

2023 年兰州市初中学业水平考试

数 学

注意事项:

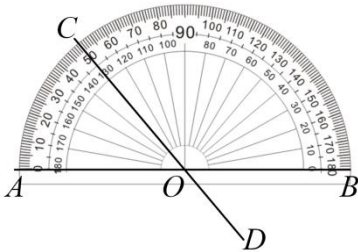
1. 全卷共 120 分, 考试时间 120 分钟.
2. 考生必须将姓名、准考证号、考场号、座位号等个人信息填(涂)写在答题卡上.
3. 考生务必将答案直接填(涂)写在答题卡的相应位置上.

一、选择题 (本大题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分)

1. -5 的相反数是()

- A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. 5 D. -5

2. 如图, 直线 AB 与 CD 相交于点 O , 则 $\angle BOD =$ ()



- A. 40° B. 50° C. 55° D. 60°

3. 计算: $\frac{a^2-5a}{a-5} =$ ()

- A. $a-5$ B. $a+5$ C. 5 D. a

4. 如图 1 是我国古建筑墙上采用的八角形空窗, 其轮廓是一个正八边形, 窗外之境如同镶嵌于一个画框之中. 如图 2 是八角形空窗的示意图, 它的一个外角 $\angle 1 =$ ()

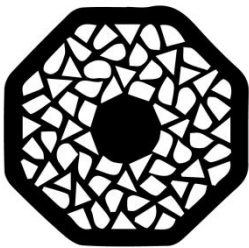


图1

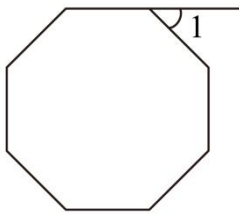


图2

- A. 45° B. 60° C. 110° D. 135°

5. 方程 $\frac{2}{x+3} = 1$ 的解是 ()

- A. $x=1$ B. $x=-1$ C. $x=5$ D. $x=-5$

6. 如图 1 是一段弯管，弯管的部分外轮廓线如图 2 所示是一条圆弧 $\widehat{AB}$ ，圆弧的半径 $OA = 20\text{cm}$ ，圆心角 $\angle AOB = 90^\circ$ ，则 $AB =$ ()

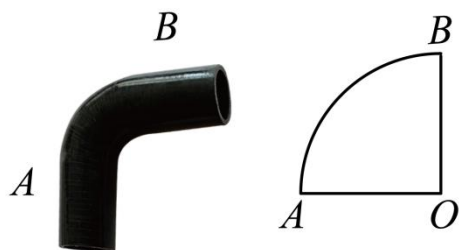


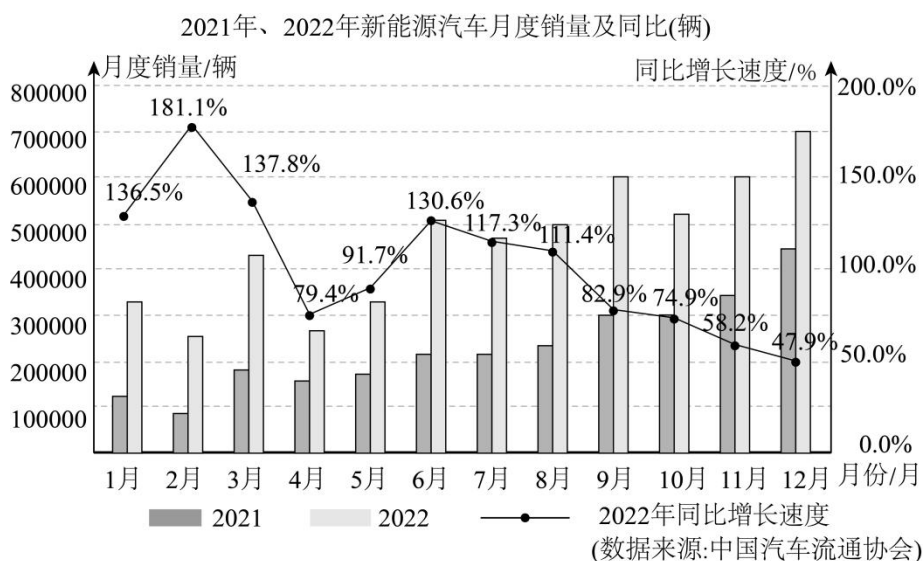
图1

图2

- A. $20\pi\text{ cm}$ B. $10\pi\text{ cm}$ C. $5\pi\text{ cm}$ D. $2\pi\text{ cm}$
7. 已知二次函数 $y = -3(x-2)^2 - 3$ ，下列说法正确的是 ()
- A. 对称轴为 $x = -2$ B. 顶点坐标为 $(2, 3)$ C. 函数的最大值是 -3 D. 函数的最小值是 -3
8. 关于 x 的一元二次方程 $x^2 + bx + c = 0$ 有两个相等的实数根，则 $b^2 - 2(1 + 2c) =$ ()
- A. -2 B. 2 C. -4 D. 4

