

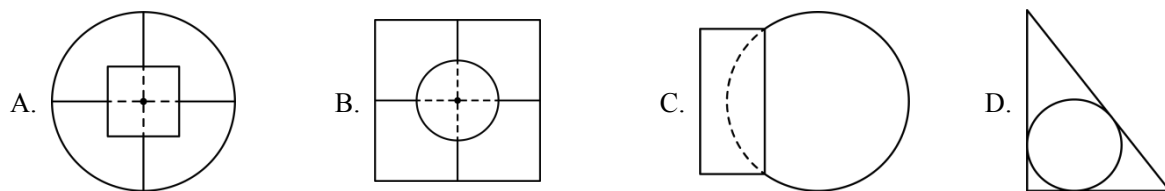
数学试题

一、选择题：本题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的．

1. 下列实数中，最小的数是 ()

- A. -1 B. 0 C. $\sqrt{2}$ D. 2

2. 中国古算诗词歌赋较多．古算诗词题，是反映数学数量关系的内在联系及其规律的一种文学浪漫形式．下列分别是古算诗词题“圆中方形”“方形圆径”“圆材藏壁”“勾股容圆”所描绘的图形，其中既不是轴对称图形也不是中心对称图形的是 ()



3. 若 $\sqrt{x-1}$ 在实数范围内有意义，则实数 x 的值可以是 ()

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 2

4. 福建博物院收藏着一件“镇馆之宝”——云纹青铜大铙，如图 1．云纹青铜大铙是西周乐器，鼓饰变形兽面纹，两侧饰云雷纹，浑大厚重，作风稳重古朴，代表了福建古代青铜文化曾经的历史和辉煌．图 2 为其示意图，它的主视图是 ()



图1

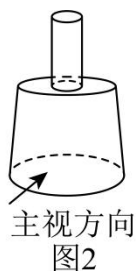
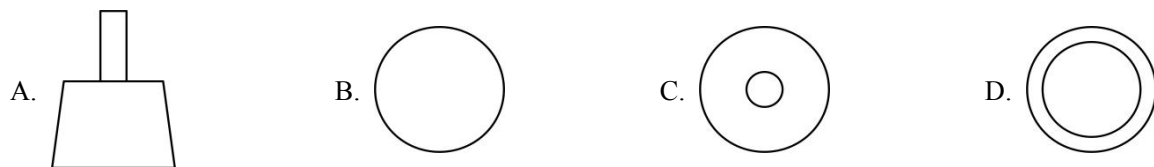


图2



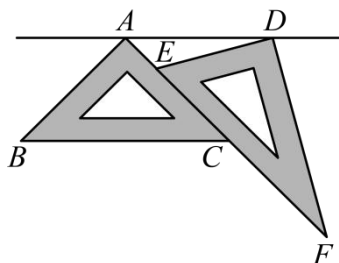
5. 不等式 $\frac{1}{2}x + 1 \leq 2$ 的解集在数轴上表示正确的是 ()



6. 在分别写有 -1 , 1 , 2 的三张卡片中，不放回地随机抽取两张，这两张卡片上的数恰好互为相反数的概率是 ()

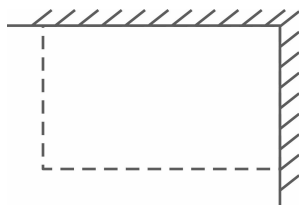
- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 某数学兴趣小组为探究平行线的有关性质，用一副三角尺按如图所示的方式摆放，其中点 A, E, C, F 在同一条直线上， $\angle BAC = \angle EDF = 90^\circ, \angle B = 45^\circ, \angle DEF = 60^\circ$. 当 $AD \parallel BC$ 时， $\angle ADE$ 的大小为 ()



