

2025 年兰州市初中学业水平考试

数 学

注意事项:

1. 全卷共 120 分. 考试时间 120 分钟.
2. 考生必须将姓名、准考证号、考场号、座位号等个人信息填(涂)写在试卷及答题卡上.
3. 考生务必将答案直接填(涂)写在答题卡的相应位置上.
4. 考试结束后, 将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题 (本大题共 11 小题, 每小题 3 分, 共 33 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的)

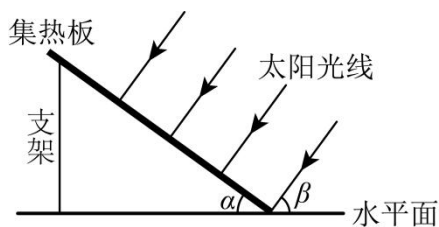
1. 下列各数中, 最小的数是 ()

- A. -2 B. 0 C. 1 D. 2

2. 计算: $\sqrt{3} \times \sqrt{2} =$ ()

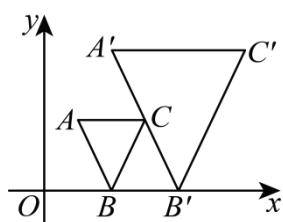
- A. 6 B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{5}$ D. 1

3. 如图是集热板示意图, 集热板与太阳光线垂直时, 光能利用率最高. 春分日兰州正午太阳光线与水平面的夹角 β 为 54° . 若光能利用率最高, 则集热板与水平面夹角 α 度数是 ()



- A. 26° B. 30° C. 36° D. 54°

4. 如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 位似, 位似中心是原点 O , 已知 $BC:B'C'=1:2$, 则 $B(2,0)$ 的对应点 B' 的坐标是 ()



- A. $(3,0)$ B. $(4,0)$ C. $(6,0)$ D. $(8,0)$

5. 图 1 是通过平面图形的镶嵌所呈现的图案, 图 2 是其局部放大示意图, 由正六边形、正方形和正三角形

构成，它的轮廓为正十二边形，则图 2 中 $\angle ABC$ 的大小是 ()

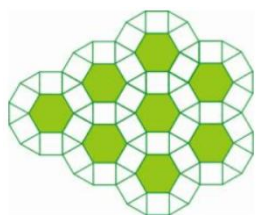


图1

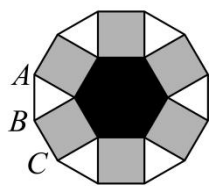


图2

- A. 90° B. 120° C. 135° D. 150°

6. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2 + 2x + a = 0$ 有两个不相等的实数根，则 a 的值可以是 ()

- A. 3 B. 2 C. 1 D. 0

7. 若点 $A(2, y_1)$ 与 $B(-2, y_2)$ 在反比例函数 $y = \frac{2}{x}$ 的图象上，则 y_1 与 y_2 的大小关系是 ()

- A. $y_1 < y_2$ B. $y_1 \leq y_2$ C. $y_1 > y_2$ D. $y_1 \geq y_2$

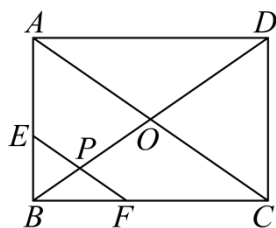
8. 现有甲、乙两个不透明盒子，其中甲盒装有分别写着 d, t, l 的三张声母卡片，乙盒装有分别写着 a, e, i 的三张韵母卡片（卡片除汉语拼音字母外，其余完全相同），若小明分别从甲、乙盒中随机各抽取一张卡片，则两张卡片刚好拼成“德”字读音的概率是 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

9. 《九章算术》是中国传统数学最重要的数学著作之一，“方程章”第 11 题大意是：两匹马一头牛总价超过 1 万，超过部分等于半匹马的价格；一匹马两头牛的总价不足 1 万，不足部分等于半头牛的价格，问一匹马、一头牛的价格分别是多少？若设一匹马价格为 x ，一头牛价格为 y ，则可列方程组为 ()

