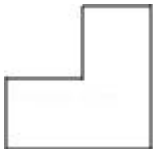
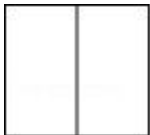
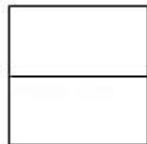
一、选择题（共 8 题，每题 4 分）

1. (4 分) -2 的绝对值是 ()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

2. (4 分) 如图所示的支架（一种小零件）的两个台阶的高度和宽度相等，则它的左视图为 ()



- A.  B.  C.  D. 

3. (4 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a = a^2$ B. $a^6 \div a^2 = a^3$
C. $a^2b - 2ba^2 = -a^2b$ D. $(-\frac{3}{2a})^3 = -\frac{9}{8a^3}$

4. (4 分) 截止 2018 年 5 月末，中国人民银行公布的数据显示，我国外汇的储备规模约为 3.11×10^4 亿元美元，则 3.11×10^4 亿表示的原数为 ()

- A. 2311000 亿 B. 31100 亿 C. 3110 亿 D. 311 亿

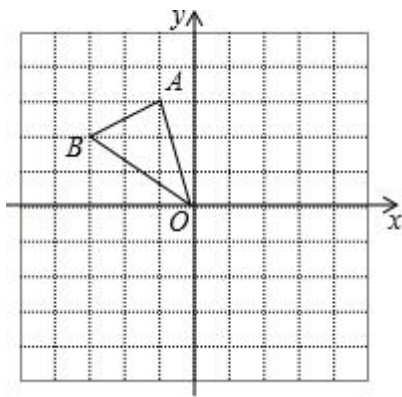
5. (4 分) 若一个正多边形的内角和为 720° ，则这个正多边形的每一个内角是 ()

- A. 60° B. 90° C. 108° D. 120°

6. (4 分) 下列二次根式中能与 $2\sqrt{3}$ 合并的是 ()

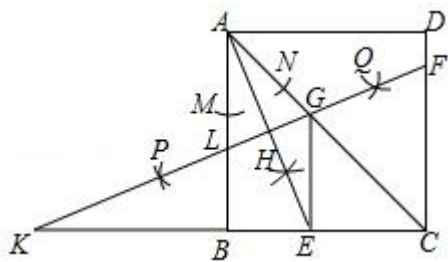
- A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ C. $\sqrt{18}$ D. $\sqrt{9}$

7. (4 分) 如图，在平面直角坐标系中，将 $\triangle OAB$ （顶点为网格线交点）绕原点 O 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle OA'B'$ ，若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象经过点 A 的对应点 A' ，则 k 的值为 ()



A. 6 B. -3 C. 3 D. 6

8. (4分) 如图, 在正方形 ABCD 中, 连接 AC, 以点 A 为圆心, 适当长为半径画弧, 交 AB、AC 于点 M, N, 分别以 M, N 为圆心, 大于 MN 长的一半为半径画弧, 两弧交于点 H, 连接 AH 并延长交 BC 于点 E, 再分别以 A、E 为圆心, 以大于 AE 长的一半为半径画弧, 两弧交于点 P, Q, 作直线 PQ, 分别交 CD, AC, AB 于点 F, G, L, 交 CB 的延长线于点 K, 连接 GE, 下列结论: ① $\angle LKB = 22.5^\circ$, ② $GE \parallel AB$, ③ $\tan \angle CGF = \frac{KB}{LB}$, ④ $S_{\triangle CGE} : S_{\triangle CAB} = 1 : 4$. 其中正确的是 ()

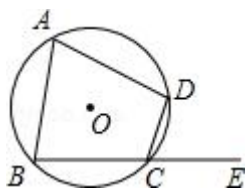


A. ①②③ B. ②③④ C. ①③④ D. ①②④

二、填空题 (共 6 题, 每题 3 分)

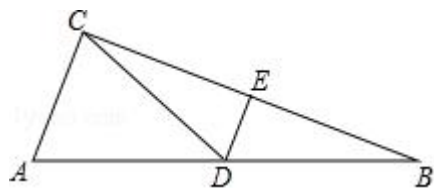
9. (3分) 如果水位升高 2m 时, 水位的变化记为 +2m, 那么水位下降 3m 时, 水位的变化情况是_____.

10. (3分) 如图: 四边形 ABCD 内接于 $\odot O$, E 为 BC 延长线上一点, 若 $\angle A = n^\circ$, 则 $\angle DCE = \underline{\hspace{2cm}}^\circ$.



