

数学试题

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1. 福建省首届“闽超”足球比赛正如火如荼进行中，在某轮比赛中甲队与乙队的比赛结果为 0:1，丙队与丁队的比赛结果为 2:0．若把这轮比赛中甲队的净胜球数记作 -1 ，则丙队的净胜球数应记作（ ）

- A. -2 B. -1 C. $+1$ D. $+2$

2. 下列图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（ ）



3. 2026 年 5 月 24 日，神舟二十三号飞船成功发射，彰显了我国航空航天事业取得巨大成就．飞船在轨飞行速度接近地球第一宇宙速度 7900 米/秒．数据 7900 用科学记数法表示为（ ）

- A. 0.79×10^4 B. 7.9×10^3 C. 7.9×10^2 D. 79×10^2

4. 福建土楼产生于宋元，成熟于明末、清代和民国时期．土楼或方或圆，以圆为主，如珍珠般洒落在闽西南的绿水青山间，遵循“天人合一”的东方哲学理念．图 1 是福建众多土楼中的一座圆形土楼．图 2 为其示意图，关于它的三视图的描述，下列说法正确的是（ ）



图1

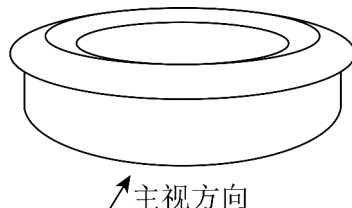
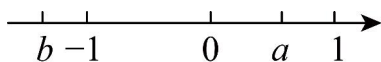


图2

- A. 主视图和左视图相同 B. 主视图和俯视图相同
C. 左视图和俯视图相同 D. 三种视图都相同

5. 实数 a ， b 在数轴上的对应点的位置如图所示，下列结论正确的是（ ）

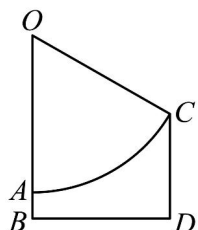


- A. $a+b > 0$ B. $a-b < 0$ C. $ab > 0$ D. $\frac{a}{b} < 0$

6. 下列各点中，在函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象上的点是（ ）

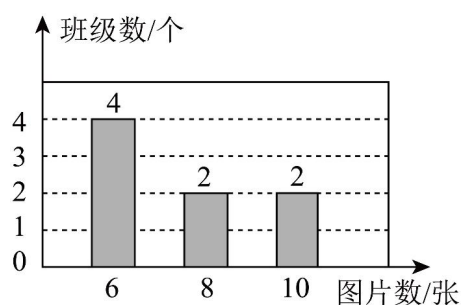
- A. (1,1) B. (1,2) C. (2,1) D. (2,2)

7. 古算诗词题融数学于诗词之中，是前人智慧的结晶. 如图是古算诗词题“争荡秋千”所描绘的示意图. 已知秋千的绳索长 $OA = 6$ 尺，且秋千的绳索始终保持直线状态，踏板的起始位置在点 A 处， OA 与地面 BD 垂直，踏板离地面的高度 $AB = 1$ 尺. 当踏板从 A 处绕点 O 运动到 C 处时，踏板离地面的高度 $CD = 4$ 尺，则秋千的绳索荡过的 $\angle AOC$ 的大小为 ()



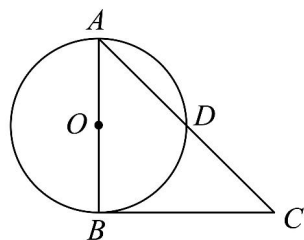
- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

8. 为庆祝“中俄教育年”正式启动，某校 8 个班级分别制作了若干张宣传图片，图片数的条形统计图如图所示. 这 8 个班级宣传图片数的中位数与平均数分别是 ()



- A. 7, 7 B. 7, 7.5 C. 7.5, 7 D. 7.5, 7.5

9. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， BC 是 $\odot O$ 的切线， AC 交 $\odot O$ 于点 D . 若 $AD = CD$ ，则 $\tan A$ 的值是 ()



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

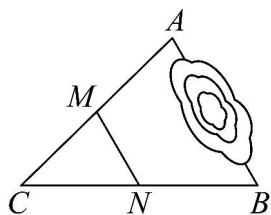
10. 已知抛物线 $y = x^2 - 2nx$ 经过点 $A(3, a)$, $B(5, b)$. 若 $a < b$ ，且 $ab < 0$ ，则 n 的取值可以是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

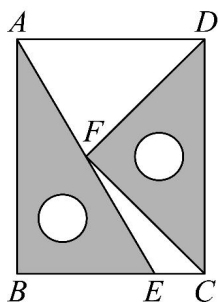
11. 一组数据 9, 8, 5, 2, 1, 1 的众数是_____.

