

数学试题卷

说明:

1. 本试题卷满分 120 分, 考试时间为 120 分钟.
2. 请按试题序号在答题卡相应位置作答, 答在试题卷或其它位置无效.

一、单项选择题 (本大题共 6 小题, 每小题 3 分, 共 18 分)

在每小题列出的四个备选项中只有一项是最符合题目要求的, 请将其代码填涂在答题卡相应位置. 错选、多选或未选均不得分.

1. 下列各数中, 是无理数的是 ()

A. 0 B. $\sqrt{2}$ C. 3.14 D. $\frac{2}{3}$

2. 在 1 个标准大气压下, 四种晶体的熔点如下表所示, 则熔点最高的是 ()

晶体	固态氢	固态氧	固态氮	固态酒精
熔点 (单位: $^{\circ}\text{C}$)	-259	-218	-210	-117

A. 固态氢 B. 固态氧 C. 固态氮 D. 固态酒精

3. 下列图案中, 是轴对称图形但不是中心对称图形的是 ()

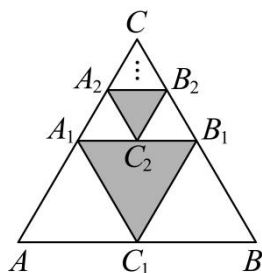


4. 某市为尽快了解义务教育阶段劳动课程开设及实施的情况, 现面向全市义务教育阶段的学校进行抽样调查, 下列抽样方式较合适的是 ()

A. 随机抽取城区三分之一的学校 B. 随机抽取乡村三分之一的学校

C. 调查全体学校 D. 随机抽取三分之一的学校

5. 如图, ABC 是面积为 1 的等边三角形, 分别取 AC , BC , AB 的中点得到 $\triangle A_1B_1C_1$; 再分别取 A_1C , B_1C , A_1B_1 的中点得到 $\triangle A_2B_2C_2$; $\cdots$ 依此类推, 则 $\triangle A_nB_nC_n$ 的面积为 ()



- A. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ B. $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ C. $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ D. $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

6. 在趣味跳高比赛中，规定跳跃高度与自己身高的比值最大的同学为获胜者. 甲、乙、丙、丁四位同学的跳跃高度与他们身高的关系示意图如图所示，则获胜的同学是（ ）



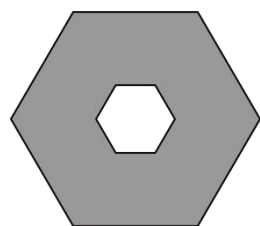
- A. 甲 B. 乙 C. 丙 D. 丁

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 3 分，共 18 分）

7. 化简： $\sqrt[3]{8} =$ _____

8. 因式分解： $a^2 - a =$ _____

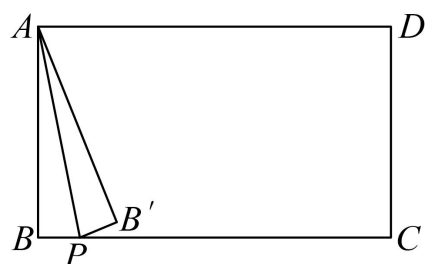
9. 如图，创意图案中间空白部分为正多边形，该正多边形的内角和为_____度.



10. 不等式 $-x+1>0$ 的解集为_____

11. 小美家有一辆燃油汽车和一辆纯电汽车，燃油汽车耗费 6000 元油费行驶的路程与纯电汽车耗费 1000 元电费行驶的路程相同，且每百公里的耗油费比耗电费约多 50 元，求纯电汽车每百公里的耗电费. 设纯电汽车每百公里的耗电费为 x 元，可列分式方程为_____

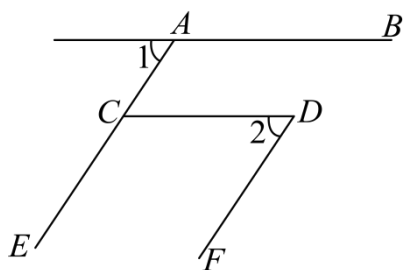
12. 如图，在矩形 $ABCD$ 纸片中，沿着点 A 折叠纸片并展开， AB 的对应边为 AB' ，折痕与边 BC 交于点 P . 当 AB' 与 AB ， AD 中任意一边的夹角为 15° 时， $\angle APB$ 的度数可以是_____



三、解答题（本大题共 5 小题，每小题 6 分，共 30 分）

13. (1) 计算: $|-3| + \left(\frac{1}{2}\right)^0 - (-1)$;

(2) 如图, 已知点 C 在 AE 上, $AB \parallel CD$, $\angle 1 = \angle 2$. 求证: $AE \parallel DF$.