11. (3分) 如图: 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 13$, $BC = 12$, 点 D, E 分别是 AB, BC 的中点, 连接

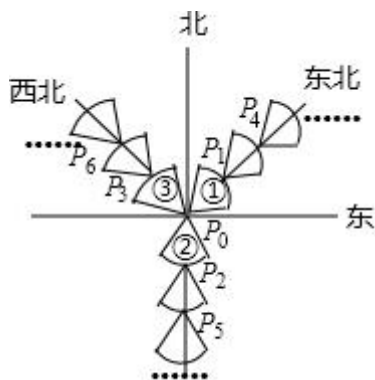
DE, CD, 如果 $DE=2.5$, 那么 $\triangle ACD$ 的周长是_____.



12. (3分) 关于 x 的方程 $ax^2+4x-2=0$ ($a \neq 0$) 有实数根, 那么负整数 $a=$ _____ (一个即可).

13. (3分) 一个书包的标价为 115 元, 按 8 折出售仍可获利 15%, 该书包的进价为_____元.

14. (3分) 如图: 图象①②③均是以 P_0 为圆心, 1 个单位长度为半径的扇形, 将图形①②③分别沿东北, 正南, 西北方向同时平移, 每次移动一个单位长度, 第一次移动后图形①②③的圆心依次为 $P_1P_2P_3$, 第二次移动后图形①②③的圆心依次为 $P_4P_5P_6$..., 依此规律, $P_0P_{2018}=$ 个单位长度.



三、解答题

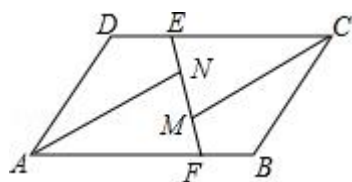
15. (5分) 计算 $-(-2) + (\pi - 3.14)^0 + \sqrt[3]{27} + (-\frac{1}{3})^{-1}$

16. 先化简, 再求值 $(\frac{1}{a-b} - \frac{b}{a^2-b^2}) \div \frac{a^2-ab}{a^2-2ab+b^2}$, 其中 a, b 满足 $a+b - \frac{1}{2} = 0$.

17. 如图: 在平行四边形 ABCD 的边 AB, CD 上截取 AF, CE, 使得 $AF=CE$, 连接 EF, 点 M, N 是线段 EF 上两点, 且 $EM=FN$, 连接 AN, CM.

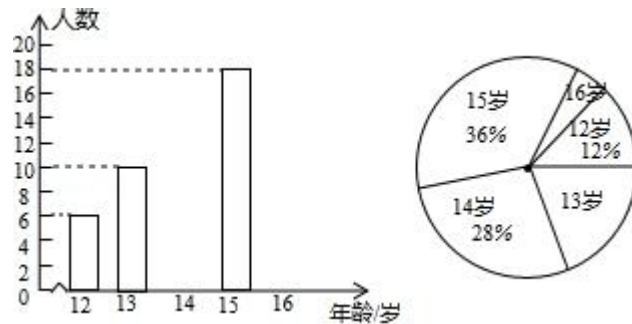
(1) 求证: $\triangle AFN \cong \triangle CEM$;

(2) 若 $\angle CMF = 107^\circ$, $\angle CEM = 72^\circ$, 求 $\angle NAF$ 的度数.



18. 甲乙两人做某种机械零件，已知甲每小时比乙多做 4 个，甲做 120 个所用的时间与乙做 100 个所用的时间相等，求甲乙两人每小时各做几个零件？

19. 某初级中学数学兴趣小组为了了解本校学生的年龄情况，随机调查了该校部分学生的年龄，整理数据并绘制如下不完整的统计图.



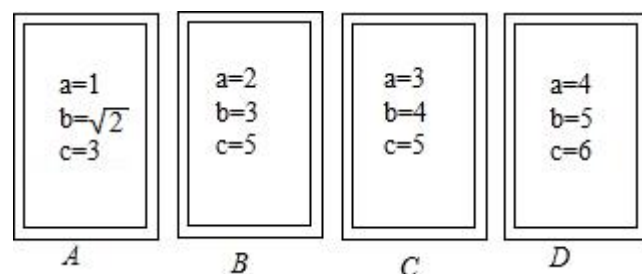
依据以上信息解答以下问题:

- (1) 求样本容量;
- (2) 直接写出样本容量的平均数，众数和中位数;
- (3) 若该校一共有 1800 名学生，估计该校年龄在 15 岁及以上的学生人数.

20. 某公司计划购买 A, B 两种型号的电脑，已知购买一台 A 型电脑需 0.6 万元，购买一台 B 型电脑需 0.4 万元，该公司准备投入资金 y 万元，全部用于购进 35 台这两种型号的电脑，设购进 A 型电脑 x 台.

- (1) 求 y 关于 x 的函数解析式;
- (2) 若购进 B 型电脑的数量不超过 A 型电脑数量的 2 倍，则该公司至少需要投入资金多少万元?

