

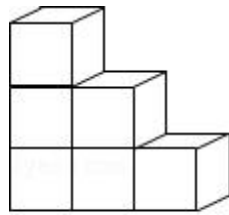
2012 年云南省昆明市中考数学试卷

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分) (2012•云南) 5 的相反数是 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. -5 C. $-\frac{1}{5}$ D. 5

2. (3 分) (2012•云南) 如图是由 6 个形同的小正方体搭成的一个几何体，则它的俯视图是 ()



正面

- A. B. C. D.

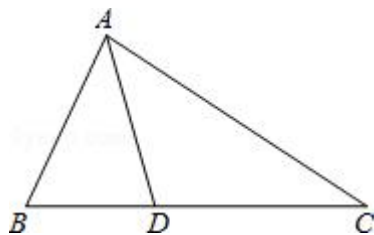
3. (3 分) (2012•云南) 下列运算正确的是 ()

- A. $x^2 \cdot x^3 = x^6$ B. $3^{-2} = -6$ C. $(x^3)^2 = x^5$ D. $4^0 = 1$

4. (3 分) (2012•云南) 不等式组 $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 3x > 2x-4 \end{cases}$ 的解集是 ()

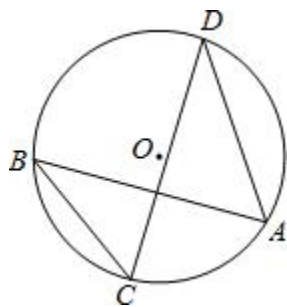
- A. $x < 1$ B. $x > -4$ C. $-4 < x < 1$ D. $x > 1$

5. (3 分) (2012•云南) 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 67^\circ$ ， $\angle C = 33^\circ$ ，AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线，则 $\angle CAD$ 的度数为 ()



- A. 40° B. 45° C. 50° D. 55°

6. (3 分) (2012•云南) 如图，AB、CD 是 $\odot O$ 的两条弦，连接 AD、BC. 若 $\angle BAD = 60^\circ$ ，则 $\angle BCD$ 的度数为 ()



A. 40° B. 50° C. 60° D. 70°

7. (3分) (2012•云南) 我省五个5A级旅游景区门票票价如下表所示(单位: 元) 关于这五个里边有景区门票票价, 下列说法中错误的是 ()

景区名称	石林	玉龙雪山	丽江古城	大理三塔文化旅游区	西双版纳热带植物园
票价(元)	175	105	80	121	80

A. 平均数是120 B. 中位数是105 C. 众数是80 D. 极差是95

8. (3分) (2012•云南) 若 $a^2 - b^2 = \frac{1}{4}$, $a - b = \frac{1}{2}$, 则 $a + b$ 的值为 ()

A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

二、填空题(共6小题, 每小题3分, 满分18分)

9. (3分) (2012•云南) 国家统计局发布第六次全国人口普查主要数据公布报告显示: 云南省常住人口约为45960000人. 这个数据用科学记数法可表示为_____人.

10. (3分) (2012•云南) 写出一个大于2小于4的无理数: _____.

11. (3分) (2012•云南) 因式分解: $3x^2 - 6x + 3 =$ _____.

12. (3分) (2014•攀枝花) 函数 $y = \sqrt{x-2}$ 中自变量 x 的取值范围是_____.

13. (3分) (2014•绥化) 一个扇形的圆心角为 120° , 半径为3, 则这个扇形的面积为_____(结果保留 π)

14. (3分) (2012•云南) 观察下列图形的排列规律(其中▲、■、★分别表示三角形、正方形、五角星). 若第一个图形是三角形, 则第18个图形是_____. (填图形的名称)

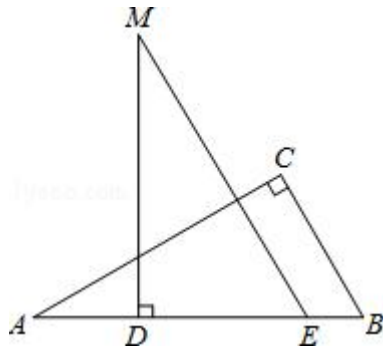
▲■★▲■★▲■★▲■★▲■★▲...

三、解答题(共9小题, 满分58分)

15. (5分) (2012•云南) 化简求值: $(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}) \cdot (x^2 - 1)$, 其中 $x = \frac{1}{2}$.

16. (5分) (2012•云南) 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, 点D是AB边上的一点, $DM \perp AB$, 且 $DM = AC$, 过点M作 $ME \parallel BC$ 交AB于点E.

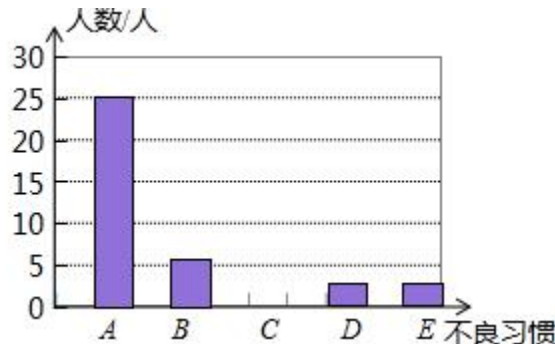
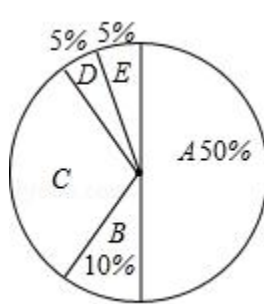
求证: $\triangle ABC \cong \triangle MED$.