14. 化简: $\left(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m-1}\right) \div \frac{m}{m^2 + 2m + 1}$

15. 如图, 在 6×5 的正方形网格中, 点 A, B, C 均在格点上, 请仅用无刻度直尺按下列要求完成作图. (保留作图痕迹)

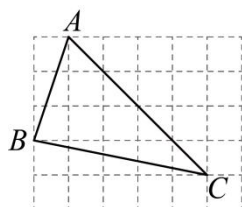


图1

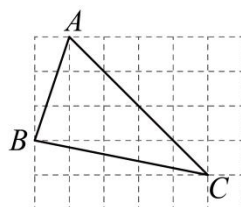


图2

(1) 在图 1 中作出 BC 的中点;

(2) 在图 2 中作出 ABC 的重心.

16. 校园数学文化节期间, 某班开展多轮开盲盒做游戏活动. 每轮均有四个完全相同的盲盒, 分别装着写有“幻方”、“数独”、“华容道”、“鲁班锁”游戏名称的卡片, 每位参与者只能抽取一个盲盒, 盲盒打开即作废.

(1) 若随机抽取一个盲盒并打开, 恰好装有“数独”卡片的事件是 ()

A. 必然事件 B. 随机事件 C. 不可能事件

(2) 若某轮只有小贤与小艺两位同学参加开盲盒游戏, 请用画树状图法或列表法, 求两人恰好抽中装着写有“华容道”和“鲁班锁”卡片盲盒的概率.

17. 如图, 点 A, B, C 在 $\odot O$ 上, $\angle ACB = 35^\circ$, 以 BA, BC 为边作 $\square ABCD$.

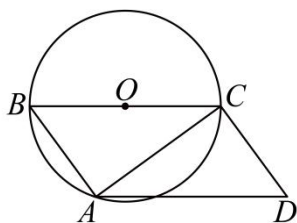


图1

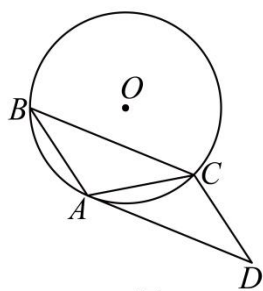


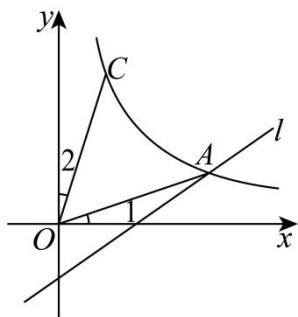
图2

(1) 当 BC 经过圆心 O 时 (如图 1), 求 $\angle D$ 的度数;

(2) 当 AD 与 $\odot O$ 相切时 (如图 2), 若 $\odot O$ 的半径为 6, 求 $\widehat{AC}$ 的长.

四、解答题 (本大题共 3 小题, 每小题 8 分, 共 24 分)

18. 如图, 直线 $l: y = \frac{2}{3}x + m$ 与反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象交于点 $A(6, 2)$.



(1) 求一次函数和反比例函数解析式;

(2) 将直线 l 向上平移, 在 x 轴上方与反比例函数图象交于点 C , 连接 OA , OC , 当 $\angle 1 = \angle 2$ 时, 求点 C 的坐标及直线 l 平移的距离.

19. 图 1 是一种靠墙玻璃淋浴房, 其俯视示意图如图 2 所示, AE 与 DE 两处是墙, AB 与 CD 两处是固定的玻璃隔板, BC 处是门框, 测得 $AB = BC = CD = 60\text{cm}$, $\angle ABC = \angle BCD = 135^\circ$, MN 处是一扇推拉门, 推动推拉门时, 两端点 M , N 分别在 BC , CD 对应的轨道上滑动. 当点 N 与点 C 重合时, 推拉门与门框完全闭合; 当点 N 滑动到限位点 P 处时, 推拉门推至最大, 此时测得 $\angle CNM = 6^\circ$



图1

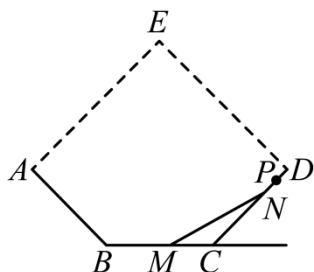


图2

(1) 在推拉门从闭合到推至最大的过程中,

① $\angle CMN$ 的最小值为_____度, 最大值为_____度;

② $\triangle CMN$ 面积的变化情况是 ()

A. 越来越大 B. 越来越小 C. 先增大后减小

(2) 当 $\angle CMN = 30^\circ$ 时，求 $\triangle CMN$ 的面积.