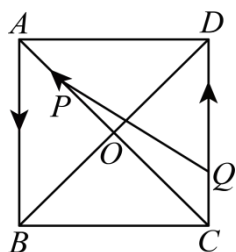
- A.
$$\begin{cases} 2x + y - 10000 = \frac{1}{2}x \\ 10000 - (x + 2y) = \frac{1}{2}y \end{cases}$$
 B.
$$\begin{cases} 10000 - (2x + y) = \frac{1}{2}x \\ x + 2y - 10000 = \frac{1}{2}y \end{cases}$$
- C.
$$\begin{cases} x + 2y - 10000 = \frac{1}{2}x \\ 10000 - (2x + y) = \frac{1}{2}y \end{cases}$$
 D.
$$\begin{cases} 2x + y = \frac{1}{2}x \\ x + 2y = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

10. 如图，四边形 $ABCD$ 是矩形，对角线 AC, BD 相交于点 O ，点 E, F 分别在边 AB, BC 上，连接 EF 交对角线 BD 于点 P 。若 P 为 EF 的中点， $\angle ADB = 35^\circ$ ，则 $\angle DPE =$ ()



- A. 95° B. 100° C. 110° D. 145°

11. 如图, 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = 2\text{cm}$, 对角线 AC , BD 相交于点 O , 动点 P 从点 O 出发沿 $O \rightarrow A \rightarrow B$ 方向以 $\sqrt{2}\text{cm/s}$ 的速度运动, 同时点 Q 从点 C 出发沿 $C \rightarrow D$ 方向以 1cm/s 的速度运动, 当点 Q 到达点 D 时, P , Q 同时停止运动. 若运动时间为 x (s), $\triangle CPQ$ 的面积为 $y(\text{cm}^2)$, 则点 P 分别在 OA , AB 上运动时, y 与 x 的函数关系分别是 ()



- A. 均为一次函数 B. 一次函数, 二次函数
C. 均为二次函数 D. 二次函数, 一次函数

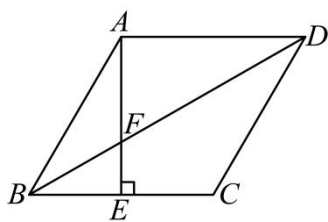
二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

12. 因式分解: $2x^2 + 4x + 2 =$ _____.

13. 射箭运动项目中, 新手成绩通常不太稳定. 甲和乙同时进行 12 次射箭练习后, 成绩的统计数据如下表, 请根据表中信息估计新手是_____. (填写“甲”或“乙”)

	甲	乙
平均成绩 $\bar{x}$ (单位: 环)	6.58	7.67
方差 s^2	6.91	0.72

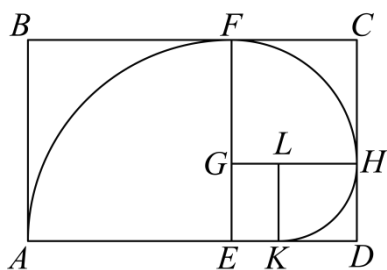
14. 如图, 在菱形 $ABCD$ 中, $AE \perp BC$, 垂足为 E , 交 BD 于点 F , $BE = CE$. 若 $AB = 4\sqrt{3}$, 则 $AF =$ _____.



15. 如图, 黄金矩形 $ABCD$ 中 $\frac{AB}{AD} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, 以宽 AB 为边在其内部作正方形 $ABFE$, 得到四边形 $CDEF$

是黄金矩形, 依此作法, 四边形 $DEGH$, 四边形 $KEGL$ 也是黄金矩形. 依次以点 E, G, L 为圆心作 $\widehat{AF}$,

$\widehat{FH}$, $\widehat{HK}$, 曲线 $AFHK$ 叫做“黄金螺线”. 若 $AD=2$, 则“黄金螺线” $AFHK$ 的长为_____. (结果用 π 表示)



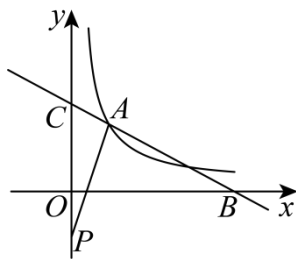
三、解答题 (本大题共 11 小题, 共 75 分. 解答时写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

16. 计算: $(a+2)(a-2)+a(3-a)$.