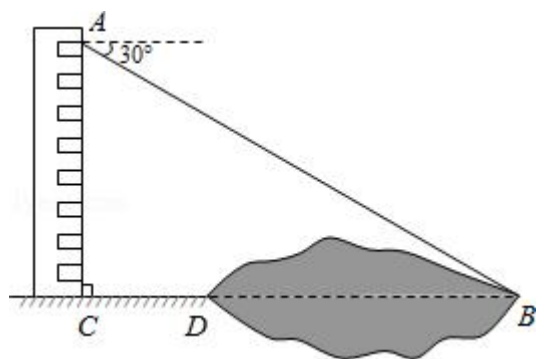
17. (6分) (2012·云南) 某企业为严重缺水的甲、乙两所学校捐赠矿泉水共 2000 件. 已知捐给甲校的矿泉水件数比捐给乙校件数的 2 倍少 400 件. 求该企业分别捐给甲、乙两所学校的矿泉水各多少件?

18. (7分) (2012·云南) 某同学在学习了统计知识后, 就下表所列的 5 种用牙不良习惯对全班每一个同学进行了问卷调查 (每个被调查的同学必须选择而且只能在 5 种用牙不良习惯中选择一项), 调查结果如下统计图所示. 根据以上统计图提供的信息, 回答下列问题:

种类	A	B	C	D	E
不良习惯	睡前吃水果喝牛奶	用牙开瓶盖	常喝饮料嚼冰	常吃生冷零食	磨牙

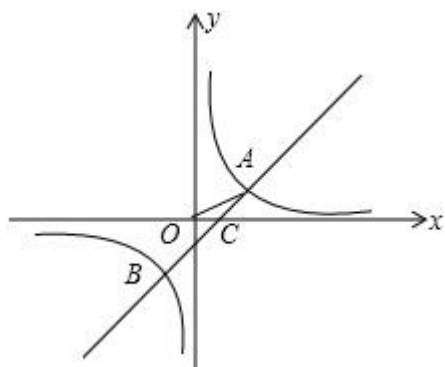


- (1) 这个班有多少名学生?
 - (2) 这个班中有 C 类用牙不良习惯的学生多少人? 占全班人数的百分比是多少?
 - (3) 请补全条形统计图;
 - (4) 根据调查结果, 估计这个年级 850 名学生中有 B 类用牙不良习惯的学生多少人?
19. (7分) (2012·云南) 现有 5 个质地、大小完全相同的小球上分别标有数字 -1 , -2 , 1 , 2 , 3 . 先将标有数字 -2 , 1 , 3 的小球放在第一个不透明的盒子里, 再将其余小球放在第二个不透明的盒子里. 现分别从两个盒子里各随即取出一个小球.
- (1) 请利用列表或画树状图的方法表示取出的两个小球上数字之和所有可能的结果;
 - (2) 求取出的两个小球上的数字之和等于 0 的概率.
20. (6分) (2012·云南) 如图, 某同学在楼房的 A 处测得荷塘的一端 B 处的俯角为 30° , 荷塘另一端 D 与点 C、B 在同一直线上, 已知 $AC=32$ 米, $CD=16$ 米, 求荷塘宽 BD 为多少米? (取 $\sqrt{3} \approx 1.73$, 结果保留整数)



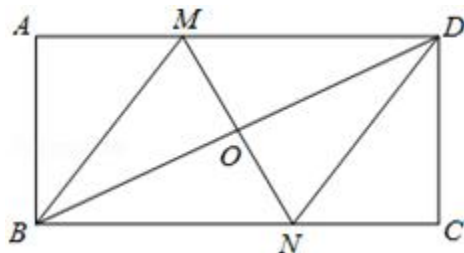
21. (6分) (2012•云南) 如图, 在平面直角坐标系中, O 为原点, 一次函数与反比例函数的图象相交于 $A(2, 1)$ 、 $B(-1, -2)$ 两点, 与 x 轴交于点 C .

- (1) 分别求反比例函数和一次函数的解析式 (关系式);
- (2) 连接 OA , 求 $\triangle AOC$ 的面积.



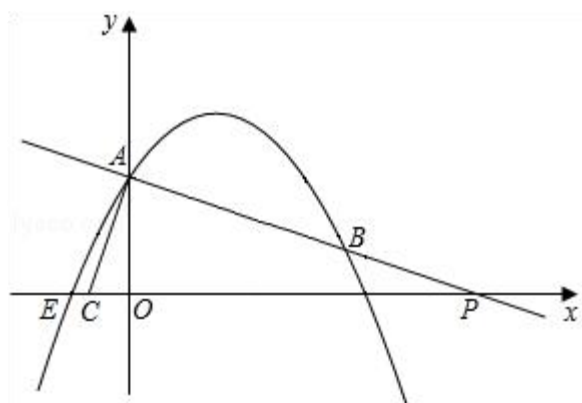
22. (7分) (2012•云南) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 对角线 BD 的垂直平分线 MN 与 AD 相交于点 M , 与 BC 相交于点 N , 连接 BM , DN .