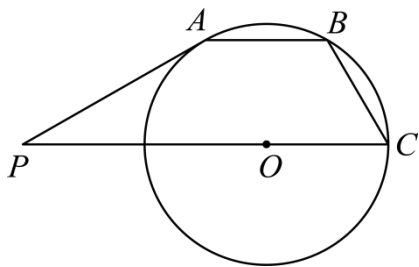
- A. 5° B. 15° C. 25° D. 35°

8. 为加强劳动教育，增加学生实践机会，某校拟用总长为 5 米的篱笆，在两边都足够长的直角围墙的一角，围出一块 6 平方米的矩形菜地作为实践基地，如图所示. 设矩形的一边长为 x 米，根据题意可列方程 ()



- A. $5x^2 = 6$ B. $5(1+x^2) = 6$ C. $x(5-x) = 6$ D. $5(1+x)^2 = 6$

9. 如图， PA 与 $\odot O$ 相切于点 A ， PO 的延长线交 $\odot O$ 于点 C . $AB \parallel PC$ ，且交 $\odot O$ 于点 B . 若 $\angle P = 30^\circ$ ，则 $\angle BCP$ 的大小为 ()



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 75°

10. 已知点 $A(-2, y_1), B(1, y_2)$ 在抛物线 $y = 3x^2 + bx + 1$ 上，若 $3 < b < 4$ ，则下列判断正确的是 ()

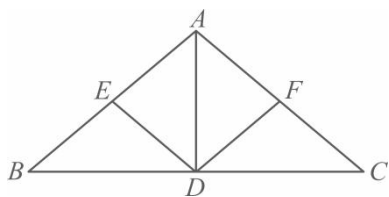
- A. $1 < y_1 < y_2$ B. $y_1 < 1 < y_2$ C. $1 < y_2 < y_1$ D. $y_2 < 1 < y_1$

二、填空题：本题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分.

11. 为响应“体重管理年”有关倡议，小敏对自己的体重进行了跟踪统计. 为方便记录，他将体重增加 1.5kg

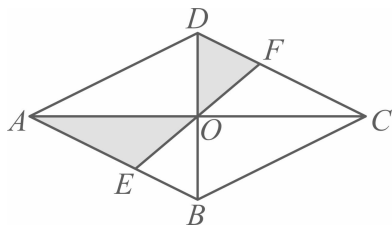
记作+1.5，那么体重减少1kg应记作_____.

12. 某房梁如图所示，立柱 $AD \perp BC$ ， E, F 分别是斜梁 AB, AC 的中点. 若 $AB = AC = 8\text{m}$ ，则 DE 的长为_____m.



13. 若反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象过点 $(-2, 1)$ ，则常数 $k =$ _____.

14. 如图，菱形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O ， EF 过点 O 且与边 AB, CD 分别相交于点 E, F . 若 $OA = 2, OD = 1$ ，则 $\triangle AOE$ 与 $\triangle DOF$ 的面积之和为_____.



15. 某公司为选拔英语翻译员，举行听、说、读、写综合测试，其中听、说、读、写各项成绩（百分制）按 4:3:2:1 的比例计算最终成绩. 参与选拔的甲、乙两位员工的听、说、读、写各项测试成绩及最终成绩如下表:

项目 员工	听	说	读	写	最终成绩
甲	A	70	80	90	82
乙	B	90	80	70	82

由以上信息，可以判断 A, B 的大小关系是 A _____ B . (填 “>” “=” 或 “<”)

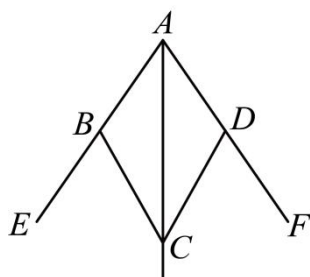
16. 弹簧秤是根据胡克定律并利用物体的重力来测量物体质量的. 胡克定律为：在弹性限度内，弹簧弹力 F 的大小与弹簧伸长（或压缩）的长度 x 成正比，即 $F = kx$ ，其中 k 为常数，是弹簧的劲度系数；质量为 m 的物体重力为 mg ，其中 g 为常数. 如图，一把弹簧秤在不挂任何物体时弹簧的长度为 6 厘米. 在其弹性限度内：当所挂物体的质量为 0.5 千克时，弹簧长度为 6.5 厘米，那么，当弹簧长度为 6.8 厘米时，所挂物体的质量为_____千克.