21. 数学课上，李老师准备了四张背面看上去无差别的卡片 A, B, C, D，每张卡片的正面标有字母 a , b , c 表示三条线段 (如图)，把四张卡片背面朝上放在桌面上，李老师从这四张卡片中随机抽取一张卡片后不放回，再随机抽取一张.



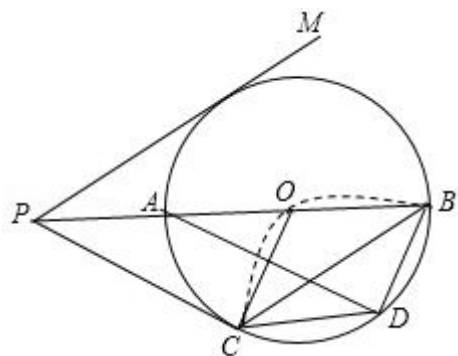
- (1) 用树状图或者列表表示所有可能出现的结果;
- (2) 求抽取的两张卡片中每张卡片上的三条线段都能组成三角形的概率.

22. 如图，AB 为 $\odot O$ 的直径，点 C 为 $\odot O$ 上一点，将弧 BC 沿直线 BC 翻折，使弧 BC 的中

点 D 恰好与圆心 O 重合, 连接 OC, CD, BD, 过点 C 的切线与线段 BA 的延长线交于点 P, 连接 AD, 在 PB 的另一侧作 $\angle MPB = \angle ADC$.

(1) 判断 PM 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 若 $PC = \sqrt{3}$, 求四边形 OCDB 的面积.

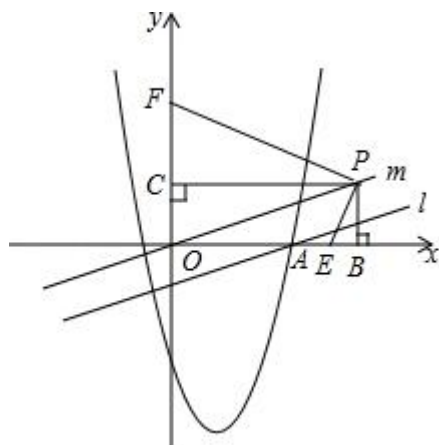


23. 如图: 在平面直角坐标系中, 直线 $l: y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ 与 x 轴交于点 A, 经过点 A 的抛物线 $y = ax^2 - 3x + c$ 的对称轴是 $x = \frac{3}{2}$.

(1) 求抛物线的解析式;

(2) 平移直线 l 经过原点 O, 得到直线 m , 点 P 是直线 m 上任意一点, $PB \perp x$ 轴于点 B, $PC \perp y$ 轴于点 C, 若点 E 在线段 OB 上, 点 F 在线段 OC 的延长线上, 连接 PE, PF, 且 $PE = 3PF$. 求证: $PE \perp PF$;

(3) 若 (2) 中的点 P 坐标为 (6, 2), 点 E 是 x 轴上的点, 点 F 是 y 轴上的点, 当 $PE \perp PF$ 时, 抛物线上是否存在点 Q, 使四边形 PEQF 是矩形? 如果存在, 请求出点 Q 的坐标, 如果不存在, 请说明理由.



参考答案与试题解析

一、选择题（共 8 题，每题 4 分）

1. (4 分) -2 的绝对值是 ()

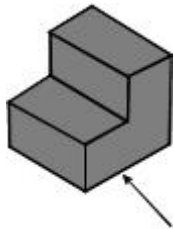
- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

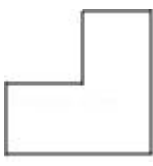
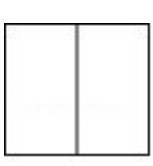
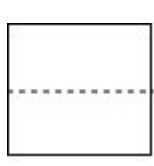
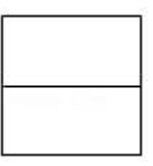
【解答】解： -2 的绝对值是 2，

即 $|-2|=2$ 。

故选：A。

2. (4 分) 如图所示的支架（一种小零件）的两个台阶的高度和宽度相等，则它的左视图为 ()



- A.  B.  C.  D. 

【解答】解：从左面看去，是两个有公共边的矩形，如图所示：



故选：D。

3. (4 分) 下列计算正确的是 ()

- A. $a^2 \cdot a = a^2$ B. $a^6 \div a^2 = a^3$
C. $a^2b - 2ba^2 = -a^2b$ D. $(-\frac{3}{2a})^3 = -\frac{9}{8a^3}$

【解答】解：A、原式 $= a^3$ ，不符合题意；

B、原式 $= a^4$ ，不符合题意；

C、原式 $= -a^2b$ ，符合题意；

D、原式 $= -\frac{27}{8a^3}$ ，不符合题意，

故选：C.