12. 如图, A, B 两点被池塘隔开, 在 AB 外选择一点 C , 连接 AC 和 BC , 分别取 AC 和 BC 的中点 M, N , 测得 $MN = 100$ 米, 则 A, B 两点间的距离是_____米.



13. 因式分解: $x^2 - y^2 =$ _____.

14. 某数学兴趣小组成员把一副三角板按如图所示的方式摆放, 其中 $\angle B = \angle DFC = 90^\circ$, $\angle BAE = 30^\circ$, $\angle CDF = 45^\circ$, 四边形 $ABCD$ 恰好为矩形, 点 E, F 分别在 BC, AE 上, 则 $\angle AFD$ 等于_____度.



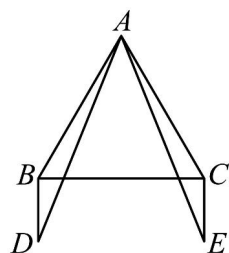
15. 已知实数 p, q 满足 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 则 $(p-1)(q-1)$ 的值为_____.

16. 由于水对物体的浮力作用, 实心的纯金和纯银浸没水中称重时, 弹簧测力计的示数分别约为原来的 $\frac{19}{20}$ 和 $\frac{9}{10}$. 一件重 80 克的实心金银饰品, 浸没水中称重, 弹簧测力计的示数为原来的 $\frac{15}{16}$, 若实心的纯金和纯银浸没水中称重, 弹簧测力计的示数分别按原来的 $\frac{19}{20}$ 和 $\frac{9}{10}$ 计算, 则这件金银饰品中含金_____克.

三、解答题: 本题共 9 小题, 共 86 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

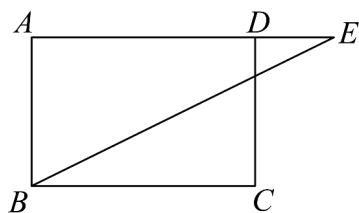
17. 计算: $\sqrt{4} + |-3| - 2^2$.

18. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $BD \perp BC$, $CE \perp BC$, $BD = CE$. 求证: $AD = AE$.



19. 解不等式组:
$$\begin{cases} x-2>1 & \text{①} \\ 3x-5<2(x+1) & \text{②} \end{cases}$$

20. 如图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $AB < BC$, 点 E 在 AD 的延长线上.



(1) 求作点 F , 使点 F 在 AD 边上, 且 $\angle AFB = 2\angle EBC$; (要求: 尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹)

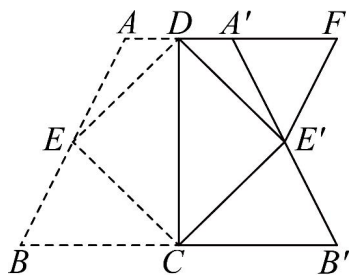
(2) 在 (1) 的条件下, 若 $AB = 4$, $BC = 6$, $DE = 2$, 求 AF 的长.

21. 一个不透明的盒子中有 1 个标号为 0 的黄球 a_0 , 2 个标号分别为 1, 2 的红球 b_1 , b_2 , 1 个标号为 3 的白球 c_3 , 这些球除颜色和标号外无其他差别.

(1) 从盒子中随机摸出 1 个球, 求摸出的球是黄球的概率;

(2) 从盒子中随机摸出 1 个球, 不放入, 再从中随机摸出 1 个球. 求摸出的 2 个球颜色不同且标号之和小于 4 的概率.

22. 如图, 在四边形 $ABCD$ 中, E 是 AB 上的一点, $\angle ADC = \angle BCD = \angle CED = 90^\circ$, $CE = DE$. 四边形 $A'B'CD$ 由四边形 $ABCD$ 沿 CD 翻折得到, 点 A , B , E 的对应点分别为 A' , B' , E' . F 是 AD 延长线上的一点, 且 $FE' \parallel AB$.



(1) 求证: $E'A' = E'F$;

(2) 若 $AD = \sqrt{2}$, $DE = 4$, 求 $A'F$ 的长.

23. 阅读下列材料, 回答问题.