三、解答题：本题共 9 小题，共 86 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 计算： $2^0 + |1 - \sqrt{2}| - \sqrt{8}$

18. 如图，点 E, F 分别在 AB, AD 的延长线上， $\angle CBE = \angle CDF, \angle ACB = \angle ACD$. 求证： $AB = AD$.



19. 先化简，再求值： $\left(2 + \frac{1-a}{a}\right) \div \frac{a^2 + 2a + 1}{a}$, 其中 $a = \sqrt{5} - 1$.

20. 甲、乙两人是新华高级中学数学兴趣小组成员。以下是他们在参加高中数学联赛预备队员集训期间的测试成绩及当地近五年高中数学联赛的相关信息。

信息一：甲、乙两人集训期间的测试成绩（单位：分）

日期	2月	2月	3月	3月	3月	4月	4月	4月	5月	5月
队员	10日	21日	5日	14日	25日	7日	17日	27日	8日	20日
甲	75	80	73	81	90	83	85	92	95	96
乙	82	83	86	82	92	83	87	86	84	85

其中，甲、乙成绩的平均数分别是 $\bar{x}_{\text{甲}} = 85, \bar{x}_{\text{乙}} = 85$ ；方差分别是 $s_{\text{甲}}^2 = 58.4, s_{\text{乙}}^2 = a$.

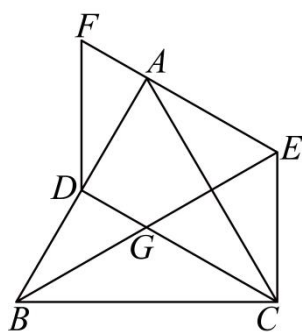
信息二：当地近五年高中数学联赛获奖分数线（单位：分）

年份	2020	2021	2022	2023	2024
获奖分数线	90	89	90	89	90

试根据以上信息及你所学的统计学知识，解决以下问题：

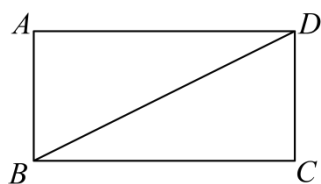
- (1) 计算 a 的值, 并根据平均数与方差对甲、乙的成绩进行评价;
- (2) 计算当地近五年高中数学联赛获奖分数线的平均数, 并说明: 若要从中选择一人参加高中数学联赛, 选谁更合适;
- (3) 若要从中选择一人参加进一步的培养, 从发展潜能的角度考虑, 你认为选谁更合适? 为什么?

21. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, D 是 AB 的中点, $CE \perp BC$, 垂足为 C , EF 是由 CD 沿 CE 方向平移得到的. 已知 EF 过点 A , BE 交 CD 于点 G .



- (1) 求 $\angle DCE$ 的大小;
- (2) 求证: $\triangle CEG$ 是等边三角形.

22. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB < AD$.



- (1) 求作正方形 $EFGH$, 使得点 E, G 分别落在边 AD, BC 上, 点 F, H 落在 BD 上; (要求: 尺规作图, 不写作法, 保留作图痕迹)
- (2) 若 $AB = 2, AD = 4$, 求 (1) 中所作的正方形的边长.

23. 在平面直角坐标系中, 二次函数 $y = ax^2 + bx - 2$ 的图象过点 $A(1, t), B(2, t)$.

- (1) 求 $\frac{b}{a}$ 的值;
- (2) 已知二次函数 $y = ax^2 + bx - 2$ 的最大值为 $1 - \frac{3}{4}a^2$.

①求该二次函数的表达式;

②若 $M(x_1, m), N(x_2, m)$ 为该二次函数图象上的不同两点, 且 $m \neq 0$, 求证: $\frac{(x_1 - 1)^2}{m} = \frac{x_2 - 2}{x_1 - 2}$.

24. 阅读材料, 回答问题.