9. 2022 年我国新能源汽车销量持续增长，全年销量约为 572.6 万辆，同比增长 91.7%，连续 8 年位居全球第一。下面的统计图反映了 2021 年、2022 年新能源汽车月度销量及同比增长速度的情况。（2022 年同比增长速度 = $\frac{2022\text{年当月销量} - 2021\text{年当月销量}}{2021\text{年当月销量}} \times 100\%$ ）根据统计图提供的信息，下列推断不合理的是

()

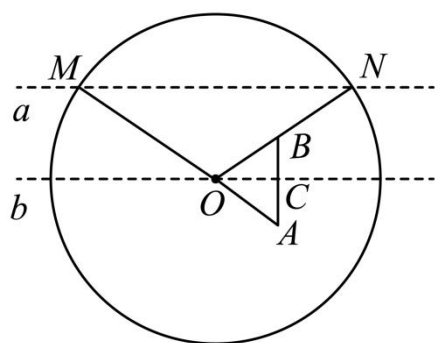


- A. 2021 年新能源汽车月度销量最高是 12 月份，超过 40 万辆
- B. 2022 年新能源汽车月度销量超过 50 万辆的月份有 6 个

C. 相对于 2021 年, 2022 年新能源汽车同比增长速度最快的是 2 月份, 达到了 181.1%

D. 相对于 2021 年, 2022 年从 5 月份开始新能源汽车同比增长速度持续降低

10. 我国古代天文学确定方向的方法中蕴藏了平行线的作图法. 如《淮南子天文训》中记载: “正朝夕: 先树一表东方; 操一表却去前表十步, 以参望日始出北廉. 日直入, 又树一表于东方, 因西方之表, 以参望日方入北康. 则定东方两表之中与西方之表, 则东西也.” 如图, 用几何语言叙述作图方法: 已知直线 a 和直线外一定点 O , 过点 O 作直线与 a 平行. (1) 以 O 为圆心, 单位长为半径作圆, 交直线 a 于点 M, N ; (2) 分别在 MO 的延长线及 ON 上取点 A, B , 使 $OA = OB$; (3) 连接 AB , 取其中点 C , 过 O, C 两点确定直线 b , 则直线 $a \parallel b$. 按以上作图顺序, 若 $\angle MNO = 35^\circ$, 则 $\angle AOC =$ ()



A. 35°

B. 30°

C. 25°

D. 20°

11. 一次函数 $y = kx - 1$ 的函数值 y 随 x 的增大而减小, 当 $x = 2$ 时, y 的值可以是 ()

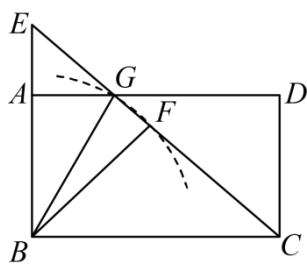
A. 2

B. 1

C. -1

D. -2

12. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, 点 E 为 BA 延长线上一点, F 为 CE 的中点, 以 B 为圆心, BF 长为半径的圆弧过 AD 与 CE 的交点 G , 连接 BG . 若 $AB = 4$, $CE = 10$, 则 $AG =$ ()



A. 2

B. 2.5

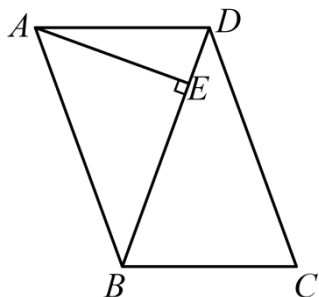
C. 3

D. 3.5

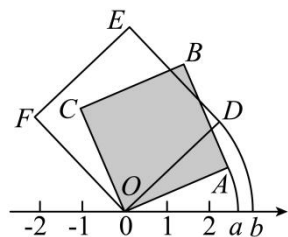
二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

13. 因式分解: $x^2 - 25y^2 =$ _____.