4. (4分) 截止2018年5月末，中国人民银行公布的数据显示，我国外汇的储备规模约为 3.11×10^4 亿元美元，则 3.11×10^4 亿表示的原数为（ ）

A. 2311000 亿 B. 31100 亿 C. 3110 亿 D. 311 亿

【解答】解： 3.11×10^4 亿=31100 亿

故选：B.

5. (4分) 若一个正多边形的内角和为 720° ，则这个正多边形的每一个内角是（ ）

A. 60° B. 90° C. 108° D. 120°

【解答】解： $(n-2) \times 180^\circ = 720^\circ$ ，

$\therefore n-2=4$ ，

$\therefore n=6$.

则这个正多边形的每一个内角为 $720^\circ \div 6 = 120^\circ$.

故选：D.

6. (4分) 下列二次根式中能与 $2\sqrt{3}$ 合并的是（ ）

A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ C. $\sqrt{18}$ D. $\sqrt{9}$

【解答】解：A、 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ ，不能与 $2\sqrt{3}$ 合并，错误；

B、 $\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 能与 $2\sqrt{3}$ 合并，正确；

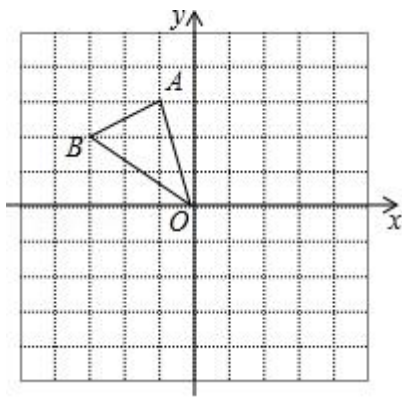
C、 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$ 不能与 $2\sqrt{3}$ 合并，错误；

D、 $\sqrt{9}=3$ 不能与 $2\sqrt{3}$ 合并，错误；

故选：B.

7. (4分) 如图，在平面直角坐标系中，将 $\triangle OAB$ （顶点为网格线交点）绕原点O顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle OA'B'$ ，若反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点A的对应点A'，则k的值为

（ ）



A. 6 B. -3 C. 3 D. 6

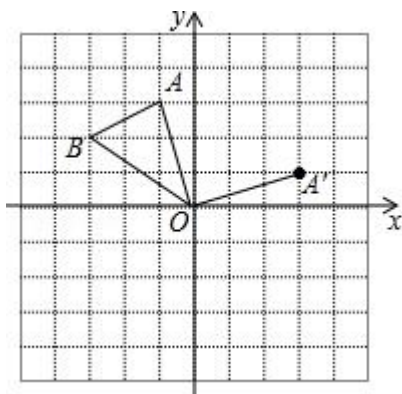
【解答】解：如图所示：∵将 $\triangle OAB$ （顶点为网格线交点）绕原点 O 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle OA'B'$ ，反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 A 的对应点 A' ，

∴ $A' (3, 1)$ ，

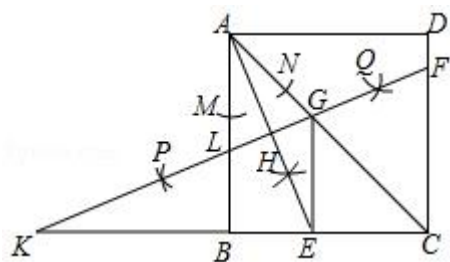
则把 A' 代入 $y=\frac{k}{x}$ ，

解得： $k=3$ 。

故选：C。



8. (4分) 如图，在正方形 $ABCD$ 中，连接 AC ，以点 A 为圆心，适当长为半径画弧，交 AB 、 AC 于点 M 、 N ，分别以 M 、 N 为圆心，大于 MN 长的一半为半径画弧，两弧交于点 H ，连结 AH 并延长交 BC 于点 E ，再分别以 A 、 E 为圆心，以大于 AE 长的一半为半径画弧，两弧交于点 P 、 Q ，作直线 PQ ，分别交 CD 、 AC 、 AB 于点 F 、 G 、 L ，交 CB 的延长线于点 K ，连接 GE ，下列结论：① $\angle LKB=22.5^\circ$ ，② $GE\parallel AB$ ，③ $\tan\angle CGF=\frac{KB}{LB}$ ，④ $S_{\triangle CGE}:S_{\triangle CAB}=1:4$ 。其中正确的是（ ）