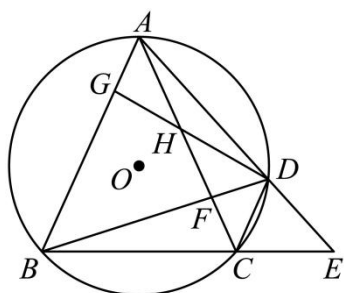
主	两个正数的积与商的位数探究
---	---------------

题	
提出问题	小明是一位爱思考的小学生. 一次, 在完成多位数的乘法时, 他根据算式 “$46 \times 2 = 92; 35 \times 21 = 735; 663 \times 11 = 7293; 186 \times 362 = 67332$”, 猜想: m 位的正整数与 n 位的正整数的乘积是一个 $(m+n-1)$ 位的正整数.
分析探究	问题 1 小明的猜想是否正确? 若正确, 请给予证明; 否则, 请举出反例
推广延伸	小明的猜想激发了初中生小华的探究热情. 为了使问题的研究推广到有理数的乘法, 进而迁移到对除法的研究, 小华将数的“位数”与“数字”的概念进行推广, 规定: 如果一个正数用科学记数法表示为 $a \times 10^n$, 则称这个数的位数是 $n+1$, 数字是 a. 借此, 小华研究了两个数乘积的位数问题, 提出并证明了以下命题. 命题: 若正数 A, B, C 的位数分别为 m, n, p, 数字分别为 a, b, c, 且 $A \times B = C$, 则必有 $c \geq a$ 且 $c \geq b$, 或 $c < a$ 且 $c < b$. 并且, 当 $c \geq a$ 且 $c \geq b$ 时, $p = m + n - 1$; 当 $c < a$ 且 $c < b$ 时, $p = m + n$. 证明: 依题意知, A, B, C 用科学记数法可分别表示为 $a \times 10^{m-1}, b \times 10^{n-1}, c \times 10^{p-1}$, 其中 a, b, c 均为正数. 由 $A \times B = C$, 得 $ab \times 10^{m+n-2} = c \times 10^{p-1}$, 即 $\frac{ab}{c} = 10^{p-m-n+1}$. (*) 当 $c \geq a$ 且 $c \geq b$ 时, “$\frac{a}{c} \leq 1$, 所以 $\frac{ab}{c} \leq b < 10$, 又 $\frac{ab}{c} \geq \frac{a}{c} > \frac{1}{10}$, 所以 $\frac{1}{10} < \frac{ab}{c} < 10$. 由 (*) 知, $\frac{ab}{c} = 1$, 所以 $p = m + n - 1$; 当 $c \geq a$ 且 $c < b$ 时, $\begin{cases} \frac{a}{c} \leq 1 \\ \frac{b}{c} > 1 \end{cases}$, 所以 $\begin{cases} \frac{ab}{c} \leq b < 10 \\ \frac{ab}{c} > a \geq 1 \end{cases}$ 所以 $1 < \frac{ab}{c} < 10$,

	与 (*) 矛盾, 不合题意; 当 $c < a$ 且 $c \geq b$ 时, _____ ① _____; 当 $c < a$ 且 $c < b$ 时, _____ ② _____. 综上所述, 命题成立.
拓展 迁移	问题 2 若正数 A, B 的位数分别为 m, n, 那么 $\frac{A}{B}$ 的位数是多少? 证明你的结论.

- (1) 解决问题 1;
- (2) 请把①②所缺的证明过程补充完整;
- (3) 解决问题 2.

25. 如图, 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, AD, BC 的延长线相交于点 E , AC, BD 相交于点 F . G 是 AB 上一点, GD 交 AC 于点 H , 且 $AB = AC, BG = DG$.



- (1) 求证: $\angle ABC = \angle DBE + \angle E$;
- (2) 求证: $AH^2 = HF \cdot HC$;
- (3) 若 $\tan \angle ABC = \sqrt{5}, AD = 2DE, CD = \sqrt{6}$, 求 $\triangle AGH$ 的周长.