- (1) 求证: 四边形 $BMDN$ 是菱形;
- (2) 若 $AB=4$, $AD=8$, 求 MD 的长.



23. (9分) (2012•云南) 如图, 在平面直角坐标系中, 直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 交 x 轴于点 P , 交 y 轴于点 A . 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + bx + c$ 的图象过点 $E(-1, 0)$, 并与直线相交于 A 、 B 两点.

- (1) 求抛物线的解析式 (关系式);
- (2) 过点 A 作 $AC \perp AB$ 交 x 轴于点 C , 求点 C 的坐标;
- (3) 除点 C 外, 在坐标轴上是否存在点 M , 使得 $\triangle MAB$ 是直角三角形? 若存在, 请求出点 M 的坐标; 若不存在, 请说明理由.



2012 年云南省昆明市中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分）

1. (3 分)

【考点】相反数.

【分析】根据相反数的定义，即只有符号不同的两个数互为相反数，进行求解.

【解答】解：5 的相反数是 -5.

故选 B.

【点评】此题考查了相反数的概念. 求一个数的相反数，只需在它的前面加“-”号.

2. (3 分)

【考点】简单组合体的三视图.

【分析】根据俯视图是从上面看到的识图分析解答.

【解答】解：从上面看，是 1 行 3 列并排在一起的三个正方形.

故选 A.

【点评】本题考查了三视图的知识，俯视图是从物体的上面看得到的视图.

3. (3 分)

【考点】负整数指数幂；同底数幂的乘法；幂的乘方与积的乘方；零指数幂.

【分析】利用同底数幂、负指数、零指数以及幂的乘方的性质求解即可求得答案，注意排除法在解选择题中的应用.

【解答】解：A、 $x^2 \cdot x^3 = x^5$ ，故本选项错误；

B、 $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ ，故本选项错误；

C、 $(x^3)^2 = x^6$ ，故本选项错误；

D、 $4^0 = 1$ ，故本选项正确.

故选 D.

【点评】此题考查了同底数幂、负指数、零指数以及幂的乘方的性质. 注意掌握指数的变化是解此题的关键.

4. (3 分)

【考点】解一元一次不等式组.

【分析】先求出不等式组中每一个不等式的解集，再求出它们的公共部分，即可得到不等式

组 $\begin{cases} 1-x > 0 \\ 3x > 2x-4 \end{cases}$ 的解集.

【解答】解： $\begin{cases} 1-x > 0 \text{ ①} \\ 3x > 2x-4 \text{ ②} \end{cases}$

由①得 $-x > -1$ ，即 $x < 1$ ；

由②得 $x > -4$ ；

$\therefore$ 可得 $-4 < x < 1$.

故选 C.

【点评】主要考查了一元一次不等式解集的求法，其简便求法就是用口诀求解，求不等式组解集的口诀：同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小找不到（无解）.

5. (3分)

【考点】三角形内角和定理.

【分析】首先利用三角形内角和定理求得 $\angle BAC$ 的度数，然后利用角平分线的性质求得 $\angle CAD$ 的度数即可.

【解答】解： $\because \angle B=67^\circ, \angle C=33^\circ,$

$$\therefore \angle BAC=180^\circ - \angle B - \angle C=180^\circ - 67^\circ - 33^\circ=80^\circ$$

$\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,

$$\therefore \angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\times 80^\circ=40^\circ$$

故选 A.

【点评】本题考查了三角形的内角和定理，属于基础题，比较简单. 三角形内角和定理在小学已经接触过.

6. (3分)

【考点】圆周角定理.

【分析】由在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等，即可求得 $\angle BCD$ 的度数.

【解答】解： $\because \angle BAD$ 与 $\angle BCD$ 都是 $\widehat{BD}$ 对的圆周角,

$$\therefore \angle BCD=\angle BAD=60^\circ.$$

故选 C.

【点评】此题考查了圆周角定理. 此题比较简单，注意掌握在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆周角相等定理的应用，注意数形结合思想的应用.

7. (3分)

【考点】极差；算术平均数；中位数；众数.

【分析】根据极差，中位数和众数的定义解答，找中位数要把数据按从小到大的顺序排列，位于最中间的一个数（或两个数的平均数）为中位数；众数是一组数据中出现次数最多的数据，注意众数可以不止一个；极差就是这组数中最大值与最小值的差.

【解答】解：A、平均数为 $(175+105+80+121+80)\div 5=112.2$ ，错误.

B、从高到低排列后，为80，80，105，121，175，中位数是105，正确；

C、80出现了两次，出现的次数最多，所以众数是80，正确；

D、极差是 $175-80=95$ ，正确.

故选 A.

【点评】本题考查了极差、平均数、中位数、众数，中位数是将一组数据从小到大（或从大到小）重新排列后，最中间的那个数（或最中间两个数的平均数），叫做这组数据的中位数. 如果中位数的概念掌握得不好，不把数据按要求重新排列，就会出错.

8. (3分)

【考点】平方差公式.