14. 如图, 在 $ABCD$ 中, $BD = CD$, $AE \perp BD$ 于点 E , 若 $\angle C = 70^\circ$, 则 $\angle BAE =$ _____ $^\circ$.



15. 如图, 将面积为 7 的正方形 $OABC$ 和面积为 9 的正方形 $ODEF$ 分别绕原点 O 顺时针旋转, 使 OA, OD 落在数轴上, 点 A, D 在数轴上对应的数字分别为 a, b , 则 $b - a = \underline{\hspace{2cm}}$.



16. 某学习小组做抛掷一枚瓶盖的实验, 整理的实验数据如下表:

累计抛掷 次数	50	100	200	300	500	1000	2000	3000	5000
盖面朝上 次数	28	54	106	158	264	527	1056	1587	2850
盖面朝上 频率	0.5600	0.5400	0.5300	0.5267	0.5280	0.5270	0.5280	0.5290	0.5300

下面有三个推断:

- ①通过上述实验的结果, 可以推断这枚瓶盖有很大的可能性不是质地均匀的;
- ②第 2000 次实验的结果一定是“盖面朝上”;
- ③随着实验次数的增大, “盖面朝上”的概率接近 0.53.

其中正确的是 . (填序号)

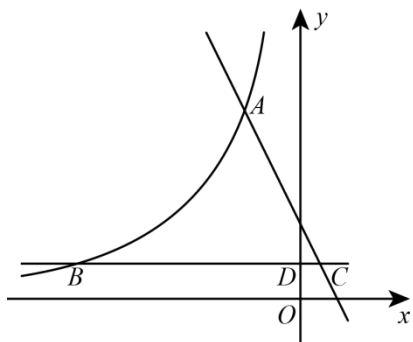
三、解答题 (本大题共 12 小题, 共 72 分)

17. 计算: $\sqrt{3} \times \sqrt{6} - \sqrt{8}$.

18. 计算: $(x+2y)(x-2y) - y(3-4y)$.

19. 解不等式组:
$$\begin{cases} 3x-1 > 2(x+1) \\ \frac{x+2}{3} > x-2 \end{cases}$$
.

20. 如图，反比例函数 $y = \frac{k}{x} (x < 0)$ 与一次函数 $y = -2x + m$ 的图象交于点 $A(-1, 4)$ ， $BC \perp y$ 轴于点 D ，分别交反比例函数与一次函数的图象于点 B ， C 。



(1) 求反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 与一次函数 $y = -2x + m$ 的表达式；

(2) 当 $OD = 1$ 时，求线段 BC 的长。

21. 综合与实践

问题探究：(1) 如图 1 是古希腊数学家欧几里得所著的《几何原本》第 1 卷命题 9：“平分一个已知角。”

即：作一个已知角的平分线，如图 2 是欧几里得在《几何原本》中给出的角平分线作图法：在 OA 和 OB 上分别取点 C 和 D ，使得 $OC = OD$ ，连接 CD ，以 CD 为边作等边三角形 CDE ，则 OE 就是 $\angle AOB$ 的平分线。

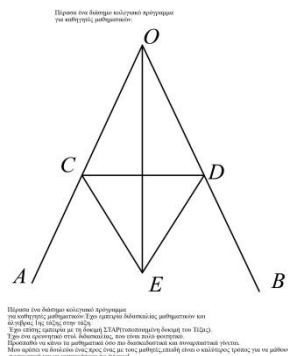


图1

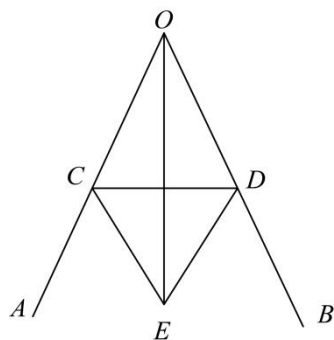


图2

请写出 OE 平分 $\angle AOB$ 的依据：_____；

类比迁移：

(2) 小明根据以上信息研究发现： $\triangle CDE$ 不一定必须是等边三角形，只需 $CE = DE$ 即可。他查阅资料：我国古代已经用角尺平分任意角。做法如下：如图 3，在 $\angle AOB$ 的边 OA ， OB 上分别取 $OM = ON$ ，移动角尺，使角尺两边相同刻度分别与点 M ， N 重合，则过角尺顶点 C 的射线 OC 是 $\angle AOB$ 的平分线，请说明此做法的理由；