20. 系文物考古研究院用1:1复原的青铜蒸馏器进行了蒸馏酒实验. 用复原的青铜蒸馏器蒸馏粮食酒和芋头

酒，需要的原材料与出酒率（出酒率 = $\frac{\text{出酒量}}{\text{糟醅量}} \times 100\%$ ）如下表:

类别	原材料	出 酒 率
粮 食 酒	粮食糟醅（含大米、糯米、谷壳、大曲和蒸馏水	30%
芋 头 酒	芋头糟醅（含芋头、小曲和蒸馏水）	20%



如果第一次实验分别蒸馏出粮食酒和芋头酒共 16 公斤；第二次实验分别蒸馏出粮食酒和芋头酒共 36 公斤，且所用的粮食糟醅量是第一次的 2 倍，芋头糟醅量是第一次的 3 倍.

(1) 求第一次实验分别用了多少公斤粮食糟醅和芋头糟醅？

(2) 受限于当时的生产条件，古代青铜装馏器的出酒量约为现代复原品的 80%. 若粮食糟醅中大米占比约为 $\frac{1}{4}$ ，请问，在古代要想蒸馏出这两次实验得到的粮食酒总量，需要准备多少公斤大米？

五、解答题（本大题共 2 小题，每小题 9 分，共 18 分）

21. 某种饮品由浓缩咖啡、牛奶和糖浆三种成分调制而成，不同的配比会带来不同的口味. 为了解不同配比对口味的影响，某咖啡店进行了“糖浆加入量对口味影响”的试验：保持浓缩咖啡 30 毫升和牛奶 150 毫升不变，分三个方案改变糖浆的加入量（方案 A：10 毫升；方案 B：30 毫升；方案 C：50 毫升），并从 300 位品尝嘉宾中随机抽取 10 位嘉宾对每种方案的甜度和整体口感评分（以 1 至 10 的整数评分，分值越高对应甜度越高或整体口感越好）.

数据处理

根据收集到的数据，绘制了下列统计图表.

三个方案整体口感评分折线图

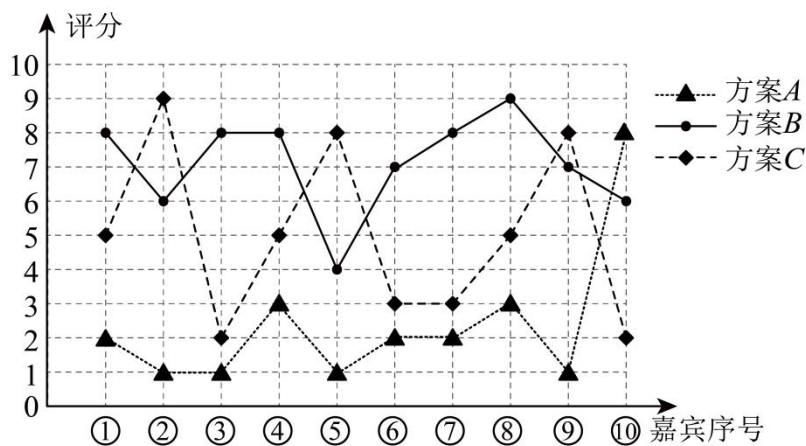


图1

表1 甜度、整体口感评分统计表

评分 方案	甜度		整体口感	
	平均数	中位数	平均数	中位数
A	2.1	2	m	2
B	6.5	5	7.1	7.5
C	8.5	8	5	n

甜度、整体口感评分平均数复合统计图

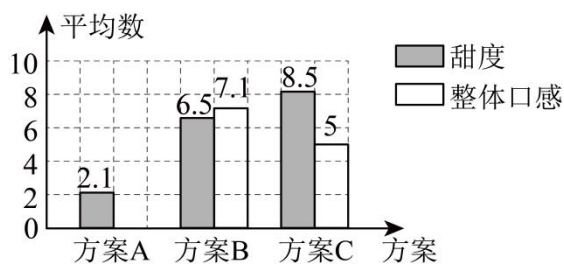


图2

数据应用

(1) 在表1中, $m =$ _____, $n =$ _____.

请根据整体口感评分, 说明三个方案中哪个方案最受欢迎.