【分析】由 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 与 $a^2-b^2=\frac{1}{4}$ ， $a-b=\frac{1}{2}$ ，即可得 $\frac{1}{2}(a+b)=\frac{1}{4}$ ，继而求得 $a+b$ 的值.

【解答】解： $\because a^2-b^2=\frac{1}{4}$ ， $a-b=\frac{1}{2}$ ，

$$\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) = \frac{1}{2}(a+b) = \frac{1}{4},$$

$$\therefore a+b = \frac{1}{2}.$$

故选 B.

【点评】此题考查了平方差公式的应用. 此题比较简单, 注意掌握公式变形与整体思想的应用.

二、填空题 (共 6 小题, 每小题 3 分, 满分 18 分)

9. (3 分)

【考点】科学记数法—表示较大的数.

【分析】科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数. 确定 n 的值时, 要看把原数变成 a 时, 小数点移动了多少位, n 的绝对值与小数点移动的位数相同. 当原数绝对值 > 1 时, n 是正数; 当原数的绝对值 < 1 时, n 是负数.

【解答】解: 将 45960000 用科学记数法表示为: 4.596×10^7 .

故答案为: 4.596×10^7 .

【点评】此题考查了科学记数法的表示方法. 科学记数法的表示形式为 $a \times 10^n$ 的形式, 其中 $1 \leq |a| < 10$, n 为整数, 表示时关键要正确确定 a 的值以及 n 的值.

10. (3 分)

【考点】实数大小比较; 估算无理数的大小.

【分析】根据算术平方根的性质可以把 2 和 4 写成带根号的形式, 再进一步写出一个被开方数介于两者之间的数即可.

【解答】解: $\because 2 = \sqrt{4}$, $4 = \sqrt{16}$,

$\therefore$ 写出一个大于 2 小于 4 的无理数是 $\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{8}$ 、 $\sqrt[3]{9}$ 、 π ...

故答案为: $\sqrt{7}$ 、 $\sqrt{8}$ 、 $\sqrt[3]{9}$ 、 π ... (只要是大于 $\sqrt{4}$ 小于 $\sqrt{16}$ 无理数都可以) 等. 本题答案不唯一.

【点评】此题考查了无理数大小的估算, 熟悉算术平方根的性质是解题关键.

11. (3 分)

【考点】提公因式法与公式法的综合运用.

【分析】先提取公因式 3, 再对余下的多项式利用完全平方公式继续分解.

【解答】解: $3x^2 - 6x + 3$,

$$= 3(x^2 - 2x + 1),$$

$$= 3(x-1)^2.$$

【点评】本题考查了用提公因式法和公式法进行因式分解, 一个多项式有公因式首先提取公因式, 然后再用其他方法进行因式分解, 同时因式分解要彻底, 直到不能分解为止.

12. (3 分)

【考点】函数自变量的取值范围.

【分析】根据二次根式的性质, 被开方数大于等于 0, 就可以求解.

【解答】解: 依题意, 得 $x - 2 \geq 0$,

解得: $x \geq 2$,

故答案为: $x \geq 2$.

【点评】本题主要考查函数自变量的取值范围，考查的知识点为：二次根式的被开方数是非负数.

13. (3分)

【考点】扇形面积的计算.

【分析】根据扇形公式 $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$ ，代入数据运算即可得出答案.

【解答】解：由题意得， $n=120^\circ$ ， $R=3$ ，

$$\text{故 } S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{120\pi \times 3^2}{360} = 3\pi.$$

故答案为： 3π .

【点评】此题考查了扇形的面积计算，属于基础题，解答本题的关键是熟练掌握扇形的面积公式，另外要明白扇形公式中，每个字母所代表的含义.

14. (3分)

【考点】规律型：图形的变化类.

【分析】本题是循环类问题，只要找到所求值在第几个循环，便可找出答案.

【解答】解：根据题意可知，每6个图形一个循环，第18个图形经过了3个循环，且是第3个循环中的最后1个，
即第18个图形是五角星.

故答案为：五角星.

【点评】此题考查了图形的变化类，是一道找规律的题目，这类题型在中考中经常出现. 对于找规律的题目首先应找出哪些部分发生了变化，是按照什么规律变化的，主要培养学生的观察能力和归纳总结能力.

三、解答题 (共9小题，满分58分)

15. (5分)

【考点】分式的化简求值.

【分析】根据乘法的分配律展开得出 $\frac{1}{x+1} \times (x+1)(x-1) + \frac{1}{x-1} \times (x+1)(x-1)$ ，求出结果是 $2x$ ，代入求出即可.

$$\text{【解答】解：原式} = \frac{1}{x+1} \times (x+1)(x-1) + \frac{1}{x-1} \times (x+1)(x-1)$$

$$= x - 1 + x + 1$$

$$= 2x,$$

$$\text{当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时,}$$

$$\text{原式} = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

【点评】本题考查了分式的化简求值的应用，主要考查学生的化简能力，题型较好，但是一道比较容易出错的题目.

16. (5分)

【考点】全等三角形的判定.

【分析】根据平行线的性质可得出 $\angle B = \angle MED$ ，结合全等三角形的判定定理可判断 $\triangle ABC \cong \triangle MED$.