拓展实践：

(3) 小明将研究应用于实践。如图 4，校园的两条小路 AB 和 AC ，汇聚形成了一个岔路口 A ，现在学校

要在两条小路之间安装一盏路灯 E ，使得路灯照亮两条小路（两条小路一样亮），并且路灯 E 到岔路口 A 的距离和休息椅 D 到岔路口 A 的距离相等。试问路灯应该安装在哪个位置？请用不带刻度的直尺和圆规在对应的示意图 5 中作出路灯 E 的位置。（保留作图痕迹，不写作法）

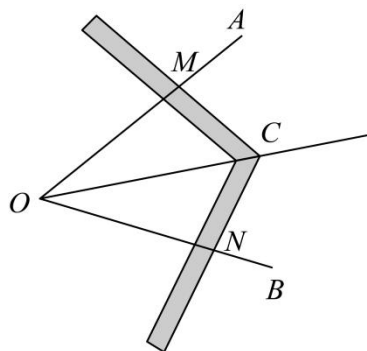


图3

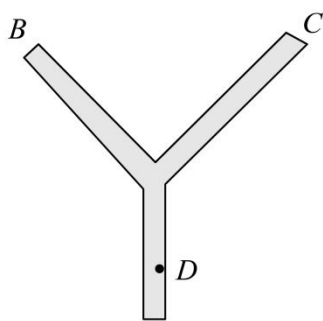


图4

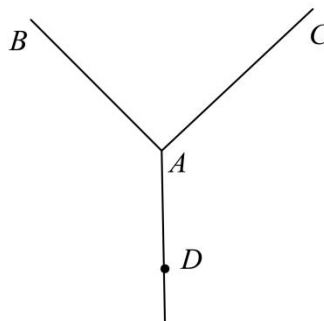


图5

22. 如图 1 是我国第一个以“龙”为主题的主题公园——“兰州龙源”。“兰州龙源”的“龙”字主题雕塑以紫铜铸造，如巨龙腾空，气势如虹，屹立在黄河北岸。某数学兴趣小组开展了测量“龙”字雕塑 CD 高度的实践活动。具体过程如下：如图 2，“龙”字雕塑 CD 位于垂直地面的基座 BC 上，在平行于水平地面的 A 处测得 $\angle BAC = 38^\circ$ 、 $\angle BAD = 53^\circ$ ， $AB = 18\text{m}$ 。求“龙”字雕塑 CD 的高度。（ B, C, D 三点共线， $BD \perp AB$ 。结果精确到 0.1m ）（参考数据： $\sin 38^\circ \approx 0.62$ ， $\cos 38^\circ \approx 0.79$ ， $\tan 38^\circ \approx 0.78$ ， $\sin 53^\circ \approx 0.80$ ， $\cos 53^\circ \approx 0.60$ ， $\tan 53^\circ \approx 1.33$ ）



图1

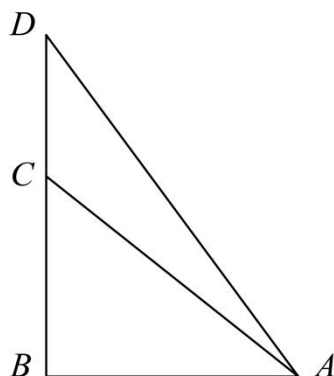
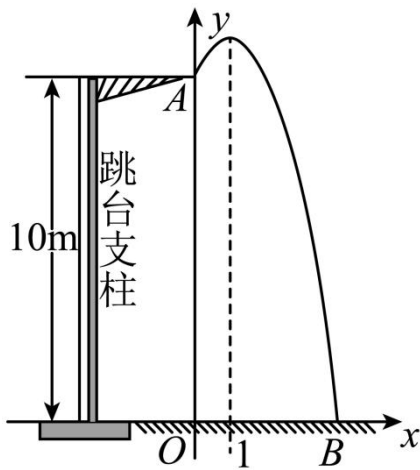


图2

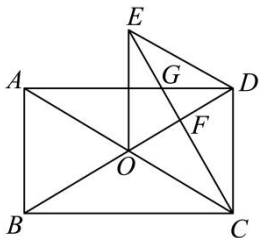
23. 一名运动员在 10m 高的跳台进行跳水，身体（看成一点）在空中的运动轨迹是一条抛物线，运动员离水面 OB 的高度 $y(\text{m})$ 与离起跳点 A 的水平距离 $x(\text{m})$ 之间的函数关系如图所示，运动员离起跳点 A 的水平距离为 1m 时达到最高点，当运动员离起跳点 A 的水平距离为 3m 时离水面的距离为 7m 。



(1) 求 y 关于 x 的函数表达式;

(2) 求运动员从起跳点到入水点的水平距离 OB 的长.

