

黑龙江省龙东地区 2024 年初中毕业学业统一考试

数学试题

考生注意：

1. 考试时间 120 分钟

2. 全卷共三道大题，总分 120 分

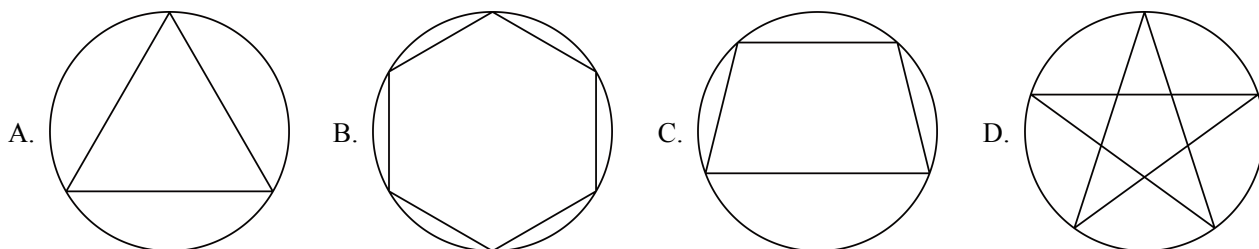
一、选择题（每小题 3 分，共 30 分）

1. 下列计算正确的是（ ）

A. $a^3 \cdot a^2 = a^6$ B. $(a^2)^5 = a^7$ C. $(-2a^3b)^3 = -8a^9b^3$ D.

$(-a+b)(a+b) = a^2 - b^2$

2. 下列图形既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



3. 由一些大小相同的小正方体搭成的几何体的主视图和左视图如图，则搭成该几何体的小正方体的个数最少是（ ）



主视图

左视图

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

4. 一组数据 2, 3, 3, 4, 则这组数据的方差为（ ）

A. 1 B. 0.8 C. 0.6 D. 0.5

5. 关于 x 的一元二次方程 $(m-2)x^2 + 4x + 2 = 0$ 有两个实数根，则 m 的取值范围是（ ）

A. $m \leq 4$ B. $m \geq 4$ C. $m \geq -4$ 且 $m \neq 2$ D. $m \leq 4$ 且 $m \neq 2$

6. 已知关于 x 的分式方程 $\frac{kx}{x-3} - 2 = \frac{3}{3-x}$ 无解，则 k 的值为（ ）

A. $k = 2$ 或 $k = -1$ B. $k = -2$ C. $k = 2$ 或 $k = 1$ D. $k = -1$

7. 国家“双减”政策实施后，某班开展了主题为“书香满校园”的读书活动。班级决定为在活动中表现突出的同学购买笔记本和碳素笔进行奖励（两种奖品都买），其中笔记本每本 3 元，碳素笔每支 2 元，共花费 28 元，则共有几种购买方案（ ）

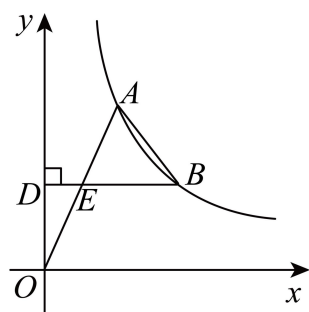
A. 5

B. 4

C. 3

D. 2

8. 如图, 双曲线 $y = \frac{12}{x} (x > 0)$ 经过 A 、 B 两点, 连接 OA 、 AB , 过点 B 作 $BD \perp y$ 轴, 垂足为 D , BD 交 OA 于点 E , 且 E 为 AO 的中点, 则 $\triangle AEB$ 的面积是 ()



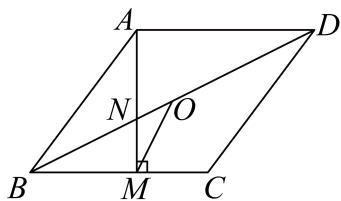
A. 4.5

B. 3.5

C. 3

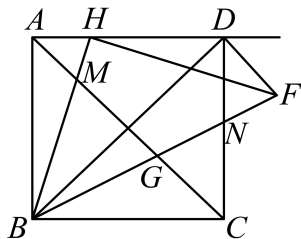
D. 2.5

9. 如图, 菱形 $ABCD$ 中, 点 O 是 BD 的中点, $AM \perp BC$, 垂足为 M , AM 交 BD 于点 N , $OM = 2$, $BD = 8$, 则 MN 的长为 ()