17. 解方程: $\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x}$.

18. 解不等式组: $\begin{cases} 3x-3 < x+7 \\ x-4 > \frac{x-5}{2} \end{cases}$.

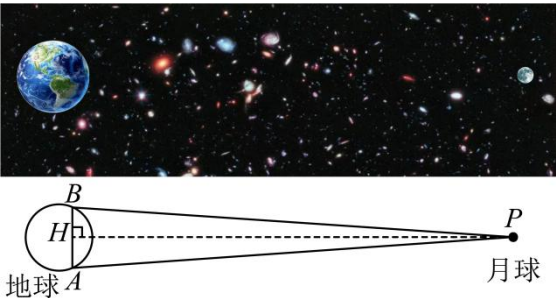
19. 如图, 在平面直角坐标系中, 一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x > 0)$ 的图象相交于点 $A(m, 3)$, 与 x 轴相交于点 $B(8, 0)$, 与 y 轴相交于点 C .



(1) 求一次函数 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的解析式;

(2) 点 P 为 y 轴负半轴上一点, 连接 AP . 若 $\triangle ACP$ 的面积为 6, 求点 P 的坐标.

20. 天文学家运用三角函数解决了曾困扰古人数百年的难题. 某天文研究小组探究用三角函数知识计算月球与地球之间距离的方法, 通过查阅资料、实际观测、获得数据和计算数据, 得出月球与地球之间的近似距离. 具体研究方法与过程如下表:

问题	月球与地球之间的距离约为多少?
工具	天文望远镜、天文经纬仪等
月球、地球的实物图与平面示意图	
	
说明	为了便于观测月球, 在地球上先确定两个观测点 A, B, 以线段 AB 作为基准线, 再借助天文经纬仪从 A, B 两点同时观测月球 P (将月球抽象为一个点), 并测得 $\angle ABP$ 和 $\angle BAP$ 的度数. 根据实际问题画出平面示意图 (如上图), 过点 P 作 $PH \perp AB$ 于点 H, 连接 AP, BP.
数据	$AB \approx 0.8$ 万千米, $\angle ABP = 89^{\circ}25'37.43''$, $\angle BAP = 89^{\circ}22'38.09''$.

根据以上信息, 求月球与地球之间的近似距离 PH . (结果精确到 1 万千米)

(参考数据: $\tan 89^{\circ}25'37.43'' \approx 100.00$, $\tan 89^{\circ}22'38.09'' \approx 92.00$, $\sin 89^{\circ}25'37.43'' \approx 0.99995$, $\sin 89^{\circ}22'38.09'' \approx 0.99994$, $\cos 89^{\circ}25'37.43'' \approx 0.00999$, $\cos 89^{\circ}22'38.09'' \approx 0.01087$)

21. 综合与实践

在学校项目化学习中, 某研究小组开展主题为“生长素浓度对植物种子发芽率的影响”的研究. 请你阅读以下材料, 解决“数学建模”中的问题.