主题	探究形如 $(\sqrt{2}a+b)^2$ 的数的整数部分与小数部分的特征
----	--

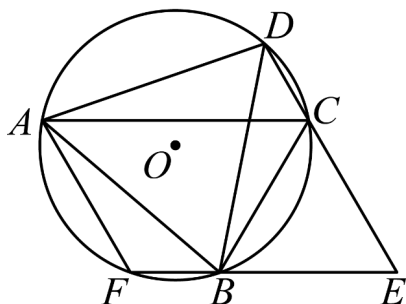
提出问题	学过“二次根式”，我们知道许多二次根式$\sqrt{p}$为无理数，且均可表示为整数部分与小数部分的和，即$\sqrt{p} = m + n$，其中m为整数，$0 < n < 1$。如$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1)$，$1 - \sqrt{5} = -2 + (3 - \sqrt{5})$。那么形如$(\sqrt{2}a + b)^2$的数，其整数部分$m$与小数部分$n$各有什么特征呢？
探究发现	小华对此展开研究，其探究过程如下： (1) $(\sqrt{2} - 1)^2 = 0 + (3 - 2\sqrt{2})$；(2) $(\sqrt{2} + 1)^2 = 3 + 2\sqrt{2} = \underline{\quad\textcircled{1}\quad} + (2\sqrt{2} - 2)$； (3) $(2\sqrt{2} - 2)^2 = 0 + (12 - 8\sqrt{2})$；(4) $(2\sqrt{2} + 2)^2 = 12 + 8\sqrt{2} = 23 + \underline{\quad\textcircled{2}\quad}$； (5) $(3\sqrt{2} - 4)^2 = 0 + (34 - 24\sqrt{2})$；(6) $(3\sqrt{2} + 4)^2 = 34 + 24\sqrt{2} = 67 + (24\sqrt{2} - 33)$。 据此，小华提出并证明了以下命题。 命题：若整数a, b满足$0 < \sqrt{2}a - b < 1$，且$(\sqrt{2}a + b)^2$的整数部分为m，小数部分为n，则m必为奇数，且$(\sqrt{2}a - b)^2 = 1 - n$。
命题证明	证明：因为$(\sqrt{2}a + b)^2 = 2a^2 + 2\sqrt{2}ab + b^2$，$(\sqrt{2}a - b)^2 = 2a^2 - 2\sqrt{2}ab + b^2$， 所以$(\sqrt{2}a + b)^2 + (\sqrt{2}a - b)^2 = 4a^2 + 2b^2$，即$(\sqrt{2}a + b)^2 = 4a^2 + 2b^2 - (\sqrt{2}a - b)^2$。 又因为$(\sqrt{2}a + b)^2 = m + n$，且$0 < n < 1$， 所以$4a^2 + 2b^2 - (\sqrt{2}a - b)^2 = m + n$。 又根据$0 < \sqrt{2}a - b < 1$，可得$0 < (\sqrt{2}a - b)^2 < 1$。 因此，$m = \underline{\quad\textcircled{3}\quad}$，$n = \underline{\quad\textcircled{4}\quad}$。 又因为$a, b$均为整数，所以$4a^2 + 2b^2$为偶数， 故$m$必为奇数，且$(\sqrt{2}a - b)^2 = 1 - n$。
拓展延伸	问题1 若整数a, b满足$1 < \sqrt{2}a - b < \sqrt{2}$，那么$(\sqrt{2}a + b)^2$的整数部分$m$是否仍为奇数？证明你的结论； 问题2 若整数$a, b$满足$\sqrt{k} < \sqrt{2}a - b < \sqrt{k+1}$，其中$k$为整数，且$k \geq 2$，试探究：$(\sqrt{2}a + b)^2$的整数部分$m$是奇数还是偶数？直接写出结论，不必证明。

(1) 补全①②③④所缺的内容；

(2) 解决问题 1;

(3) 解决问题 2.

24. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, E 是 DC 延长线上的一点, EB 的延长线交 $\odot O$ 于点 F , $AB = BD$, $\angle CBE = \angle ABD = 60^\circ$.



(1) 求 $\angle E$ 的度数;

(2) 求证: 四边形 $AFEC$ 是平行四边形;

(3) 设 CF 交 BD 于点 G , 且 $\frac{CG}{FG} = \frac{2}{3}$, 求 $\frac{BD}{AC}$ 的值.

25. 已知抛物线 $y = -x^2 + bx + c$.

(1) 若 $b = 1$, $c = 2$, 求抛物线的顶点坐标;

(2) 若抛物线上存在一点 $P(x_0, y_0)$ 在 x 轴上方, 求证: 抛物线与 x 轴有两个交点;

(3) 抛物线与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 $C(0, 2)$, 直线 $y = bx + 2$ 与 $y = -bx - 1$ 相交于点 D , E 是 y 轴上不与点 C 重合的点. 若坐标平面内存在点 M 满足 $MA = MB = MC = ME$, 试探究 CD 和 DE 的数量关系, 并证明.