A. $\sqrt{5}$ B. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

10. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, 点 H 在 AD 边上 (不与点 A 、 D 重合), $\angle BHF = 90^\circ$, HF 交正方形外角的平分线 DF 于点 F , 连接 AC 交 BH 于点 M , 连接 BF 交 AC 于点 G , 交 CD 于点 N , 连接 BD . 则下列结论: ① $\angle HBF = 45^\circ$; ② 点 G 是 BF 的中点; ③ 若点 H 是 AD 的中点, 则 $\sin \angle NBC = \frac{\sqrt{10}}{10}$;

- ④ $BN = \sqrt{2}BM$; ⑤ 若 $AH = \frac{1}{2}HD$, 则 $S_{\triangle BND} = \frac{11}{2}S_{\triangle AHM}$, 其中正确的结论是 ()



A. ①②③④

B. ①③⑤

C. ①②④⑤

D. ①②③④⑤

二、填空题 (每小题 3 分, 共 30 分)

11. 国家统计局公布数据显示, 2023 年我国粮食总产量是 13908 亿斤, 将 13908 亿用科学记数法表示为

_____.

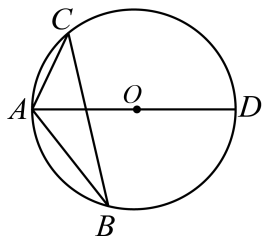
12. 在函数 $y = \frac{\sqrt{x-3}}{x+2}$ 中, 自变量 x 的取值范围是_____.

13. 已知菱形 $ABCD$ 中对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 添加条件_____可使菱形 $ABCD$ 成为正方形.

14. 七年一班要从 2 名男生和 3 名女生中选择两名学生参加朗诵比赛, 恰好选择 1 名男生和 1 名女生的概率是_____.

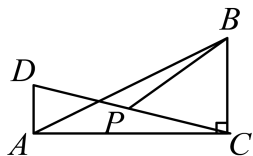
15. 关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 4-2x \geq 0 \\ \frac{1}{2}x - a > 0 \end{cases}$ 恰有 3 个整数解, 则 a 的取值范围是_____.

16. 如图, $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, AD 是直径, 若 $\angle B = 25^\circ$, 则 $\angle CAD$ _____ $^\circ$.



17. 若圆锥的底面半径为 3, 侧面积为 36π , 则这个圆锥侧面展开图的圆心角是_____ $^\circ$.

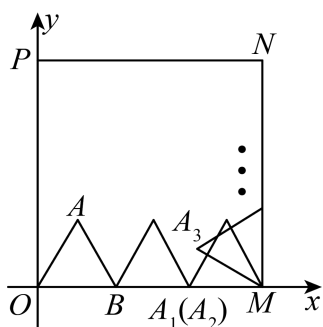
18. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\tan \angle BAC = \frac{1}{2}$, $BC = 2$, $AD = 1$, 线段 AD 绕点 A 旋转, 点 P 为 CD 的中点, 则 BP 的最大值是_____.



19. 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 3$, $BC = 4$, 将 AB 沿过点 A 的一条直线折叠, 折痕交直线 BC 于点 P (点 P 不与点 B 重合), 点 B 的对称点落在矩形对角线所在的直线上, 则 PC 长为_____.

20. 如图, 在平面直角坐标系中, 正方形 $OMNP$ 顶点 M 的坐标为 $(3, 0)$, $\triangle OAB$ 是等边三角形, 点 B 坐标是 $(1, 0)$, $\triangle OAB$ 在正方形 $OMNP$ 内部紧靠正方形 $OMNP$ 的边 (方向为 $O \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow P \rightarrow O \rightarrow M \rightarrow \dots$) 做无滑动滚动, 第一次滚动后, 点 A 的对应点记为 A_1 , A_1 的坐标是 $(2, 0)$; 第二次滚动后, A_1 的对应点记为 A_2 , A_2 的坐标是 $(2, 0)$; 第三次滚动后, A_2 的对应点记为 A_3 ,

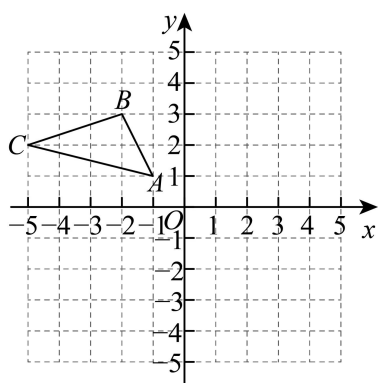
A_3 的坐标是 $\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; 如此下去, $\dots$, 则 A_{2024} 的坐标是_____.