【解答】证明： $\because MD \perp AB$,

$$\therefore \angle MDE = \angle C = 90^\circ,$$

$\therefore ME \parallel BC$,
 $\therefore \angle B = \angle MED$,

在 $\triangle ABC$ 与 $\triangle MED$ 中,
$$\begin{cases} \angle B = \angle MED \\ \angle C = \angle EDM, \\ DM = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle MED$ (AAS).

【点评】此题考查了全等三角形的判定, 要求掌握三角形全等的判定定理, 难度一般.

17. (6 分)

【考点】二元一次方程组的应用.

【分析】设该企业向甲学校捐了 x 件矿泉水, 向乙学校捐了 y 件矿泉水, 则根据总共捐赠 2000 件, 及捐给甲校的矿泉水件数比捐给乙校件数的 2 倍少 400 件可得出方程, 联立求解即可.

【解答】解: 设该企业向甲学校捐了 x 件矿泉水, 向乙学校捐了 y 件矿泉水,

由题意得,
$$\begin{cases} x + y = 2000 \\ x = 2y - 400 \end{cases}$$

解得:
$$\begin{cases} x = 1200 \\ y = 800 \end{cases}$$

答: 该企业向甲学校捐了 1200 件矿泉水, 向乙学校捐了 800 件矿泉水.

【点评】此题考查了二元一次方程组的知识, 属于基础题, 解答本题的关键是设出未知数, 根据题意的等量关系得出方程, 难度一般.

18. (7 分)

【考点】条形统计图; 用样本估计总体; 扇形统计图.

【分析】(1) 用 A 组的频数除以其所占的百分比即可求得总人数;

(2) 用单位 1 减去其他小组所占的百分比即可求得 C 小组所占的百分比;

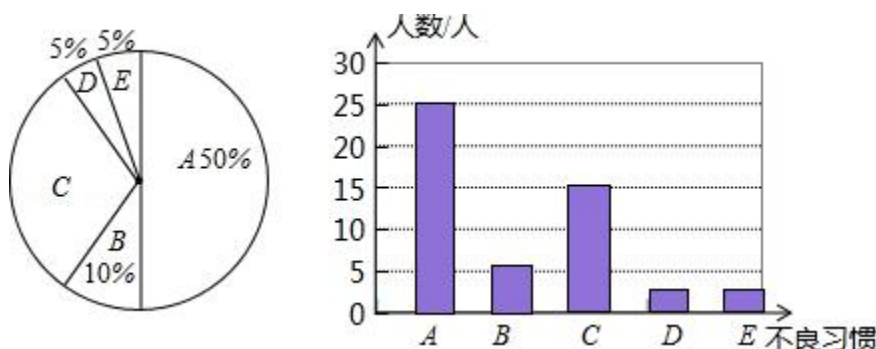
(3) 小长方形的高等于其频数;

(4) 用总人数乘以 B 类所占的百分比即可求得用牙不良习惯的学生人数.

【解答】解: (1) $25 \div 50\% = 50 \dots$ (1 分)

(2) $1 - 50\% - 20\% = 30\% \dots$ (2 分) $50 \times 30\% = 15 \dots$ (3 分)

(3)



(4) $850 \times 10\% = 85 \dots$ (6 分)

答: (1) 这个班有 50 名学生;

(2) 这个班中有 C 类用牙不良习惯的学生 15 人占全班人数的百分比是 30%;

(4) 根据调查结果, 估计这个年级 850 名学生中有 B 类用牙不良习惯的学生 85 人. $\dots$ (7 分)

【点评】此题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键．条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小．

19. (7 分)

【考点】列表法与树状图法．

【分析】(1) 首先根据题意列出表格，由表格即可求得取出的两个小球上数字之和所有等可能的结果；

(2) 首先根据 (1) 中的表格，求得取出的两个小球上的数字之和等于 0 的情况，然后利用概率公式即可求得答案．

【解答】解：(1) 列表得：

	- 1	2
- 2	- 3	0
1	0	3
3	2	5

则共有 6 种结果，且它们的可能性相同；... (3 分)

(2) $\because$ 取出的两个小球上的数字之和等于 0 的有：(1, - 1), (- 2, 2),

$\therefore$ 两个小球上的数字之和等于 0 的概率为： $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

【点评】此题考查的是用列表法或树状图法求概率．注意树状图法与列表法可以不重复不遗漏的列出所有可能的结果，列表法适合于两步完成的事件；树状图法适合两步或两步以上完成的事件；注意概率=所求情况数与总情况数之比．

20. (6 分)

【考点】解直角三角形的应用-仰角俯角问题．

【分析】根据已知条件转化为直角三角形 ABC 中的有关量，然后选择合适的边角关系求得 BD 的长即可．

【解答】解：由题意知： $\angle CAB=60^\circ$ ， $\triangle ABC$ 是直角三角形，

在 $Rt\triangle ABC$ 中， $\tan 60^\circ = \frac{BC}{AC}$,

即 $\frac{BC}{32} = \sqrt{3}$,

$\therefore BC = 32\sqrt{3}$

$\therefore BD = 32\sqrt{3} - 16 \approx 39$

答：荷塘宽 BD 为 39 米．

【点评】本题考查了解直角三角形的应用，解题的关键是利用仰俯角的定义将题目中的相关量转化为直角三角形 ABC 中的有关元素．

21. (6 分)

【考点】反比例函数与一次函数的交点问题；待定系数法求一次函数解析式；待定系数法求反比例函数解析式；三角形的面积．

【分析】(1) 设一次函数解析式为 $y_1=kx+b$ ($k \neq 0$)；反比例函数解析式为 $y_2=\frac{a}{x}$ ($a \neq 0$)，将

A (2, 1)、B (- 1, - 2) 代入 y_1 得到方程组 $\begin{cases} 1=2k+b \\ - 2=- k+b \end{cases}$ ，求出即可；将 A (2, 1) 代入 y_2 得出关于 a 的方程，求出即可；

(2) 求出 C 的坐标, 根据三角形的面积公式求出即可.