- A. ①②③ B. ②③④ C. ①③④ D. ①②④

【解答】解：①∵ 四边形 ABCD 是正方形，

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BAD = 45^\circ,$$

由作图可知：AE 平分 $\angle BAC$ ，

$$\therefore \angle BAE = \angle CAE = 22.5^\circ,$$

∵ PQ 是 AE 的中垂线，

$$\therefore AE \perp PQ,$$

$$\therefore \angle AOL = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AOL = \angle LBK = 90^\circ, \quad \angle ALO = \angle KLB,$$

$$\therefore \angle LKB = \angle BAE = 22.5^\circ;$$

故①正确；

②∵ OG 是 AE 的中垂线，

$$\therefore AG = EG,$$

$$\therefore \angle AEG = \angle EAG = 22.5^\circ = \angle BAE,$$

$$\therefore EG \parallel AB,$$

故②正确；

③∵ $\angle LAO = \angle GAO$, $\angle AOL = \angle AOG = 90^\circ$,

$$\therefore \angle ALO = \angle AGO,$$

$$\therefore \angle CGF = \angle AGO, \quad \angle BLK = \angle ALO,$$

$$\therefore \angle CGF = \angle BLK,$$

在 $\text{Rt} \triangle BKL$ 中， $\tan \angle CGF = \tan \angle BLK = \frac{BK}{BL}$,

故③正确；

④连接 EL，

$$\therefore AL = AG = EG, \quad EG \parallel AB,$$

∴ 四边形 ALEG 是菱形,

∴ $AL=EL=EG > BL$,

$$\therefore \frac{EG}{AB} \neq \frac{1}{2},$$

∵ $EG \parallel AB$,

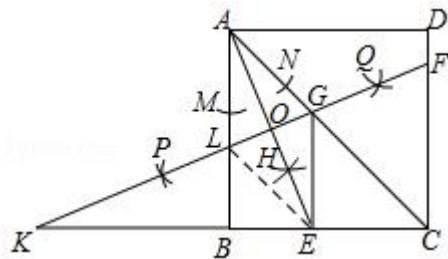
∴ $\triangle CEG \sim \triangle CBA$,

$$\therefore \frac{S_{\triangle CEG}}{S_{\triangle CBA}} = \left(\frac{EG}{AB}\right)^2 \neq \frac{1}{4},$$

故④不正确;

本题正确的是: ①②③,

故选: A.



二、填空题 (共 6 题, 每题 3 分)

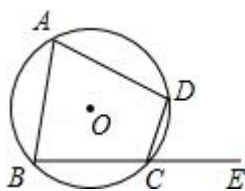
9. (3 分) 如果水位升高 2m 时, 水位的变化记为+2m, 那么水位下降 3m 时, 水位的变化情况是 -3m.

【解答】 解: ∵ 水位升高 2m 时水位变化记作+2m,

∴ 水位下降 3m 时水位变化记作 - 3m.

故答案是: - 3m.

10. (3 分) 如图: 四边形 ABCD 内接于⊙O, E 为 BC 延长线上一点, 若 $\angle A = n^\circ$, 则 $\angle DCE =$ n $^\circ$.



【解答】 解: ∵ 四边形 ABCD 是⊙O 的内接四边形,

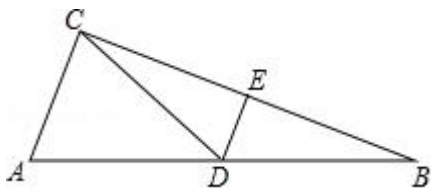
$$\therefore \angle A + \angle DCB = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle DCE + \angle DCB = 180^\circ$$

$$\therefore \angle DCE = \angle A = n^\circ$$

故答案为：n

11. (3分) 如图：在 $\triangle ABC$ 中， $AB=13$ ， $BC=12$ ，点D，E分别是AB，BC的中点，连接DE，CD，如果 $DE=2.5$ ，那么 $\triangle ACD$ 的周长是18。



【解答】解： $\because$ D，E 分别是 AB，BC 的中点，

$$\therefore AC = 2DE = 5, AC \parallel DE,$$

$$AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169,$$

$$AB^2 = 13^2 = 169,$$

$$\therefore AC^2 + BC^2 = AB^2,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ,$$

$$\because AC \parallel DE,$$

$$\therefore \angle DEB = 90^\circ, \text{ 又} \because E \text{ 是 } BC \text{ 的中点},$$

$$\therefore \text{直线 } DE \text{ 是线段 } BC \text{ 的垂直平分线},$$

$$\therefore DC = BD,$$

$$\therefore \triangle ACD \text{ 的周长} = AC + AD + CD = AC + AD + BD = AC + AB = 18,$$

故答案为：18.

12. (3分) 关于x的方程 $ax^2 + 4x - 2 = 0$ ($a \neq 0$) 有实数根，那么负整数 $a = \underline{-2}$ (一个即可).

【解答】解： $\because$ 关于x的方程 $ax^2 + 4x - 2 = 0$ ($a \neq 0$) 有实数根，

$$\therefore \Delta = 4^2 + 8a \geq 0,$$

$$\text{解得 } a \geq -2,$$

$$\therefore \text{负整数 } a = -1 \text{ 或 } -2.$$

故答案为 - 2.