24. 如图, 矩形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于点 O , $CD \parallel OE$, 直线 CE 是线段 OD 的垂直平分线, CE 分别交 OD , AD 于点 F , G , 连接 DE .

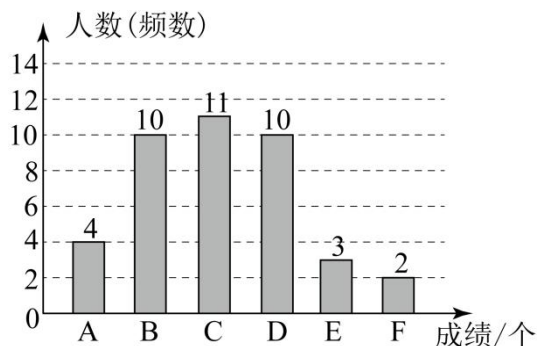


(1) 判断四边形 $OCDE$ 的形状, 并说明理由;

(2) 当 $CD = 4$ 时, 求 EG 的长.

25. 某校八年级共有男生 300 人, 为了解该年级男生排球垫球成绩和掷实心球成绩的情况, 从中随机抽取 40 名男生进行测试, 对数据进行了整理、描述和分析, 下面是给出的部分信息.

信息一: 排球垫球成绩如下图所示 (成绩用 x 表示, 分成六组: A. $x < 10$; B. $10 \leq x < 15$; C. $15 \leq x < 20$; D. $20 \leq x < 25$; E. $25 \leq x < 30$; F. $30 \leq x$).



信息二: 排球垫球成绩在 D. $20 \leq x < 25$ 这一组的是:

20, 20, 21, 21, 21, 22, 22, 23, 24, 24

信息三: 掷实心球成绩 (成绩用 y 表示, 单位: 米) 的人数 (频数) 分布表如下:

分组	$y < 6.0$	$6.0 \leq y < 6.8$	$6.8 \leq y < 7.6$	$7.6 \leq y < 8.4$	$8.4 \leq y < 9.2$	$9.2 \leq y$
人数	2	m	10	9	6	2

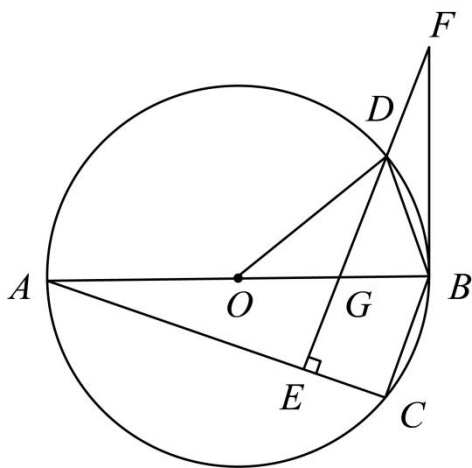
信息四：这次抽样测试中 6 名男生的两项成绩的部分数据如下：

学生	学生 1	学生 2	学生 3	学生 4	学生 5	学生 6
排球垫球	26	25	23	22	22	15
掷实心球	▲	7.8	7.8	▲	8.8	9.2

根据以上信息，回答下列问题：

- (1) 填空： $m =$ _____；
- (2) 下列结论正确的是_____；（填序号）
 - ①排球垫球成绩超过 10 个的人数占抽取人数的百分比低于 60%；
 - ②掷实心球成绩的中位数记为 n ，则 $6.8 \leq n < 7.6$ ；
 - ③若排球垫球成绩达到 22 个及以上时，成绩记为优秀．如果信息四中 6 名男生的两项成绩恰好为优秀的有 4 名，那么学生 3 掷实心球的成绩是优秀．
- (3) 若排球垫球成绩达到 22 个及以上时，成绩记为优秀，请估计全年级男生排球垫球成绩达到优秀的人数．