(2) 结合图1, 估计300位嘉宾在三个方案中最喜爱方案C的人数.

(3) 补全图2, 并简单分析糖浆的加入量对饮品口味的影响.

(4) 调查显示, 嘉宾对饮品的甜度和整体口感的关注度占比为3:7, 现按照这个占比计算三种方案的综合得分, 得分大于6.5分的方案即可推出, 请结合数据分析, 推断该店将会推出哪种方案.

22. 问题背景: 对于一个函数, 如果存在自变量 $x_0 = m$ 时, 其对应的函数值 $y_0 = m$, 那么我们称该函数为

“不动点函数”, 点 (m, m) 为该函数图象上的一个不动点. 例如: 在函数 $y = x^2$ 中, 当 $x = 1$ 时, $y = 1$,

则我们称函数 $y = x^2$ 为“不动点函数”，点 $(1,1)$ 为该函数图象上的一个不动点. 某数学兴趣小组围绕该定义，对一次函数和二次函数进行了相关探究.

探究 1

(1) 对一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 进行探究后，得出下列结论：

① $y = x + 2$ 是“不动点函数”，且只有一个不动点；

② $y = -3x + 2$ 是“不动点函数”，且不动点是 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ；

③ $y = x$ 是“不动点函数”，且有无数个不动点.

以上结论中，你认为正确的是_____ (填写正确结论的序号).

(2) 若一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$) 是“不动点函数”，请直接写出 k, b 应满足的条件；

探究 2:

(3) 对二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) 进行探究后，该小组设计了以下问题，请你解答. 若抛物线 $y = x^2 - 2bx + c$ 的顶点为该函数图象上的一个不动点，求 b, c 满足的关系式.

探究 3:

(4) 某种商品每件的进价为 6 元，在某段时间内，若以每件 x 元出售，可卖出 $(12 - x)$ 件，获得利润 y 元. 请写出 y 关于 x 的函数表达式，判断该函数是否是“不动点函数”，并说明理由；若该函数是“不动点函数”，请联系以上情境说明该函数不动点表达的实际意义.

六、解答题 (本大题共 12 分)

23. 综合与实践

从特殊到一般是研究数学问题的一般思路，综合实践小组以特殊四边形为背景就三角形的旋转放缩问题展开探究.

特例研究

在正方形 $ABCD$ 中， AC, BD 相交于点 O .

(1) 如图 1， $\triangle ADC$ 可以看成是 $\triangle AOB$ 绕点 A 逆时针旋转并放大 k 倍得到，此时旋转角的度数为_____， k 的值为_____；

(2) 如图 2，将 $\triangle AOB$ 绕点 A 逆时针旋转，旋转角为 α ，并放大得到 $\triangle AEF$ (点 O, B 的对应点分别为点 E, F)，使得点 E 落在 OD 上，点 F 落在 BC 上，求 $\frac{BF}{OE}$ 的值

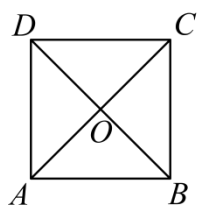


图1

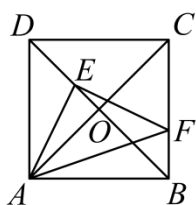


图2

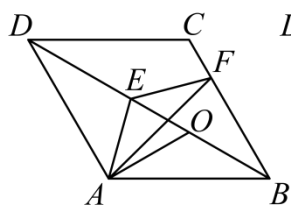
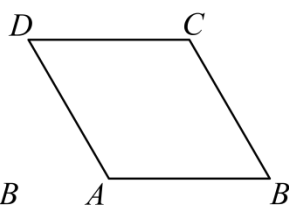


图3



备用图

类比探究

(3) 如图 3, 在菱形 $ABCD$ 中, $\angle ABC = 60^\circ$, O 是 AB 的垂直平分线与 BD 的交点, 将 AOB 绕点 A 逆时针旋转, 旋转角为 α , 并放缩得到 $\triangle AEF$ (点 O, B 的对应点分别为点 E, F), 使得点 E 落在 OD 上, 点 F 落在 BC 上. 猜想 $\frac{BF}{OE}$ 的值是否与 α 有关, 并说明理由;

猜想 $\frac{BF}{OE}$ 的值是否与 α 有关, 并说明理由;

(4) 若 (3) 中 $\angle ABC = \beta$, 其余条件不变, 探究 BA, BE, BF 之间的数量关系 (用含 β 的式子表示).