13. (3 分) 一个书包的标价为 115 元, 按 8 折出售仍可获利 15%, 该书包的进价为 80 元.

【解答】解: 设该书包的进价为 x 元,

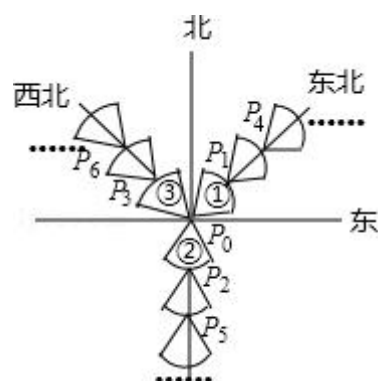
根据题意得: $115 \times 0.8 - x = 15\%x$,

解得: $x = 80$.

答: 该书包的进价为 80 元.

故答案为: 80.

14. (3 分) 如图: 图象①②③均是以 P_0 为圆心, 1 个单位长度为半径的扇形, 将图形①②③分别沿东北, 正南, 西北方向同时平移, 每次移动一个单位长度, 第一次移动后图形①②③的圆心依次为 $P_1P_2P_3$, 第二次移动后图形①②③的圆心依次为 $P_4P_5P_6$..., 依此规律, $P_0P_{2018} =$ 673 个单位长度.



【解答】解: 由图可得, $P_0P_1=1$, $P_0P_2=1$, $P_0P_3=1$;

$P_0P_4=2$, $P_0P_5=2$, $P_0P_6=2$;

$P_0P_7=3$, $P_0P_8=3$, $P_0P_9=3$;

$\therefore 2018 = 3 \times 672 + 2$,

$\therefore$ 点 P_{2018} 在正南方向上,

$\therefore P_0P_{2018} = 672 + 1 = 673$,

故答案为: 673.

三、解答题

15. (5 分) 计算 $-(-2) + (\pi - 3.14)^0 + \sqrt[3]{27} + (-\frac{1}{3})^{-1}$

【解答】解：原式=2+1+3-3

=3.

16. 先化简，再求值 $(\frac{1}{a-b} - \frac{b}{a^2-b^2}) \div \frac{a^2-ab}{a^2-2ab+b^2}$ ，其中 a, b 满足 $a+b - \frac{1}{2} = 0$.

【解答】解：原式 = $\frac{a+b-b}{(a+b)(a-b)} \cdot \frac{(a-b)^2}{a(a-b)} = \frac{1}{a+b}$,

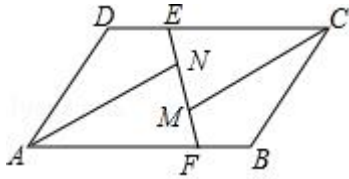
由 $a+b - \frac{1}{2} = 0$ ，得到 $a+b = \frac{1}{2}$,

则原式=2.

17. 如图：在平行四边形 ABCD 的边 AB, CD 上截取 AF, CE, 使得 AF=CE, 连接 EF, 点 M, N 是线段 EF 上两点, 且 EM=FN, 连接 AN, CM.

(1) 求证: $\triangle AFN \cong \triangle CEM$;

(2) 若 $\angle CMF = 107^\circ$, $\angle CEM = 72^\circ$, 求 $\angle NAF$ 的度数.



【解答】(1) 证明: $\because$ 四边形 ABCD 是平行四边形,

$\therefore CD \parallel AB$,

$\therefore \angle AFN = \angle CEM$,

$\because FN = EM$, $AF = CE$,

$\therefore \triangle AFN \cong \triangle CEM$ (SAS).

(2) 解: $\because \triangle AFN \cong \triangle CEM$,

$\therefore \angle NAF = \angle ECM$,

$\because \angle CMF = \angle CEM + \angle ECM$,

$\therefore 107^\circ = 72^\circ + \angle ECM$,

$\therefore \angle ECM = 35^\circ$,

$\therefore \angle NAF = 35^\circ$.

18. 甲乙两人做某种机械零件，已知甲每小时比乙多做 4 个，甲做 120 个所用的时间与乙做 100 个所用的时间相等，求甲乙两人每小时各做几个零件？

【解答】解：设甲每小时做 x 个零件，则乙每小时做 $(x-4)$ 个零件，

根据题意得： $\frac{120}{x} = \frac{100}{x-4}$,

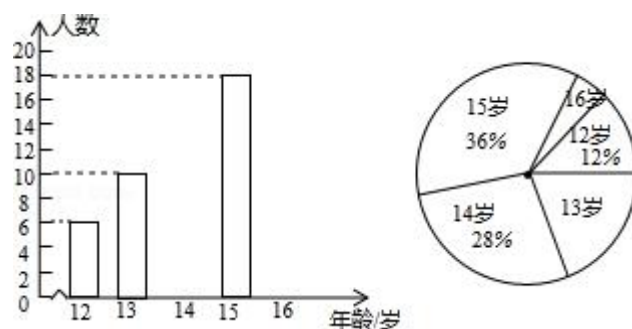
解得： $x=24$,

经检验， $x=24$ 是分式方程的解，

$\therefore x-4=20$.