【解答】解: (1) 设一次函数解析式为 $y_1=kx+b$ ($k \neq 0$); 反比例函数解析式为 $y_2=\frac{a}{x}$ ($a \neq 0$),

$\therefore$ 将 A (2, 1)、B (-1, -2) 代入 y_1 得:
$$\begin{cases} 1=2k+b \\ -2=-k+b \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} k=1 \\ b=-1 \end{cases},$$

$$\therefore y_1=x-1;$$

$\therefore$ 将 A (2, 1) 代入 y_2 得: $a=2$,

$$\therefore y_2=\frac{2}{x};$$

答: 反比例函数的解析式是 $y_2=\frac{2}{x}$, 一次函数的解析式是 $y_1=x-1$.

$$(2) \because y_1=x-1,$$

当 $y_1=0$ 时, $x=1$,

$$\therefore C(1, 0),$$

$$\therefore OC=1,$$

$$\therefore S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2} \times 1 \times 1=\frac{1}{2}.$$

答: $\triangle AOC$ 的面积为 $\frac{1}{2}$.

【点评】本题考查了对一次函数与反比例函数的交点, 三角形的面积, 用待定系数法求一次函数、反比例函数的解析式的应用, 通过做此题培养了学生的计算能力, 题目具有一定的代表性, 是一道比较好的题目.

22. (7 分)

【考点】矩形的性质; 线段垂直平分线的性质; 勾股定理; 平行四边形的判定; 菱形的性质; 菱形的判定.

【分析】(1) 根据矩形性质求出 $AD \parallel BC$, 推出 $\angle MDO=\angle NBO$, $\angle DMO=\angle BNO$, 证 $\triangle DMO \cong \triangle BNO$, 推出 $OM=ON$, 得出平行四边形 $BMDN$, 推出菱形 $BMDN$;

(2) 根据菱形性质求出 $DM=BM$, 在 $Rt\triangle AMB$ 中, 根据勾股定理得出 $BM^2=AM^2+AB^2$, 推出 $x^2=x^2-16x+64+16$, 求出即可.

【解答】(1) 证明: $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$$\therefore AD \parallel BC, \angle A=90^\circ,$$

$$\therefore \angle MDO=\angle NBO, \angle DMO=\angle BNO,$$

$\therefore$ 在 $\triangle DMO$ 和 $\triangle BNO$ 中,

$$\begin{cases} \angle DMO=\angle BNO \\ \angle MDO=\angle NBO, \\ OB=OD \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DMO \cong \triangle BNO \text{ (AAS)},$$

$$\therefore OM=ON,$$

$$\therefore OB=OD,$$

$\therefore$ 四边形 $BMDN$ 是平行四边形,

$$\therefore MN \perp BD,$$

∴ 平行四边形 BMDN 是菱形.

(2) 解: ∵ 四边形 BMDN 是菱形,

∴ MB=MD,

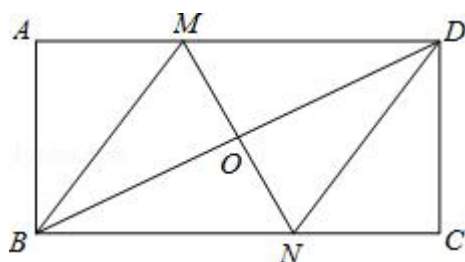
设 MD 长为 x, 则 MB=DM=x,

在 Rt△AMB 中, $BM^2=AM^2+AB^2$

即 $x^2=(8-x)^2+4^2$,

解得: $x=5$,

所以 MD 长为 5.



【点评】 本题考查了矩形性质, 平行四边形的判定, 菱形的判定和性质, 勾股定理等知识点的应用, 对角线互相平分的四边形是平行四边形, 对角线互相垂直的平行四边形是菱形.

23. (9 分)

【考点】 二次函数综合题.

【分析】 方法一:

(1) 首先求出 A 点坐标, 然后利用待定系数法求出抛物线的解析式;

(2) 利用相似三角形 ($\text{Rt}\triangle OCA \sim \text{Rt}\triangle OPA$) 比例线段之间的关系, 求出线段 OC 的长度, 从而得到 C 点的坐标, 如题图所示;

(3) 存在所求的 M 点, 在 x 轴上有 3 个, y 轴上有 2 个, 注意不要遗漏. 求点 M 坐标的过程并不复杂, 但要充分利用相似三角形比例线段之间的关系.

方法二:

(1) 略.