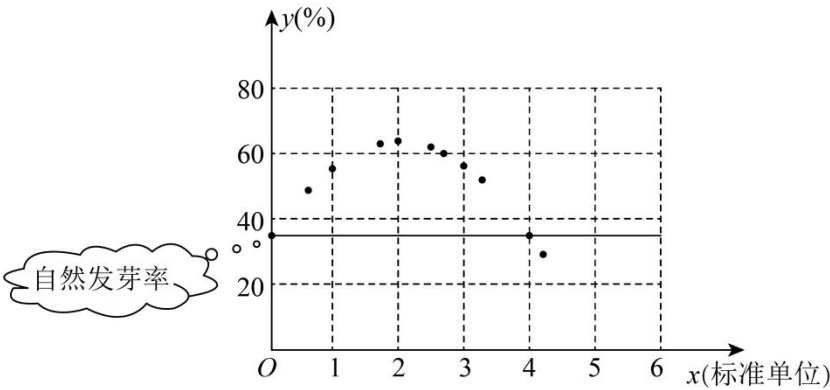
【研究背景】 已知一定浓度的生长素既能促进种子发芽, 也会因浓度过高抑制种子发芽. 探索生长素使用的适宜浓度等最优化问题, 可以借助数学模型进行解决.

【数据收集】 研究小组选择某类植物种子和生长素, 以生长素浓度 x (标准单位) 为自变量, 种子的发芽率 y (%) 为因变量, 进行“生长素浓度对植物种子发芽率的影响”的实验, 获得相关数据:

生长	0	0.6	1	1.7	2	2.5	2.7	3	3.3	4	4.2
----	---	-----	---	-----	---	-----	-----	---	-----	---	-----

素浓度: x (标准单位)											
发芽率 y (%)	35.00	49.28	56.00	62.37	63.00	61.25	59.57	56.00	51.17	35.00	29.12

【数据分析】如图，小组成员以表中各组对应值作为点的坐标，在平面直角坐标系中描出相应的点.



- 说明：①当生长素浓度 $x = 0$ 时，种子的发芽率为自然发芽率；
- ②当发芽率大于等于零且小于自然发芽率时，该生长素抑制种子发芽；
- ③当生长素抑制种子发芽，使得发芽率减小到 0 时，停止实验.

【数学建模】请你结合所学知识解决下列问题：

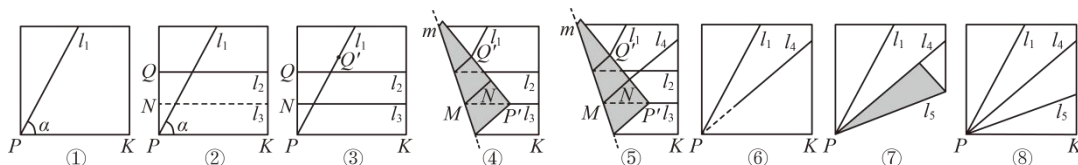
- 观察上述各点的分布规律，判断 y 关于 x 的函数类型，并求出该函数的表达式；
- 请计算抑制种子发芽时的生长素浓度范围.

22. “三等分角”是两千多年来数学史上最著名的古典四大问题之一，阿基米德等数学家通过巧妙的几何作图得到了解决“三等分角”问题的特例方法. 某数学兴趣小组通过折纸与尺规作图相结合的方法探究“三等分锐角”问题的解法，解决过程如下：

操作步骤与演示图形

如图①，已知一个由正方形纸片的边 PK 与经过顶点 P 的直线 l_1 构成的锐角 α . 按照以下步骤进行操作：

任意折出一条水平折痕 l_2 , l_2 与纸片左边交点为 Q ; 再折叠将 PK 与 l_2 重合得到折痕 l_3 , l_3 与纸片左边交点为 N , 如图②.	→	折叠使点 Q, P 分别落在 l_1 和 l_3 上, 得到折痕 m , 对应点为 Q' , P' , m 交 l_3 于 M , 如图③④.	→	保持纸片折叠, 再沿 MN 折叠, 得到折痕 l_4 的一部分, 如图⑤.	→	将纸片展开, 再沿 l_4 折叠得到经过点 P 的完整折痕 l_4 , 如图⑥.	→	将纸片折叠使边 PK 与 l_4 重合, 折痕为 l_5 . 则直线 l_4 和 l_5 就是锐角 α 的三等分线, 如图⑦⑧.
--	---	---	---	---	---	--	---	---