答：甲每小时做 24 个零件，乙每小时做 20 个零件.

19. 某初级中学数学兴趣小组为了了解本校学生的年龄情况，随机调查了该校部分学生的年龄，整理数据并绘制如下不完整的统计图.



依据以上信息解答以下问题：

- (1) 求样本容量；
- (2) 直接写出样本容量的平均数，众数和中位数；
- (3) 若该校一共有 1800 名学生，估计该校年龄在 15 岁及以上的学生人数.

【解答】解：(1) 样本容量为 $6 \div 12\% = 50$ ；

(2) 14 岁的人数为 $50 \times 28\% = 14$ 、16 岁的人数为 $50 - (6+10+14+18) = 2$ ，
则这组数据的平均数为 $\frac{12 \times 6 + 13 \times 10 + 14 \times 14 + 15 \times 18 + 16 \times 2}{50} = 14$ (岁)，

中位数为 $\frac{14+14}{2} = 14$ (岁)，众数为 15 岁；

(3) 估计该校年龄在 15 岁及以上的学生人数为 $1800 \times \frac{18+2}{50} = 720$ 人.

20. 某公司计划购买 A, B 两种型号的电脑, 已知购买一台 A 型电脑需 0.6 万元, 购买一台 B 型电脑需 0.4 万元, 该公司准备投入资金 y 万元, 全部用于购进 35 台这两种型号的电脑, 设购进 A 型电脑 x 台.

(1) 求 y 关于 x 的函数解析式;

(2) 若购进 B 型电脑的数量不超过 A 型电脑数量的 2 倍, 则该公司至少需要投入资金多少万元?

【解答】 解: (1) 由题意得, $0.6x + 0.4 \times (35 - x) = y$,

整理得, $y = 0.2x + 14$ ($0 < x < 35$);

(2) 由题意得, $35 - x \leq 2x$,

解得, $x \geq \frac{35}{3}$,

则 x 的最小整数为 12,

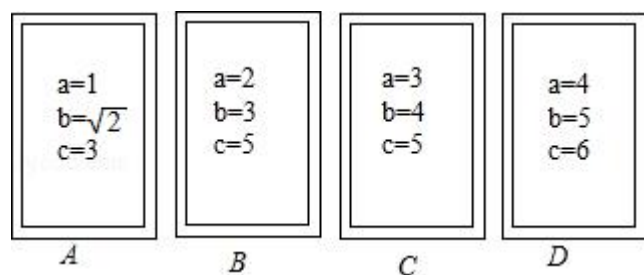
$\because k = 0.2 > 0$,

$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,

$\therefore$ 当 $x = 12$ 时, y 有最小值 16.4,

答: 该公司至少需要投入资金 16.4 万元.

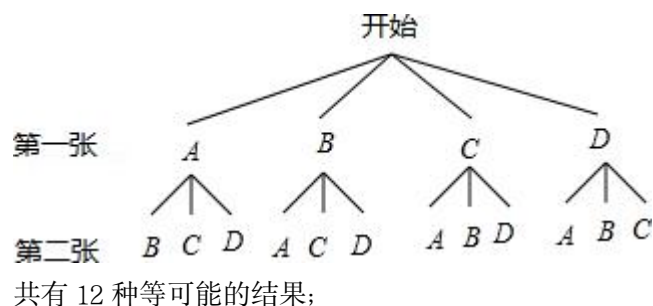
21. 数学课上, 李老师准备了四张背面看上去无差别的卡片 A, B, C, D, 每张卡片的正面标有字母 a, b, c 表示三条线段 (如图), 把四张卡片背面朝上放在桌面上, 李老师从这四张卡片中随机抽取一张卡片后不放回, 再随机抽取一张.



(1) 用树状图或者列表表示所有可能出现的结果;

(2) 求抽取的两张卡片中每张卡片上的三条线段都能组成三角形的概率.