(2) 利用黄金法则二, 得出 AC 直线方程, 令 $y=0$ 求出点 C 坐标.

(3) 设参数点 M, 分类讨论三种位置关系, 利用黄金法则二求出点 M.

【解答】 方法一:

解: (1) 直线解析式为 $y = -\frac{1}{3}x+2$, 令 $x=0$, 则 $y=2$,

∴ A (0, 2),

∵ 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 的图象过点 A (0, 2), E (-1, 0),

$$\therefore \begin{cases} 2=c \\ 0=-\frac{1}{2}-b+c \end{cases}$$

$$\text{解得} \begin{cases} b=\frac{3}{2} \\ c=2 \end{cases}$$

∴ 抛物线的解析式为: $y = -\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$.

(2) $\because$ 直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 分别交 x 轴、 y 轴于点 P 、点 A ,

$\therefore P(6, 0), A(0, 2),$

$\therefore OP=6, OA=2.$

$\because AC \perp AB, OA \perp OP,$

$\therefore \text{Rt}\triangle OCA \sim \text{Rt}\triangle OPA, \angle OAC = \angle OPA,$

$$\therefore \frac{OC}{OA} = \frac{OA}{OP},$$

$$\therefore OC = \frac{OA^2}{OP} = \frac{2^2}{6} = \frac{2}{3},$$

又 C 点在 x 轴负半轴上,

$\therefore$ 点 C 的坐标为 $C(-\frac{2}{3}, 0).$

(3) 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 与直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 交于 A 、 B 两点,

$$\text{令 } -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{3}x + 2,$$

$$\text{解得 } x_1=0, x_2=-\frac{11}{3},$$

$\therefore B(-\frac{11}{3}, \frac{7}{9}).$

如答图①所示, 过点 B 作 $BD \perp x$ 轴于点 D ,

则 $D(-\frac{11}{3}, 0), BD = \frac{7}{9}, DP = 6 - \frac{11}{3} = \frac{7}{3}.$

点 M 在坐标轴上, 且 $\triangle MAB$ 是直角三角形, 有以下几种情况:

①当点 M 在 x 轴上, 且 $BM \perp AB$, 如答图①所示.

设 $M(m, 0)$, 则 $MD = \frac{11}{3} - m.$

$$\because BM \perp AB, BD \perp x \text{ 轴}, \therefore \frac{MD}{BD} = \frac{BD}{DP},$$

$$\text{即 } \frac{\frac{11}{3} - m}{\frac{7}{9}} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{7}{3}},$$

$$\text{解得 } m = \frac{92}{27},$$

$\therefore$ 此时 M 点坐标为 $(\frac{92}{27}, 0);$

②当点 M 在 x 轴上, 且 $BM \perp AM$, 如答图①所示.

设 $M(m, 0)$, 则 $MD = \frac{11}{3} - m.$

$\because BM \perp AM$, 易知 $\text{Rt}\triangle AOM \sim \text{Rt}\triangle MDB,$

$$\therefore \frac{OM}{BD} = \frac{OA}{MD}, \text{ 即 } \frac{m}{\frac{7}{9} - \frac{11}{3} - \pi}$$

$$\text{化简得: } m^2 - \frac{11}{3}m + \frac{14}{9} = 0,$$

$$\text{解得: } m_1 = \frac{11 + \sqrt{65}}{6}, m_2 = \frac{11 - \sqrt{65}}{6},$$

$$\therefore \text{此时 M 点坐标为 } \left(\frac{11 + \sqrt{65}}{6}, 0 \right), \left(\frac{11 - \sqrt{65}}{6}, 0 \right);$$

(说明: 此时的 M 点相当于以 AB 为直径的圆与 x 轴的两个交点)

③当点 M 在 y 轴上, 且 $BM \perp AM$, 如答图②所示.

$$\text{此时 M 点坐标为 } \left(0, \frac{7}{9} \right);$$

④当点 M 在 y 轴上, 且 $BM' \perp AB$, 如答图②所示.

$$\text{设 } M' (0, m), \text{ 则 } AM = 2 - \frac{7}{9} - \frac{11}{9}, BM = \frac{11}{3}, MM' = \frac{7}{9} - m.$$

易知 $Rt\triangle ABM \sim Rt\triangle BM'M$,

$$\therefore \frac{AM}{BM} = \frac{BM}{MM'}, \text{ 即 } \frac{\frac{11}{9}}{\frac{11}{3}} = \frac{\frac{11}{3}}{\frac{7}{9} - \pi},$$

$$\text{解得 } m = -\frac{92}{9},$$

$$\therefore \text{此时 } M' \text{ 点坐标为 } \left(0, -\frac{92}{9} \right).$$

综上所述, 除点 C 外, 在坐标轴上存在点 M, 使得 $\triangle MAB$ 是直角三角形.

符合条件的点 M 有 5 个, 其坐标分别为: $\left(\frac{92}{27}, 0 \right)$ 、 $\left(\frac{11 + \sqrt{65}}{6}, 0 \right)$ 、 $\left(\frac{11 - \sqrt{65}}{6}, 0 \right)$ 、 $\left(0, \frac{7}{9} \right)$ 或 $\left(0, -\frac{92}{9} \right)$.

方法二:

(1) 略.