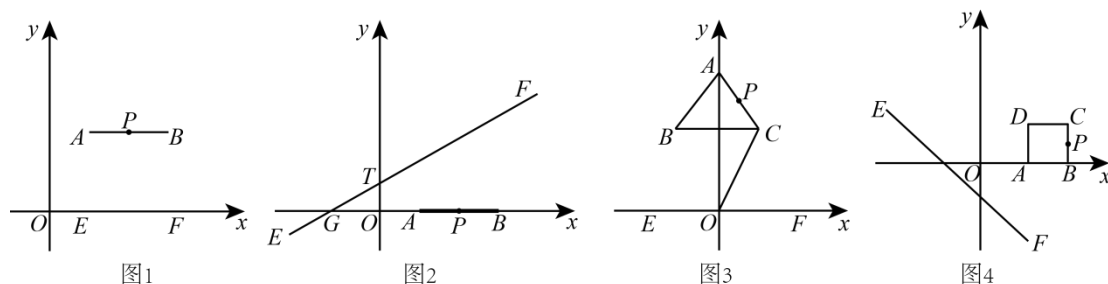
26. 如图， $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$ ， AB 是 $\odot O$ 的直径， $\widehat{BC} = \widehat{BD}$ ， $DE \perp AC$ 于点 E ， DE 交 BF 于点 F ，交 AB 于点 G ， $\angle BOD = 2\angle F$ ，连接 BD ．



- (1) 求证： BF 是 $\odot O$ 的切线；
- (2) 判断 $\triangle DGB$ 的形状，并说明理由；
- (3) 当 $BD = 2$ 时，求 FG 的长．

27. 在平面直角坐标系中, 给出如下定义: P 为图形 M 上任意一点, 如果点 P 到直线 EF 的距离等于图形 M 上任意两点距离的最大值时, 那么点 P 称为直线 EF 的“伴随点”.

例如: 如图 1, 已知点 $A(1,2)$, $B(3,2)$, $P(2,2)$ 在线段 AB 上, 则点 P 是直线 EF : x 轴的“伴随点”.



- (1) 如图 2, 已知点 $A(1,0)$, $B(3,0)$, P 是线段 AB 上一点, 直线 EF 过 $G(-1,0)$, $T\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 两点, 当点 P 是直线 EF 的“伴随点”时, 求点 P 的坐标;
- (2) 如图 3, x 轴上方有一等边三角形 ABC , $BC \perp y$ 轴, 顶点 A 在 y 轴上且在 BC 上方, $OC = \sqrt{5}$, 点 P 是 $\triangle ABC$ 上一点, 且点 P 是直线 EF : x 轴的“伴随点”. 当点 P 到 x 轴的距离最小时, 求等边三角形 ABC 的边长;
- (3) 如图 4, 以 $A(1,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ 为顶点的正方形 $ABCD$ 上始终存在点 P , 使得点 P 是直线 EF : $y = -x + b$ 的“伴随点”. 请直接写出 b 的取值范围.

28.

综合与实践

【思考尝试】

(1) 数学活动课上, 老师出示了一个问题: 如图 1, 在矩形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上一点, $DF \perp CE$ 于点 F , $GD \perp DF$, $AG \perp DG$, $AG = CF$. 试猜想四边形 $ABCD$ 的形状, 并说明理由;

【实践探究】

(2) 小睿受此问题启发, 逆向思考并提出新的问题: 如图 2, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上一点, $DF \perp CE$ 于点 F , $AH \perp CE$ 于点 H , $GD \perp DF$ 交 AH 于点 G , 可以用等式表示线段 FH , AH , CF 的数量关系, 请你思考并解答这个问题;

【拓展迁移】

(3) 小博深入研究小睿提出的这个问题, 发现并提出新的探究点: 如图 3, 在正方形 $ABCD$ 中, E 是边 AB 上一点, $AH \perp CE$ 于点 H , 点 M 在 CH 上, 且 $AH = HM$, 连接 AM , BH , 可以用等式表示线段 CM ,

BH 的数量关系，请你思考并解答这个问题.

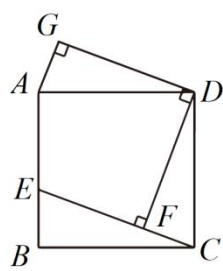


图1

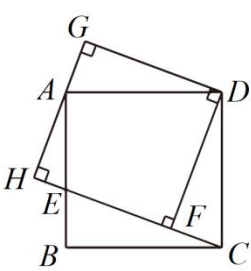


图2

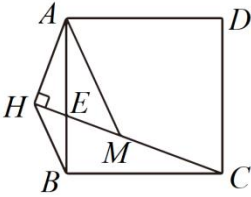


图3