三、解答题（满分 60 分）

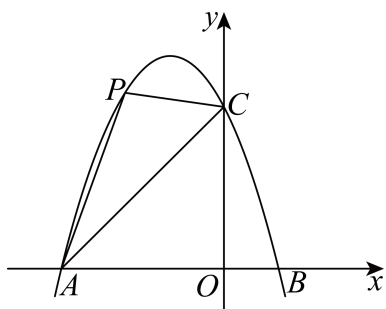
21. 先化简，再求值： $\frac{m^2 - 2m + 1}{m^2 - 1} \div \left(\frac{m^2}{m^2 + m} - 1 \right)$ ，其中 $m = \cos 60^\circ$.

22. 如图，在正方形网格中，每个小正方形的边长都是 1 个单位长度，在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的三个顶点坐标分别为 $A(-1, 1)$ ， $B(-2, 3)$ ， $C(-5, 2)$.



- (1) 画出 $\triangle ABC$ 关于 y 轴对称的 $\triangle A_1B_1C_1$ ，并写出点 B_1 的坐标；
- (2) 画出 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转 90° 后得到的 $\triangle AB_2C_2$ ，并写出点 B_2 的坐标；
- (3) 在 (2) 的条件下，求点 B 旋转到点 B_2 的过程中所经过的路径长（结果保留 π ）

23. 如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与 x 轴交于 A 、 B 两点，与 y 轴交于点 C ，其中 $B(1, 0)$ ， $C(0, 3)$.

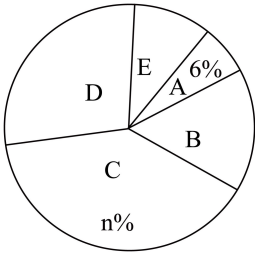


- (1) 求抛物线的解析式.
- (2) 在第二象限的抛物线上是否存在一点 P ，使得 $\triangle APC$ 的面积最大. 若存在，请直接写出点 P 坐标和

$\triangle APC$ 的面积最大值；若不存在，请说明理由.

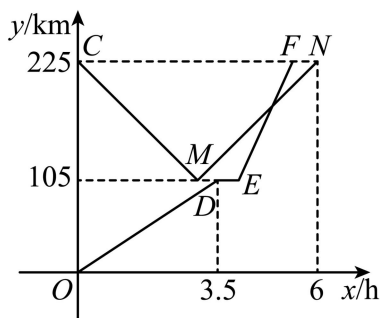
24. 为贯彻落实教育部办公厅关于“保障学生每天校内、校外各一小时体育活动时间”的要求，某学校要求学生每天坚持体育锻炼. 学校从全体男生中随机抽取了部分学生，调查他们的立定跳远成绩，整理如下不完整的频数分布表和统计图，结合下图解答下列问题:

组别	分组 (cm)	频数
A	$50 < x \leq 100$	3
B	$100 < x \leq 150$	m
C	$150 < x \leq 200$	20
D	$200 < x \leq 250$	14
E	$250 < x \leq 300$	5



- (1) 频数分布表中 $m =$ _____, 扇形统计图中 $n =$ _____.
- (2) 本次调查立定跳远成绩的中位数落在 _____ 组别.
- (3) 该校有 600 名男生，若立定跳远成绩大于 200cm 为合格，请估计该校立定跳远成绩合格的男生有多少人?

25. 甲、乙两货车分别从相距 225km 的 A 、 B 两地同时出发，甲货车从 A 地出发途经配货站时，停下来卸货，半小时后继续驶往 B 地，乙货车沿同一条公路从 B 地驶往 A 地，但乙货车到达配货站时接到紧急任务立即原路原速返回 B 地，结果比甲货车晚半小时到达 B 地. 如图是甲、乙两货车距 A 地的距离 $y(\text{km})$ 与行驶时间 $x(\text{h})$ 之间的函数图象，结合图象回答下列问题:

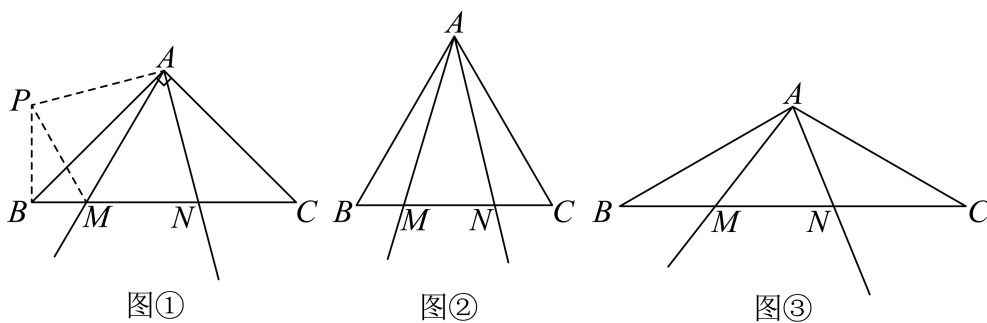


(1) 甲货车到达配货站之前的速度是_____ km/h，乙货车的速度是_____ km/h；

(2) 求甲货车在配货站卸货后驶往 B 地的过程中，甲货车距 A 地的距离 $y(\text{km})$ 与行驶时间 $x(\text{h})$ 之间的函数解析式；

(3) 直接写出甲、乙两货车在行驶的过程中，出发多长时间甲、乙两货车与配货站的距离相等。

26. 已知 $\triangle ABC$ 是等腰三角形， $AB = AC$ ， $\angle MAN = \frac{1}{2} \angle BAC$ ， $\angle MAN$ 在 $\angle BAC$ 的内部，点 M、N 在 BC 上，点 M 在点 N 的左侧，探究线段 BM、NC、MN 之间的数量关系。



(1) 如图①，当 $\angle BAC = 90^\circ$ 时，探究如下：

由 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ 可知，将 $\triangle ACN$ 绕点 A 顺时针旋转 90° ，得到 $\triangle ABP$ ，则 $CN = BP$ 且 $\angle PBM = 90^\circ$ ，连接 PM，易证 $\triangle AMP \cong \triangle AMN$ ，可得 $MP = MN$ ，在 $\text{Rt}\triangle PBM$ 中， $BM^2 + BP^2 = MP^2$ ，则有 $BM^2 + NC^2 = MN^2$ 。

(2) 当 $\angle BAC = 60^\circ$ 时，如图②：当 $\angle BAC = 120^\circ$ 时，如图③，分别写出线段 BM、NC、MN 之间的数量关系，并选择图②或图③进行证明。

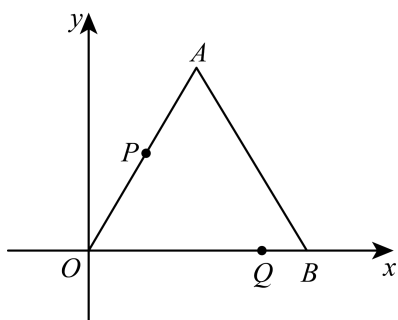
27. 为了增强学生的体质，某学校倡导学生在大课间开展踢毽子活动，需购买甲、乙两种品牌毽子。已知购买甲种品牌毽子 10 个和乙种品牌毽子 5 个共需 200 元；购买甲种品牌毽子 15 个和乙种品牌毽子 10 个共需 325 元。

(1) 购买一个甲种品牌毽子和一个乙种品牌毽子各需要多少元？

(2) 若购买甲乙两种品牌毽子共花费 1000 元，甲种品牌毽子数量不低于乙种品牌毽子数量的 5 倍且不超过乙种品牌毽子数量的 16 倍，则有几几种购买方案？

(3) 若商家每售出一个甲种品牌毽子利润是 5 元，每售出一个乙种品牌毽子利润是 4 元，在 (2) 的条件下，学校如何购买毽子商家获得利润最大？最大利润是多少元？

28. 如图，在平面直角坐标系中，等边三角形 OAB 的边 OB 在 x 轴上，点 A 在第一象限， OA 的长度是一元二次方程 $x^2 - 5x - 6 = 0$ 的根，动点 P 从点 O 出发以每秒 2 个单位长度的速度沿折线 $OA - AB$ 运动，动点 Q 从点 O 出发以每秒 3 个单位长度的速度沿折线 $OB - BA$ 运动， P 、 Q 两点同时出发，相遇时停止运动。设运动时间为 t 秒 ($0 < t < 3.6$)， $\triangle OPQ$ 的面积为 S 。



- (1) 求点 A 的坐标；
- (2) 求 S 与 t 的函数关系式；
- (3) 在 (2) 的条件下，当 $S = 6\sqrt{3}$ 时，点 M 在 y 轴上，坐标平面内是否存在点 N ，使得以点 O 、 P 、 M 、 N 为顶点的四边形是菱形。若存在，直接写出点 N 的坐标；若不存在，说明理由。