(2) 抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$ 与直线 $y = -\frac{1}{3}x + 2$ 交于 A、B 两点, $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 2 = -\frac{1}{3}x + 2$, 解

$$\text{得: } x_1 = 0, x_2 = \frac{11}{3},$$

$$\therefore B \left(\frac{11}{3}, \frac{7}{9} \right),$$

$$\because AC \perp AB, \therefore K_{AC} \times K_{AB} = -1, \text{ 又 } K_{AB} = -\frac{1}{3}, \therefore K_{AC} = 3,$$

$$\because A (0, 2),$$

$$\therefore l_{AC}: y = 3x + 2,$$

$$\text{当 } y = 0 \text{ 时, } x = -\frac{2}{3},$$

∴点 C 的坐标为 $(-\frac{2}{3}, 0)$.

(3) ①当 M 在 y 轴时, 过 B 作 y 轴垂线得 M₁ $(0, \frac{7}{9})$,

作 BM ⊥ AB 交 y 轴于 M, ∴ K_{BM} × K_{AB} = -1,

∴ K_{AB} = $-\frac{1}{3}$, K_{BM} = 3, 又 B $(\frac{11}{3}, \frac{7}{9})$,

∴ l_{BM}: $y = 3x - \frac{92}{9}$, ∴ M₂ $(0, -\frac{7}{9})$.

②当 M 在 x 轴时, 当 y = 0, $x = \frac{92}{27}$,

∴ M₃ $(\frac{92}{27}, 0)$,

∵ AM ⊥ BM,

∴ K_{AM} × K_{BM} = -1,

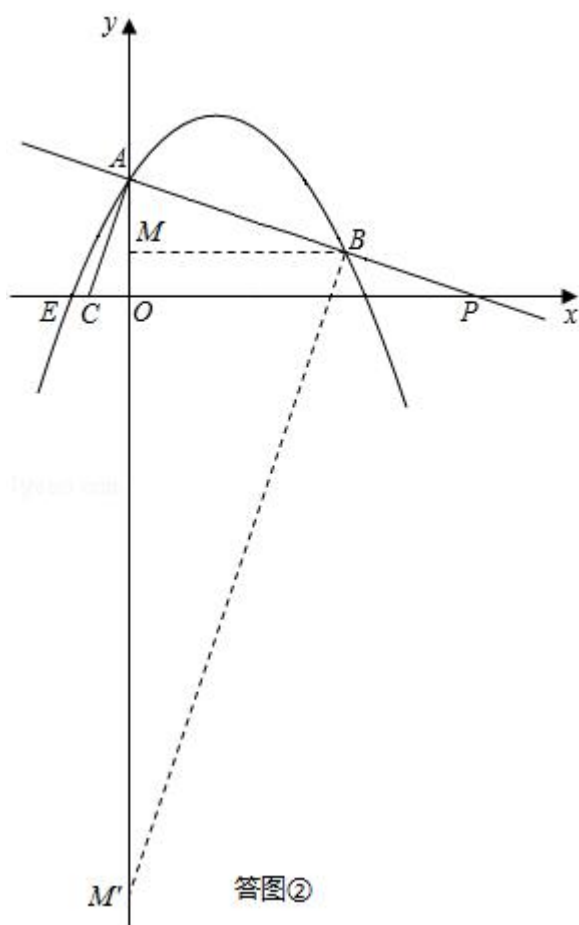
∵ A $(0, 2)$, B $(\frac{11}{3}, \frac{7}{9})$, 设 M $(t, 0)$,

$$\therefore \frac{2-0}{0-t} \times \frac{\frac{7}{9}-0}{\frac{11}{3}-t} = -1,$$

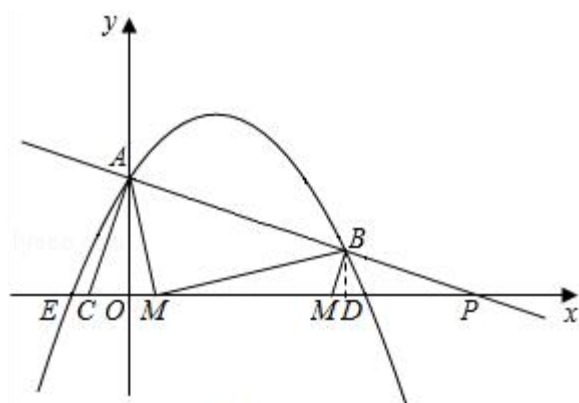
$$\therefore t - \frac{11}{3}t + \frac{14}{9} = 0,$$

$$\therefore t = \frac{11+\sqrt{65}}{6} \text{ 或 } \frac{11-\sqrt{65}}{6},$$

$$\therefore M_4 \left(\frac{11+\sqrt{65}}{6}, 0 \right), M_5 \left(\frac{11-\sqrt{65}}{6}, 0 \right).$$



答图②



答图①

【点评】 本题综合考查了二次函数的图象与性质、待定系数法求函数解析式、一次函数、解一元二次方程、相似三角形的判定与性质等重要知识点. 难点在于第 (3) 问, 所求的 M 点有 5 个 (x 轴上有 3 个, y 轴上有 2 个), 需要分情况讨论, 不要遗漏.