【解答】 解: (1) 由题意可得,



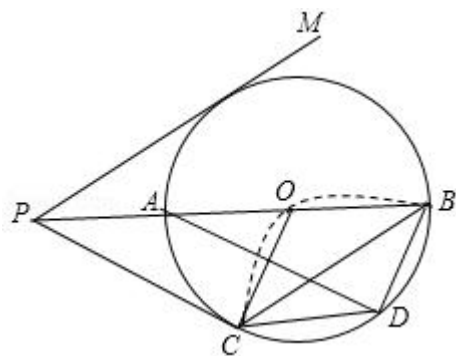
(2) $\because$ 共有 12 种等可能结果, 其中抽取的两张卡片中每张卡片上的三条线段都能组成三角形有 2 种结果,

$\therefore$ 抽取的两张卡片中每张卡片上的三条线段都能组成三角形的概率为 $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

22. 如图, AB 为 $\odot O$ 的直径, 点 C 为 $\odot O$ 上一点, 将弧 BC 沿直线 BC 翻折, 使弧 BC 的中点 D 恰好与圆心 O 重合, 连接 OC, CD, BD, 过点 C 的切线与线段 BA 的延长线交于点 P, 连接 AD, 在 PB 的另一侧作 $\angle MPB = \angle ADC$.

(1) 判断 PM 与 $\odot O$ 的位置关系, 并说明理由;

(2) 若 $PC = \sqrt{3}$, 求四边形 OCDB 的面积.



【解答】 解: (1) PM 与 $\odot O$ 相切.

理由如下:

连接 DO 并延长交 PM 于 E, 如图,

$\because$ 弧 BC 沿直线 BC 翻折, 使弧 BC 的中点 D 恰好与圆心 O 重合,

$\therefore OC = DC, BO = BD,$

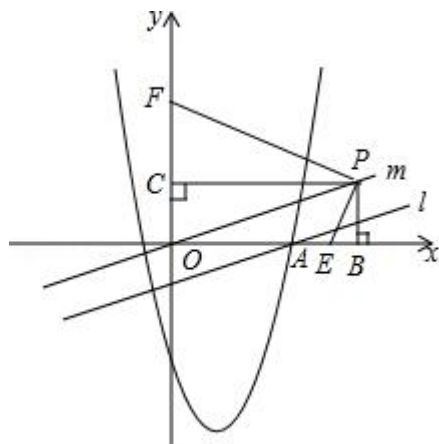
$\therefore OC = DC = BO = BD,$

$\therefore$ 四边形 OBDC 为菱形,

$\therefore OD \perp BC,$

PC ⊥ y 轴于点 C, 若点 E 在线段 OB 上, 点 F 在线段 OC 的延长线上, 连接 PE, PF, 且 PE=3PF. 求证: PE ⊥ PF;

(3) 若 (2) 中的点 P 坐标为 (6, 2), 点 E 是 x 轴上的点, 点 F 是 y 轴上的点, 当 PE ⊥ PF 时, 抛物线上是否存在点 Q, 使四边形 PEQF 是矩形? 如果存在, 请求出点 Q 的坐标, 如果不存在, 请说明理由.



【解答】解: (1) 当 $y=0$ 时, $\frac{1}{3}x - \frac{4}{3}=0$, 解得 $x=4$, 即 A (4, 0), 抛物线过点 A, 对称轴

是 $x=\frac{3}{2}$, 得 $\begin{cases} 16a-12+c=0 \\ -\frac{3}{2a}=\frac{3}{2} \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a=1 \\ c=-4 \end{cases}$, 抛物线的解析式为 $y=x^2-3x-4$;

(2) $\because$ 平移直线 l 经过原点 O, 得到直线 m,

$\therefore$ 直线 m 的解析式为 $y=\frac{1}{3}x$.

$\because$ 点 P 是直线 l 上任意一点,

$\therefore$ 设 P (3a, a), 则 PC=3a, PB=a.

又 $\because PE=3PF$,

$$\therefore \frac{PC}{PF} = \frac{PB}{PE}.$$

$\therefore \angle FPC = \angle EPB$.

$\because \angle CPE + \angle EPB = 90^\circ$,

$\therefore \angle FPC + \angle CPE = 90^\circ$,

$\therefore FP \perp PE$.

(3) 如图所示, 点 E 在点 B 的左侧时, 设 E (a, 0), 则 BE=6-a.

$$\therefore F(0, 20 - 3a).$$

$\because$ PEQF 为矩形,

$$\therefore \frac{Q_x + P_x}{2} = \frac{F_x + E_x}{2}, \quad \frac{Q_y + P_y}{2} = \frac{F_y + E_y}{2},$$

$$\therefore Q_x + 6 = 0 + a, \quad Q_y + 2 = 20 - 3a + 0,$$

$$\therefore Q_x = a - 6, \quad Q_y = 18 - 3a.$$

将点 Q 的坐标代入抛物线的解析式得: $18 - 3a = (a - 6)^2 - 3(a - 6) - 4$, 解得: $a = 8$ 或 $a = 4$ (舍去).

$$\therefore Q(2, -6).$$

综上所述, 点 Q 的坐标为 $(-2, 6)$ 或 $(2, -6)$.