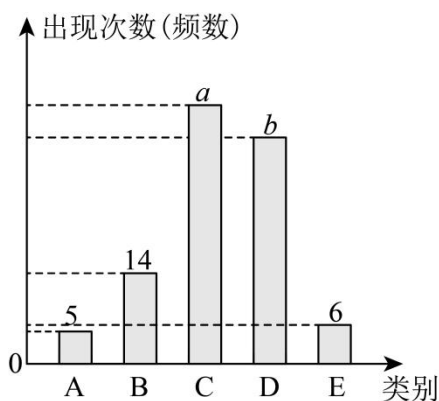
解决问题	(1) 请依据操作步骤与演示图形, 通过尺规作图完成以下两个作图任务: (保留作图痕迹, 不写作法) 任务一: 在图③中, 利用已给定的点 Q' 作出点 P' ; 任务二: 在图⑥中作出折痕 l_5 . (2) 若锐角 α 为 75° , 则图⑤中 l_2 与 l_4 相交所成的锐角是 _____ $^\circ$.
------	--

23. 豌豆荚里有几粒豆子不确定, 那么豆子粒数是否有规律? 同学们对这个问题很感兴趣. 为此, 调查小组从一批豌豆荚中随机抽取了若干个豌豆荚, 进行豆子粒数的统计, 以下是本次调查的过程.

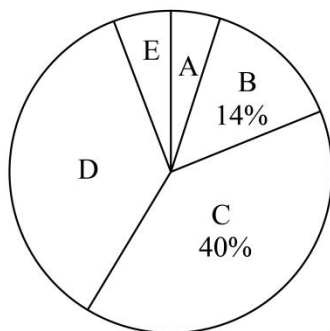
【收集数据】 打开每个豌豆荚, 数清其中的豆子 (直径大于 3 毫米) 粒数, 记录数据.

【整理数据】 将收集的豆子粒数进行数据整理, 用 x 表示每个豌豆荚中的豆子粒数, 将数据分为 5 类: 其中 A 类 ($0 \leq x < 2$), B 类 ($2 \leq x < 4$), C 类 ($4 \leq x < 6$), D 类 ($6 \leq x < 8$), E 类 ($8 \leq x < 10$).

【描述数据】 根据整理的数据, 绘制出如下统计图.



豆子粒数出现次数的条形统计图

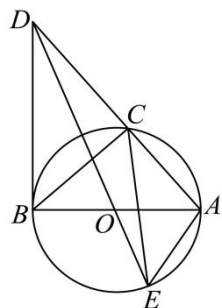


豆子粒数出现次数的扇形统计图

【分析数据】 根据以上信息，解答下列问题：

- 本次调查活动中随机抽取了_____个豌豆荚，图中 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $b = \underline{\hspace{2cm}}$ ；
- 所调查豆子粒数的中位数落在_____类中；（只填写字母）
- 如果甲同学调查了 20 个豌豆荚，其中 B 类有 7 个，乙同学调查了 10 个豌豆荚，其中 D 类有 3 个．能否得到 B 类豌豆荚一定比 D 类豌豆荚多的规律？请说明理由．

24. 如图， $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆， AB 是 $\odot O$ 的直径，过点 B 的切线交 AC 的延长线于点 D ，连接 DO 并延长，交 $\odot O$ 于点 E ，连接 AE ， CE ．



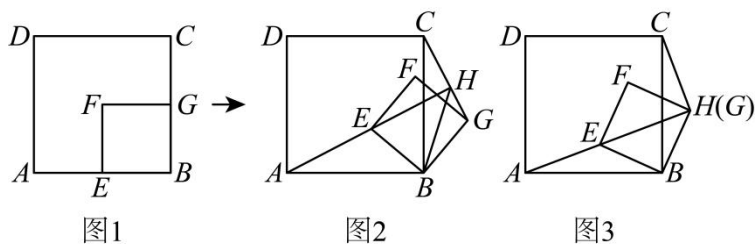
- 求证： $\angle ADB = \angle AEC$ ；
- 若 $AB = 4$ ， $\cos \angle AEC = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，求 OD 的长．

25. **【提出问题】** 数学讨论课上，小明绘制图 1 所示的图形，正方形 $ABCD$ 与正方形 $BEFG$ ($AB > BE$)，点 E ， G 分别在 AB ， BC 上，根据图形提出问题：如图 2，正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)，直线 AE 与 CG 相交于点 H ，连接 BH ，探究线段 AH ， BH ， CH 之间的数量关系．

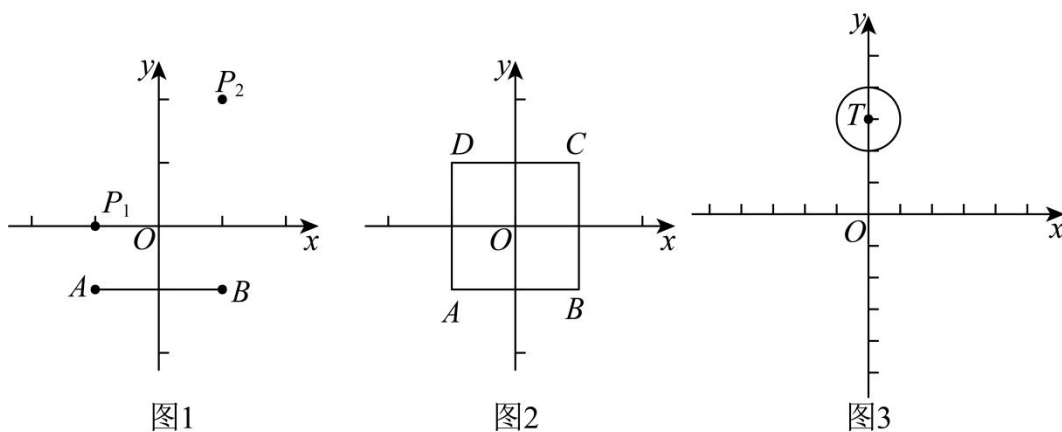
【解决问题】 (1) 小明将上述问题特殊化，如图 3，当点 G ， H 重合时，请你写出 AH ， BH ， CH 之间的数量关系，并说明理由；

(2) 小明借鉴 (1) 中特殊化的解题策略后，再解决图 2 所示的一般化问题，当点 G ， H 不重合时，请你写出 AH ， BH ， CH 之间的数量关系，并说明理由；

【拓展问题】 (3) 小明将图 2 所示问题中的旋转角 α 的范围再扩大，正方形 $BEFG$ 绕点 B 顺时针旋转，旋转角为 α ($180^\circ < \alpha < 360^\circ$)，直线 AE 与 CG 相交于点 H ，连接 BH ，请直接写出 AH ， BH ， CH 之间的数量关系.



26. 在平面直角坐标系 xOy 中，对于图 W 上或内部有一点 N (不与原点 O 重合)，及平面内一点 P ，给出如下定义：若点 P 关于直线 ON 的对称点 P' 在图 W 上或内部，则称点 P 是图 W 的“映射点”.



- (1) 如图 1，已知图 W_1 ：线段 AB ， $A(-1, -1)$ ， $B(1, -1)$. 在 $P_1(-1, 0)$ ， $P_2(1, 2)$ 中，_____是图 W_1 的“映射点”；
- (2) 如图 2，已知图 W_2 ：正方形 $ABCD$ ， $A(-1, -1)$ ， $B(1, -1)$ ， $C(1, 1)$ ， $D(-1, 1)$. 若直线： $l: y = x + b$ 上存在点 P 是图 W_2 的“映射点”，求 b 的最大值；
- (3) 如图 3，已知图 W_3 ： T ，圆心为 $T(0, t)$ ，半径为 1. 若 x 轴上存在点 P 是图 W_3 的“映射点”，请直接写出 t 的取值范围.

